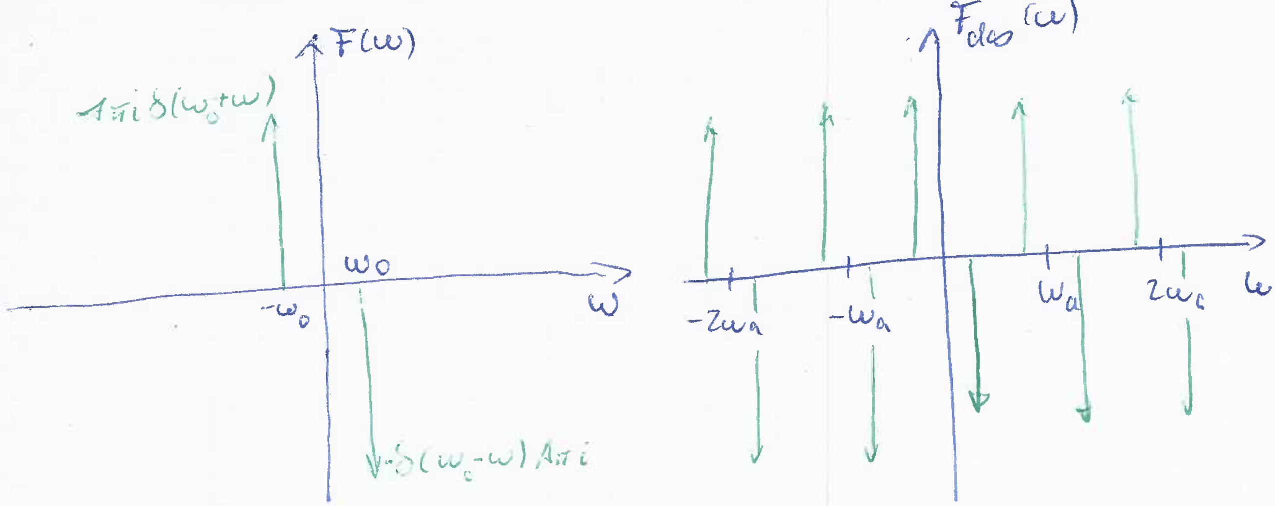
Musterlösung

Diskrete Fourier-Transformation

– Sinusspannung –

a) $t \to \infty$ $\quad f_a = 500\,Hz$ $\quad F(\omega) = A\pi i\,(\delta(\omega_0+\omega) - \delta(\omega_0-\omega))$

Kontinuierliche F-Trafo $\qquad$ Diskrete F-Trafo (∞-lange)



b) $\Delta f = \frac{1}{T_0}$ bzw $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_0}$

(20 Hz) $\qquad$ ($125{,}6\,\frac{1}{s}$)

c) Jeder δ-Peak wird durch ~~die~~ die Rechteck-Fenster-Betrachtung des Sinus zu einer $\frac{\sin x}{x}$-Fkt verbreitert

vgl. Faltungssatz:

$$f(t) = \sin(\omega_0 t)\cdot r(t) \Rightarrow F(\omega) = (R * \delta)(\omega-\omega_0) + (R*\delta)(\omega+\omega_0)$$

Die genaue Rechnung ist mit Hilfe der geometrischen Reihenentwicklung möglich (s. Anhang als Zusatz).

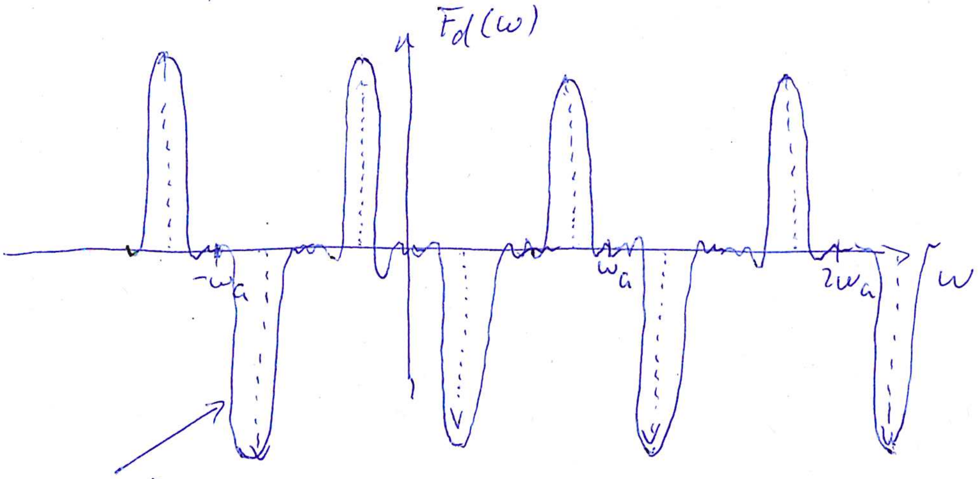
Rechnung + Plot der Einhüllenden s. Anhang ✓

Musterlösung   Diskrete Fourier-Transformation

\- Sinusspannung -

c) Fortsetzung (s. auch Anhang Seite 4 + 5)

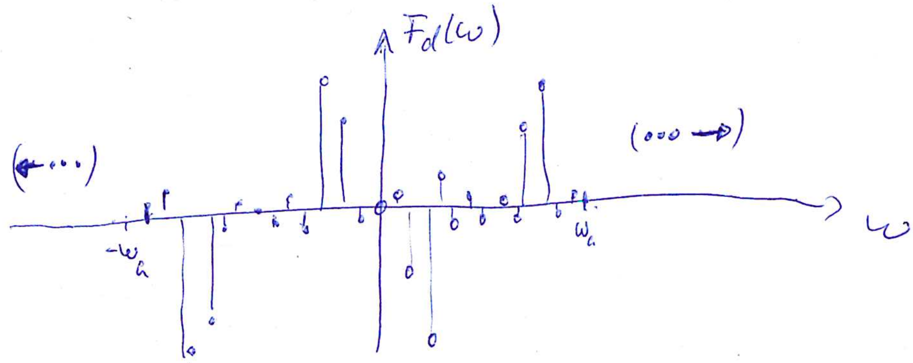
Einhüllende (qualitativ):



"Einhüllende" ergibt sich aus Summation aller $\frac{\sin x}{x}$ - Kurven an den Stellen des δ-Peaks (Faltung von $R(\omega)=\frac{\sin x}{x}$ und $FT(\sin)=\delta$)

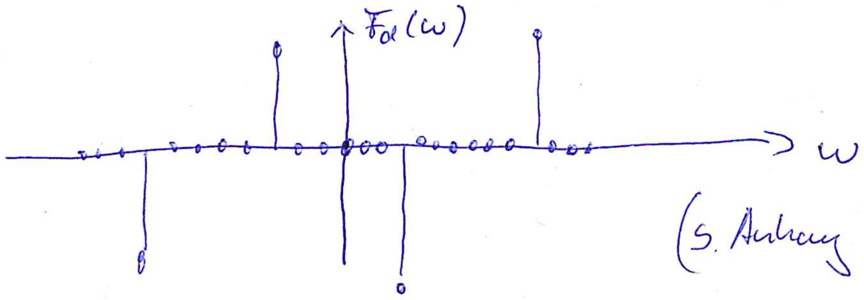
Diskretes Spektrum:

Nur Punkte im Abstand $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_0}$ auf der Einhüllenden!



d) $T_0 = 40\,ms$ ⇒ Die Punkte des Spektrums liegen zufällig genau an den Nullstellen der $\frac{\sin x}{x}$ - Fkt. bzw. am Maximum

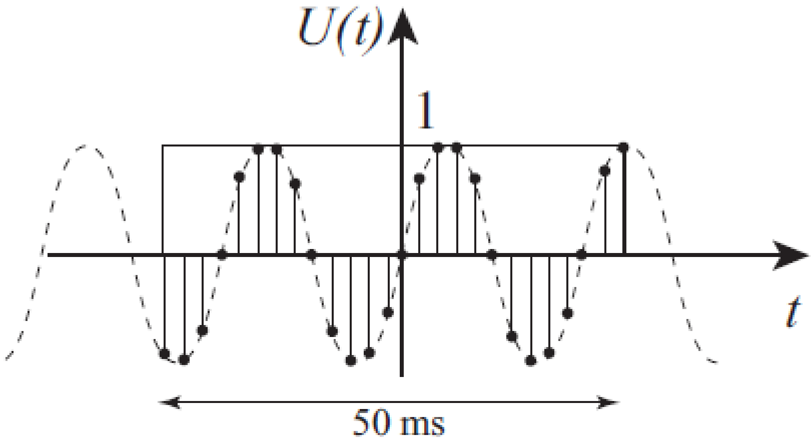
⇒



(s. Anhang Seite 6)

e) s. Anhang!

Anhang/Zusatzaufgabe: Berechnung einer diskreten Fourier-Transformation eines zeitbegrenzten Signals



Eine 50 Hz Sinusspannung wir mit $f_a = 500\ \text{Hz}$ in einem Rechteck-Fenster der Länge $T_0 = 50\ \text{ms}$ abgetastet, wie der Abbildung dargestellt. Berechnen Sie das diskrete Fourier-Spektrum. $F_d(\omega)$.

Hinweis: Benutzten Sie die Formel für die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$

Lösung

Die kontinierliche Frequenz ω diskretisiert zu ω_k mit:

$$\omega_k = k \cdot \Delta w = k \cdot 2\pi\Delta f = \frac{2\pi k}{T_0} = \frac{2\pi k}{N \cdot T_a}$$

und die diskrete Fouriertrafo lautet:

$$F_d = F(\omega_k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r(nT_a) \cdot \sin(nT_a\omega_0) \cdot e^{-i\omega_k nT_a}$$

Mit der Eulerformel ergibt sich daraus:

$$F_d = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} 1 \cdot \frac{1}{2i} \cdot \left(e^{inT_a\omega_0} - e^{-inT_a\omega_0}\right) \cdot e^{-i\omega_k nT_a}$$

$$= \frac{1}{2i} \sum e^{\overbrace{-inT_a(\omega_k-\omega_0)}^{n\cdot A_1}} - \frac{1}{2i} \sum e^{\overbrace{-inT_a(\omega_k+\omega_0)}^{n\cdot A_2}}$$

$$= \frac{1}{2i} \cdot \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{n\cdot A_1} - \frac{1}{2i} \cdot \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{n\cdot A_2}$$

Die einzelnen Summen entwickeln wir nun mit Hilfe der Angabe in einer **Nebenrechnung** zur geometrischen Reihe weiter:

$$\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{n\cdot A} = e^{-\frac{N-1}{2}\cdot A} + e^{\left(-\frac{N-1}{2}+1\right)\cdot A} + e^{\left(-\frac{N-1}{2}+2\right)\cdot A} + \ldots$$

$$= e^{-\frac{N-1}{2}\cdot A} \cdot \left(1 + e^{1\cdot A} + e^{2\cdot A} + \ldots\right)$$

$$= e^{-\frac{N-1}{2}A} \cdot \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{N-1} \left(e^A\right)^n\right)}_{\text{geometrische Reihe}}$$

Mit Hilfe der Angabe $\left(\sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}\right)$ folgt daraus:

$$\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{n\cdot A} = e^{-\frac{N-1}{2}A} \cdot \left(\frac{1-e^{A\cdot\left[\left(N-\cancel{1}\right)+\cancel{1}\right]}}{1-e^A}\right)$$

Man kann nun durch geschicktes Umformen wieder auf eine Form der Eulerschen Formel kommen im Nenner und Zähler:

$$\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{n\cdot A} = e^{-\frac{N-1}{2}A}\left(\frac{1-e^{AN}}{1-e^A}\right) \cdot \frac{e^{-\frac{A}{2}}}{e^{-\frac{A}{2}}}$$

$$= \frac{e^{-\frac{N-1}{2}A-\frac{A}{2}} - e^{-\frac{N-1}{2}A-\frac{A}{2}+A\cdot N}}{e^{-\frac{A}{2}} - e^{\frac{A}{2}}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{e^{-\frac{AN}{2}} - e^{\frac{AN}{2}}}{e^{-\frac{A}{2}} - e^{\frac{A}{2}}}}}$$

Mit $\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$ folgt nun:

$$\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{n\cdot A} = \frac{e^{-\frac{AN}{2}} - e^{\frac{AN}{2}}}{e^{-\frac{A}{2}} - e^{\frac{A}{2}}} = \frac{-2i\sin\left(\frac{AN}{2i}\right)}{-2i\sin\left(\frac{A}{2i}\right)} = \underline{\underline{\frac{\sin\left(\frac{AN}{2i}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2i}\right)}}}$$

Dies können wir nun wieder in die **Hauptrechnung** einsetzen:

$$F_d = F(\omega_N) = \frac{1}{2i}\cdot\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{n\cdot A_1} - \frac{1}{2i}\cdot\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{n\cdot A_2}$$

$$= \frac{1}{2i}\cdot\frac{\sin\left(\frac{A_1 N}{2i}\right)}{\sin\left(\frac{A_1}{2i}\right)} - \frac{1}{2i}\cdot\frac{\sin\left(\frac{A_2 N}{2i}\right)}{\sin\left(\frac{A_2}{2i}\right)}$$

Nun müssen nur noch die Koeffizienten wieder ersetzt werden:

$$A_1 = -iT_a(\omega_k - \omega_0)$$
$$A_2 = -iT_a(\omega_k + \omega_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{F(\omega_k) = \frac{1}{2i}\frac{\sin\left(N\cdot\frac{\omega_k-\omega_0}{2}T_a\right)}{\sin\left(\frac{\omega_k-\omega_0}{2}T_a\right)} - \frac{1}{2i}\frac{\sin\left(N\cdot\frac{\omega_k+\omega_0}{2}T_a\right)}{\sin\left(\frac{\omega_k+\omega_0}{2}T_a\right)} \quad ; \quad \omega_k = \frac{k\cdot 2\pi}{N\cdot T_a}}$$

An dieser Gleichung erkennt man, dass ihr Nenner oszilliert, wodurch es zu wiederkehrenden Maxima kommt. Diese Periodizität entsteht aufgrund der zeitdiskreten Abtastung.

Skizzieren Sie die Einhüllende des Spektrums und das diskrete Spektrum selbst!

Lösung

Die „Einhüllende" hat die Form $\dfrac{\sin(N\cdot x)}{\sin(x)}$.

(Vergleiche mit $\dfrac{\sin(x)}{x}$, jedoch wird der Nenner periodisch zu 0)

Mit $\sin(x)=0$ für:

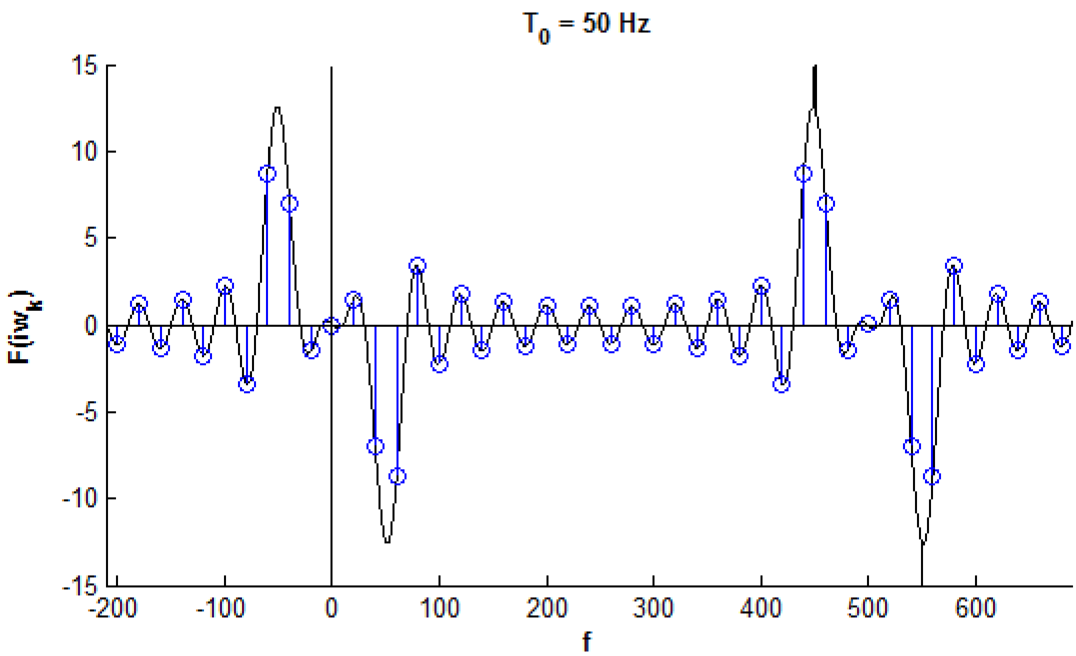
$$Periode:\quad \delta x = n\pi \quad \rightarrow \quad \delta f = n\cdot f_a$$

Denn:

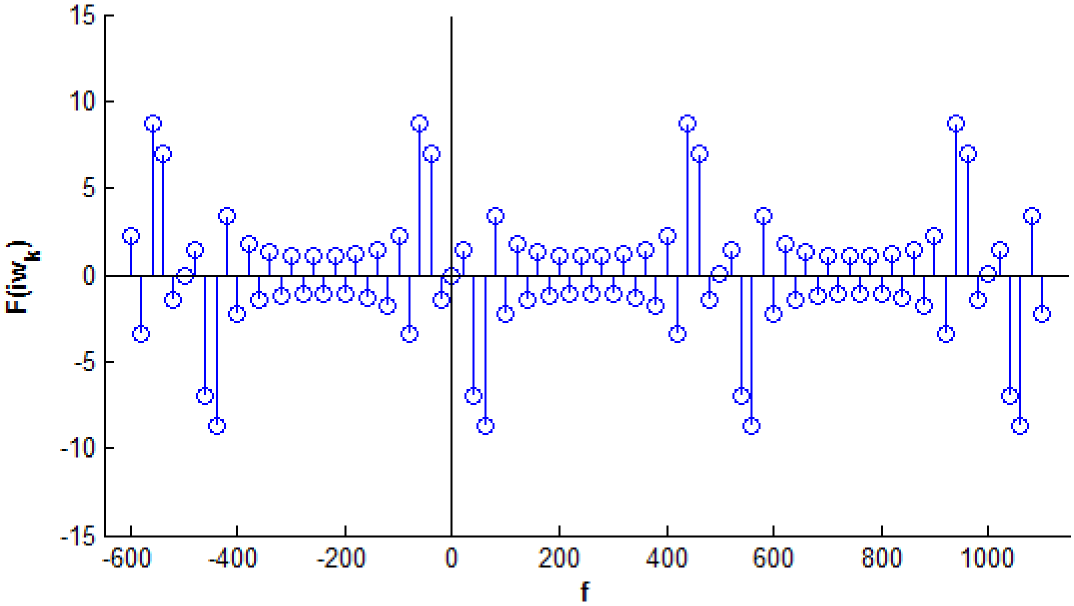
$$\frac{\delta\omega}{2}T_a = n\cdot\pi$$

$$\delta\omega = \frac{2\pi}{T_a}\cdot n \quad oder \quad f_a = n\cdot 2\pi \qquad \Leftarrow \quad \delta\omega = \delta f\cdot 2\pi = \frac{2\pi}{T_a}\cdot n = f_a\cdot 2\pi\cdot n$$

Dies ist wie mit den Nullstellen beim Rechteck-Spektrum, nur dass diese hier periodisch wiederkehren mit f_a.



Ergebnis des "puren" Spektrums ohne Einhüllenden:



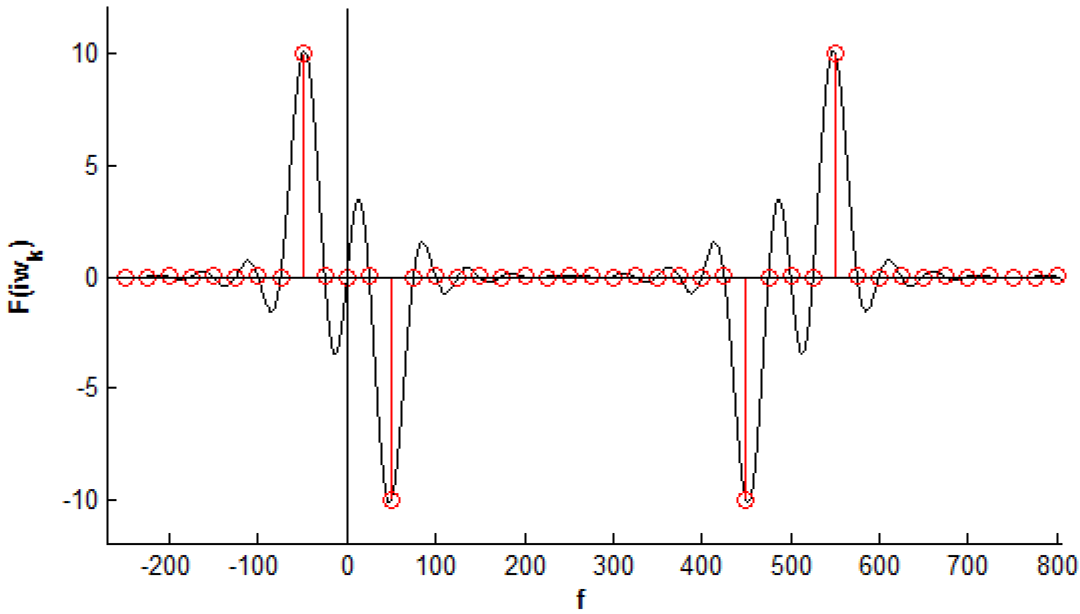
Infos: $\Delta f = 20\,Hz, \quad f_a = 500\,Hz \rightarrow Periode$

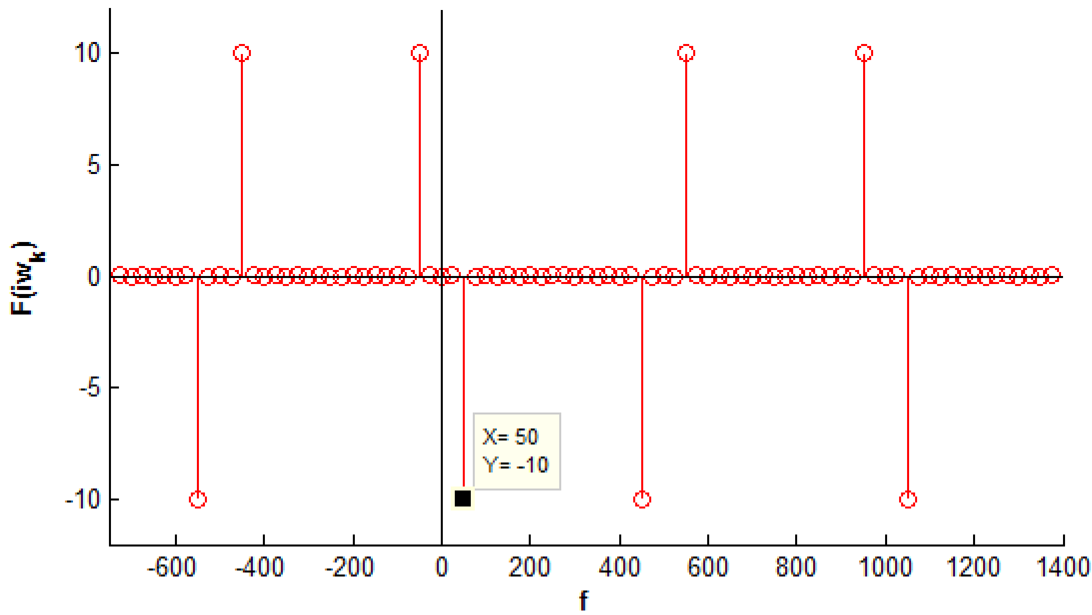
Man erkennt ein "Verschmieren" des Spektrums mit der Fouriertransformierten des Fensters. Dieser sog. Leck-Effekt entsteht durch das "harte" Abschneiden des Sinus an Stellen wo er nicht null ist.

Was ändert sich qualitativ für das Spektrum bei einem Rechteck-Fenster mit der Länge $T_0 = 40ms$.

Lösung

$\omega_k = \frac{k \cdot 2\pi}{N \cdot T_a} = \frac{k \cdot 2\pi}{T_0}$ verändert sich. Die Abstände werden größer. Damit treffen wir in diesem Fall direkt den Peak mit der höchsten Amplitude, und nicht mehr sämtliche anderen Peaks also den „Abfall“.





Es ergibt sich also direkt das Sinusspektrum und wir ermitteln exakt die Ursprungsfrequenz der Sinus-Spannung von 50 Hz. Dies erklärt sich dadurch das wir das Sinussignal mit einem Rechteck-Fenster von 40 ms **direkt an den Nullstellen** abschneiden. Damit bekommen wir ein Eingangssignal, welches direkt periodisch fortsetzbar ist. Nur dann nämlich kann das Signal mit der DTF (diskreten Fourier-Transformation) exakt transformiert werden und der Leck-Effekt vermieden werden. ALLGEMEIN ist dies aber nicht so einfach wie beim Sinus möglich, da die Signale ja beliebige Form haben und durch eine Fensterfunktion irgendwie "zeitbegrenzt" abgeschnitten werden müssen. Dieses Abschneiden kann mit verschiedenen "Fensterformen" durchgeführt werden und so das "Verschmieren" des Spektrums mit der Fouriertransformierten des Fensters mehr oder weniger verhindert werden.