

Frequenzverhalten eines Hochpass-Messgliedes

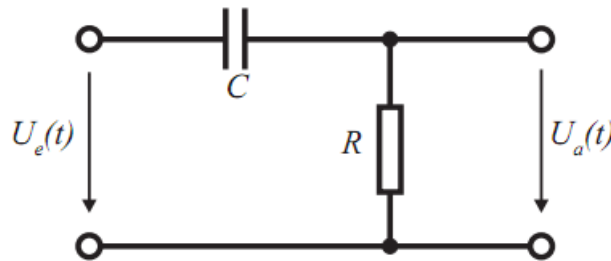


Abbildung 1: Schaltbild eines Hochpass-Messgliedes

a) Frequenzgang

i. Berechnen Sie für die CR-Schaltung aus Abb. 1 den komplexen Frequenzgang

$$G(\omega) = \frac{U_a(\omega)}{U_e(\omega)} \text{ an.}$$

Lösung

Als Frequenzgang bezeichnet man den Zusammenhang zwischen sinusförmigen Schwingungen am Ein- und Ausgang eines linearen zeitinvarianten Systems / Übertragungsgliedes.

Für den **komplexen Frequenzgang** gilt:

$$G(\omega) = \frac{U_a(\omega)}{U_e(\omega)}$$

Für die Ein- und Ausgangsspannung als Wechselspannung schreibt man allgemein in komplexer Darstellung:

$$U_e(t) = U_e(\omega) \cdot e^{i\omega t} \quad ; \quad U_a(t) = \hat{U}_a(\omega) \cdot e^{i(\omega t + \varphi)} = \hat{U}_a(\omega) e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t} = U_a(\omega) \cdot e^{i\omega t}$$

(Mit der Eulerschen Identität $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ wird somit mathematisch vollständig eine Schwingung beschrieben, später wird mit dem Fouriertheorem gezeigt, dass sich jedes beliebige Spannungssignal aus solchen Schwingungen zusammensetzen lässt)

Hierbei weist das Ausgangssignal eine andere Amplitude als das Eingangssignal sowie eine Phasenverschiebung auf.

Dies setzen wir in die DGL des Hochpass-Messgliedes ein:

$$\begin{aligned} \dot{U}_e(t) &= \frac{1}{RC} \cdot U_a(t) + \dot{U}_a(t) \\ \Rightarrow i\omega U_e &= \frac{1}{RC} U_a + i\omega U_a \\ \Rightarrow i\omega \cdot RC \cdot U_e &= U_a(1 + i\omega RC) \\ \Rightarrow \frac{U_a}{U_e} &= \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC} = \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{i\omega RC}} = \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC} = G(\omega) \end{aligned}$$

Alternative Lösung (Hochpassschaltung als "Spannungsteiler"):

Der **komplexe Frequenzgang** berechnet sich zu:

$$G(\omega) = \frac{U_a(\omega)}{U_e(\omega)}$$

Mit Hilfe der komplexen Widerstände gilt:

$$\begin{aligned} U_a(\omega) &= Z_R \cdot I = R \cdot I \\ U_e(\omega) &= Z_C \cdot I + Z_R \cdot I = \frac{1}{i\omega C} \cdot I + R \cdot I \\ \Rightarrow G(\omega) &= \frac{U_a(\omega)}{U_e(\omega)} = \frac{R}{\frac{1}{i\omega C} + R} = \dots = \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC} \cdot \frac{1 - i\omega RC}{1 - i\omega RC} = \frac{i\omega RC + (\omega RC)^2}{1 + (\omega RC)^2} \end{aligned}$$

ii. Spalten Sie den Frequenzgang in seinen Realteil $\text{Re}\{G(\omega)\}$ und Imaginärteil $\text{Im}\{G(\omega)\}$ auf.

Lösung

Erweiterung mit dem konjugiert komplexen des Nenners:

$$\begin{aligned} \tau &= RC \\ G(\omega) &= \frac{i\omega\tau}{1 + i\omega\tau} \cdot \frac{1 - i\omega\tau}{1 - i\omega\tau} = \frac{i\omega\tau + (\omega\tau)^2}{1 + (\omega\tau)^2} \\ \Rightarrow \text{Re} &= \frac{(\omega\tau)^2}{1 + (\omega\tau)^2} \\ \Rightarrow \text{Im} &= \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \end{aligned}$$

b) Amplitudengang

i) Geben Sie den Amplitudengang $|G(\omega)|$ an.

Allgemeiner Hinweis zur Nomenklatur:

In der Literatur wird der *komplexe* Frequenzgang bzw. die Übertragungsfunktion oftmals als $G(i\omega)$ bezeichnet, um die Komplexwertigkeit der Funktion zu markieren, wogegen der Amplitudengang mit $G(\omega) = |G(i\omega)|$ bezeichnet wird. Um Missverständnisse zu vermeiden, werden wir hier den Frequenzgang mit $G(\omega)$ und den Amplitudengang mit $|G(\omega)|$ bezeichnen! Ebenso

Lösung

$$\begin{aligned} |G(\omega)| &= \sqrt{\operatorname{Re}^2 + \operatorname{Im}^2} = \sqrt{\frac{(\omega\tau)^4 + (\omega\tau)^2}{(1+(\omega\tau)^2)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(\omega\tau)^2 [(\omega\tau)^2 + 1]}{(1+(\omega\tau)^2)^2}} = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} = \frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \end{aligned}$$

ii. Welchen Wert hat der Amplitudengang für den Grenzfall $\omega = 0 \text{ s}^{-1}$?

Lösung

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |G(\omega)| = \frac{0}{1} = 0$$

iii. Welchen Wert hat der Amplitudengang für hohe Frequenzen $\omega RC \gg 1$?

Lösung

$$\omega\tau \gg 1 \quad ; \quad \lim_{\omega\tau \gg 1} |G(\omega)| \hat{=} \frac{\omega\tau}{\sqrt{(\omega\tau)^2}} = 1$$

iv. Welchen Wert hat der Amplitudengang für niedrige Frequenzen $\omega RC \ll 1$?

Lösung

Bemerkung: Im Gegensatz zu Teilaufgabe ii) ist hier der "Verlauf" gegen kleine Frequenzen gefragt:

$$\omega\tau \ll 1 \quad ; \quad \lim_{\omega\tau \ll 1} |G(\omega)| = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1}} = \underline{\underline{\omega\tau}}$$

c) Geben Sie für das System die Grenzfrequenz ω_g an.

Lösung

Die **Grenzfrequenz** eines Verstärkers ist in üblicher Konvention jene Frequenz, bei der die Spannungs- bzw. Stromverstärkung (also der Amplitudengang) auf den $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -fachen Wert der maximalen Verstärkung abgesunken ist (ca. 70,7 %). Dieser Abfall wird auch als -3db-Abfall bezeichnet:

$$|G(\omega_g)| = -3dB = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|G(\omega_g)|^2 = \frac{\omega_g^2 \tau^2}{1 + \omega_g^2 \tau^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2\omega_g^2 \tau^2 = 1 + \omega_g^2 \tau^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\omega_g = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}}}}$$

d) Ermitteln Sie den Phasengang $\varphi(\omega)$

Lösung

Für den **Phasengang** gilt:

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\text{Im}\{G(\omega)\}}{\text{Re}\{G(\omega)\}}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\varphi(\omega) = \arctan\frac{1}{\omega\tau} = \arctan\left(\frac{\omega_g}{\omega}\right)}}$$

Daraus folgt auch:

$$\varphi(\omega = 0) = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

$$\varphi(\omega = \omega_g) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

$$\varphi(\omega \gg \omega_g) = \arctan(0) = 0 = 0^\circ$$

e) Für zwei Sensoren sind die Ersatzschaltungen nach Abb. 1 mit den Komponenten R_1 und C_1 , bzw. R_2 und C_2 gegeben. Die Komponenten haben folgende Dimensionen:
 $R_1 = R_2 = 160 \text{ k}\Omega$, $C_1 = 1 \mu\text{F}$ und $C_2 = 200 \text{ nF}$. Die entsprechenden Frequenzgänge sind $G_1(\omega)$ und $G_2(\omega)$.

i. Welchen Wert haben die Grenzfrequenzen ω_{g1} und ω_{g2} ?

Lösung

$$\tau_1 = R_1 \cdot C_1 \quad \dots = 160 \text{ ms}$$

$$\tau_2 = R_2 \cdot C_2 \quad \dots = 32 \text{ ms}$$

$$\omega_{g1} = \frac{1}{\tau_1} = 6,25 \text{ Hz} \quad ; \quad f_{g1} = \frac{\omega_{g1}}{2\pi} = 1 \text{ Hz}$$

$$\omega_{g2} = \frac{1}{\tau_2} = 31,25 \text{ Hz} \quad ; \quad f_{g2} = \frac{\omega_{g2}}{2\pi} = 5 \text{ Hz}$$

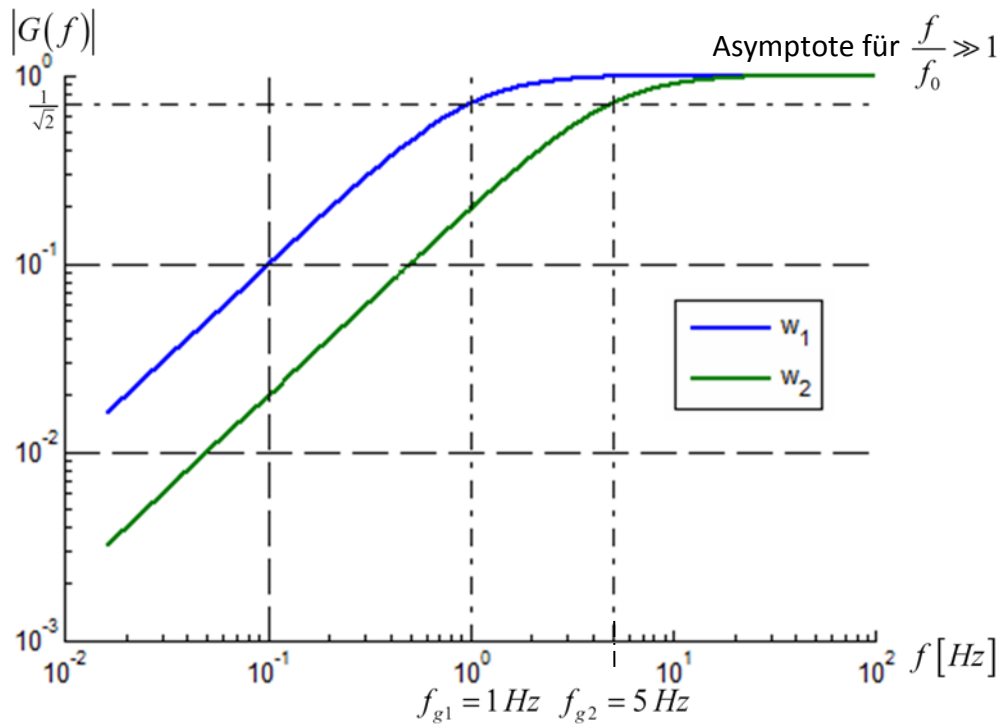
ii. Zeichnen Sie die Amplitudengänge beider Sensoren für den Frequenzbereich $0,1\omega_g$ bis $10\omega_g$ in einem doppelt logarithmischen Diagramm.

Lösung

$$\underline{\underline{|G_{1,2}(\omega = 0)| = 0}}$$

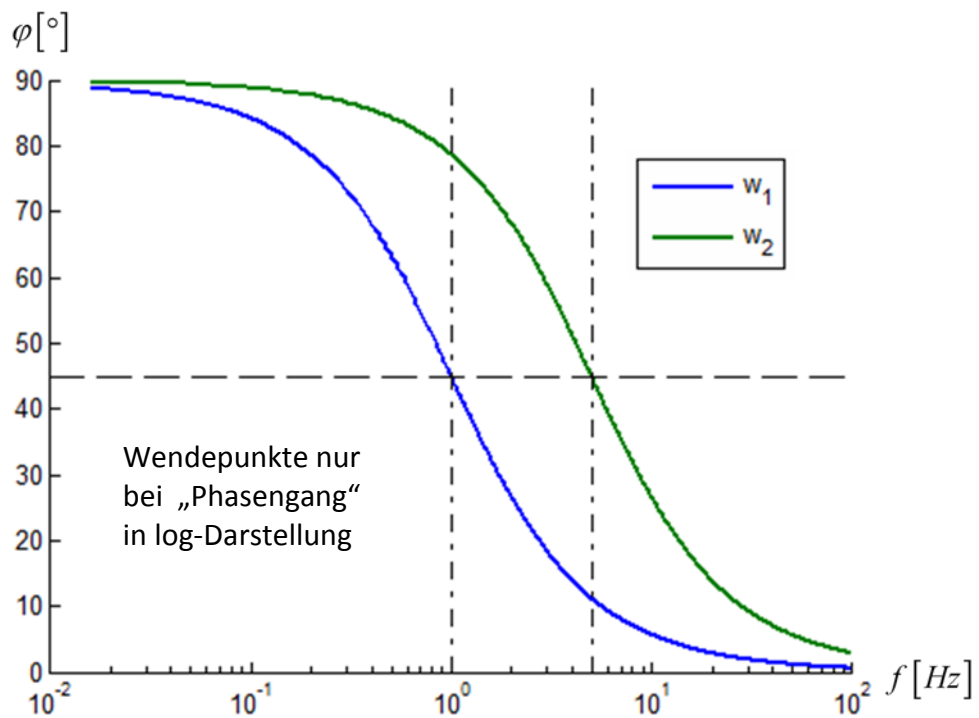
$$|G_{1,2}(\omega = 10\omega_g)| = \frac{10}{\sqrt{1+10^2}} = \frac{10}{\sqrt{101}} = 0,99503719 \approx 1$$

$$|G_{1,2}(\omega = 100\omega_g)| = \frac{100}{\sqrt{1+100^2}} = \frac{100}{\sqrt{10.001}} = 0,999950004 \approx 1$$



iii. Skizzieren Sie den Phasengang der beiden Schaltungen für denselben Frequenzbereich

Lösung



Hinweis: Als "Phasengang" bezeichnet man üblicherweise die logarithmische Darstellung, die eine Betrachtung der Funktion $\varphi(\omega)$ über einen sehr großen Frequenzbereich erlaubt. Nur diese hat einen Wendepunkt in der grafischen Darstellung. Die Funktion $\varphi(\omega)$ hat selbst keinen Wendepunkt, wie man durch analysieren der 2. Ableitung leicht sehen kann. Zum Beweis, dass die logarithmische Darstellung grafisch einen Wendepunkt hat, muss man tatsächlich die 2. Ableitung

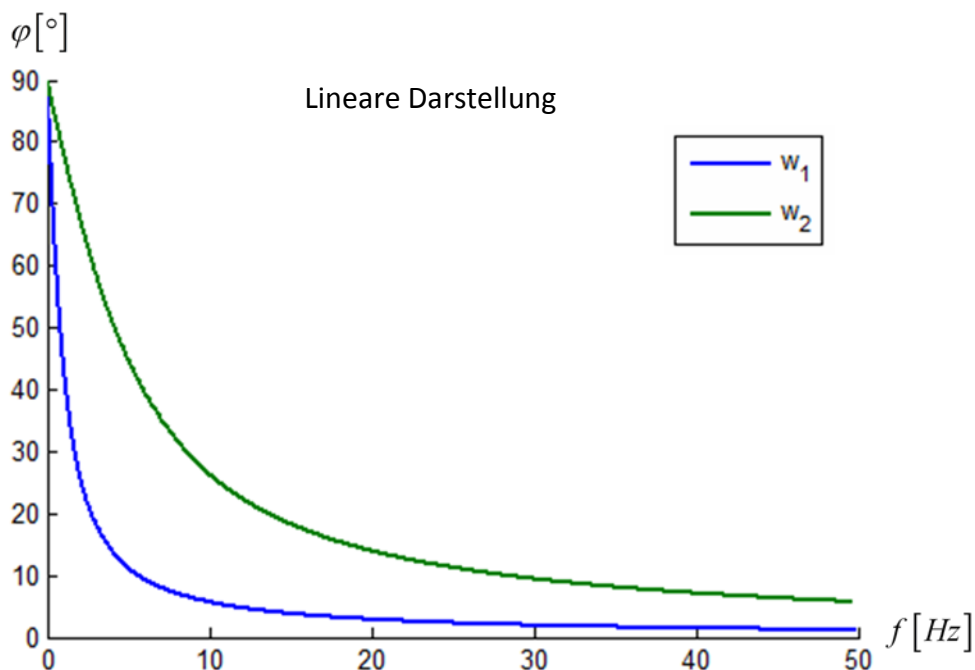
$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}(10^x) = \frac{d^2}{dx^2} \arctan(10^x)$$

betrachten mit $x = \log \frac{\omega}{\omega_g}$ für Tiefpass bzw. $x = \log \frac{\omega_g}{\omega}$ für Hochpass! Denn bei der log-Darstellung wird die Funktion in Ihrer Wertigkeit nicht geändert, also

$$\arctan \frac{\omega}{\omega_g} = \arctan(10^{\log \frac{\omega}{\omega_g}}) = \varphi\left(10^{\log \frac{\omega}{\omega_g}}\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)$$

Die Nullstelle der 2. Ableitung ist dann $x = 0$, d.h. $\log \frac{\omega}{\omega_g} = 0$ also $\omega = \omega_g$. Dies ist also Wendepunkt in der grafischen log-Darstellung.

Die lineare Darstellung sieht so aus:



iv. Geben Sie für $U_e(t) = U_0 + U_I \sin(2\pi f_I t) + U_{II} \sin(2\pi f_{II} t) + U_{III} \cos(2\pi f_{III} t)$ mit $f_I = 5 \text{ Hz}$, $f_{II} = 10 \text{ Hz}$ und $f_{III} = 100 \text{ Hz}$ das Ausgangssignal $U_a(t)$ an. $U_{0,I,II,III}$ seien dabei beliebige Spannungswerte.

Lösung

Für den Hochpass gilt (s. vorangegangene Aufgaben):

$$|G(\omega)| = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \quad \text{und} \quad \varphi(\omega) = \arctan \frac{1}{\omega\tau}$$

Der Frequenzgang $G(\omega)$ gibt den Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangssignal an. Mit dem Amplitudengang $|G(\omega)|$ und dem Phasengang $\varphi(\omega)$ gilt:

$$G(\omega) = \frac{U_a(\omega)}{U_e(\omega)} = \frac{|U_a(\omega)| e^{i\varphi_a(\omega)}}{|U_e(\omega)| e^{i\varphi_e(\omega)}} = \frac{|U_a(\omega)|}{|U_e(\omega)|} e^{i\varphi(\omega)} = |G(\omega)| e^{i\varphi(\omega)}$$

$$\Rightarrow U_a(\omega) = |G(\omega)| e^{i\varphi(\omega)} U_e(\omega)$$

Und außerdem:

$$U_e(t) = U_e(\omega) \cdot e^{i\omega t} \quad ; \quad U_a(t) = U_a(\omega) \cdot e^{i\omega t}$$

Bei der gegebenen Eingangsspannung $U_e(t)$ treten nur bei 4 diskreten Frequenzen Amplituden ungleich 0 auf, bei $f_0 = 0$, $f_I = 5 \text{ Hz}$, $f_{II} = 10 \text{ Hz}$, $f_{III} = 100 \text{ Hz}$. Zu jeder Frequenz lässt sich also die Ausgangs-Amplitude $U_a(\omega)$ und Phase $\varphi(\omega)$ mit der gegebenen Eingangs-Amplitude $U_e(\omega_{0-III} = 2\pi f_{0-III})$ berechnen

Für die zeitabhängige Ausgangsspannung kann man somit in komplexer oder realer Schreibweise angeben als

$$U_a(t) = U_0 \cdot |G(0)| e^{i\varphi(0)} + U_I |G(\omega_I)| e^{i(\omega_I t + \varphi(\omega_I))} + U_{II} |G(\omega_{II})| e^{i(\omega_{II} t + \varphi(\omega_{II}))} + U_{III} |G(\omega_{III})| e^{i(\omega_{III} t + 90^\circ + \varphi(\omega_{III}))}$$

$$U_a(t) = U_0 \cdot |G(0)| \sin(\varphi(0)) + U_I |G(\omega_I)| \sin(\omega_I t + \varphi(\omega_I)) + U_{II} |G(\omega_{II})| \sin(\omega_{II} t + \varphi(\omega_{II})) + U_{III} |G(\omega_{III})| \cos(\omega_{III} t + \varphi(\omega_{III}))$$

Einsetzen in Amplituden- und Phasengang (s.o.) ergibt

Für $\tau_1 = R_1 \cdot C_1 \quad \dots = 160 \text{ ms}$:

$$U_a(t) = 0 \cdot U_0 e^{i90^\circ} + 0.98 U_I e^{i(\omega_I t + 11.25^\circ)} + 0.995 U_{II} e^{i(\omega_{II} t + 5.7^\circ)} + 0.99995 U_{III} e^{i(\omega_{III} t + 90.57^\circ)}$$

$$U_a(t) = 0 \cdot U_0 \sin(90^\circ) + 0.98 U_I \sin(2\pi f_I t + 11.25^\circ) + \dots$$

$$\dots + 0.995 U_{II} \sin(2\pi f_{II} t + 5.7^\circ) + 0.99995 U_{III} \cos(2\pi f_{III} t + 0.57^\circ)$$

Für $\tau_2 = R_2 \cdot C_2 \quad \dots = 32 \text{ ms}$:

$$U_a(t) = 0 \cdot U_0 e^{i90^\circ} + 0.70 U_I e^{i(\omega_I t + 44.8^\circ)} + 0.895 U_{II} e^{i(\omega_{II} t + 26.4^\circ)} + 0.998 U_{III} e^{i(\omega_{III} t + 92.85^\circ)}$$

$$U_a(t) = 0 \cdot U_0 \sin(90^\circ) + 0.70 U_I \sin(2\pi f_I t + 44.8^\circ) + \dots$$

$$\dots + 0.895 U_{II} \sin(2\pi f_{II} t + 26.4^\circ) + 0.998 U_{III} \cos(2\pi f_{III} t + 2.85^\circ)$$
