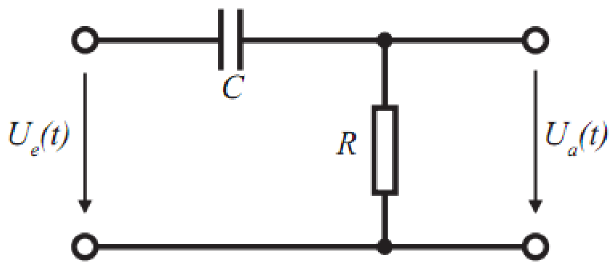
Zeitverhalten eines Hochpass-Messgliedes



Gegeben ist die Schaltung aus Abb. 1 mit $R = 160\,\mathrm{k\Omega}$ und $C = 1\,\mathrm{\mu F}$.

a) Ermitteln Sie die Differentialgleichung für $U_a(t)$, wenn der Ausgang nicht belastet wird $(I_A = 0\,A)$.

Lösung

Zunächst folgt das Aufstellen der Knoten- und Maschengleichungen nach Kirchhoff (vgl. ET: http://me-lrt.de/systems-knoten-maschengleichungen)

$$\sum I_{zu}(t) = \sum I_{ab}(t)$$
$$\sum U(t) = 0$$

$$I_c(t) = I_R(t) \qquad (1)$$
$$U_e(t) = U_c(t) + U_R(t) \qquad (2)$$

Es gilt:

$$C = \frac{Q}{U_c} \quad \Leftrightarrow \quad U_c = \frac{Q}{C} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{U}_c = \frac{I}{C} \qquad (3)$$
$$U_R = U_a(t) \qquad (4)$$

Mit Ableitung von (2) folgt:

$$\dot{U}_e = \dot{U}_c + \dot{U}_R = \frac{I_c}{C} + \dot{U}_a(t) \qquad (5)$$

Einsetzten von (1) mit $I_c = I_R = \frac{U_R}{R}$ in (5) ergibt

$$\dot{U}_e = \frac{U_R}{R \cdot C} + \dot{U}_a(t)$$

und mit (4) folgt

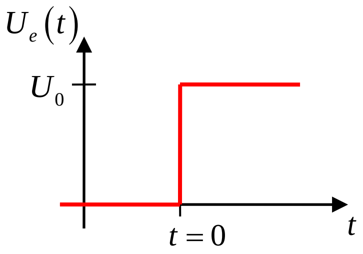
$$\underline{\underline{\dot{U}_e(t) = \frac{U_a(t)}{R \cdot C} + \dot{U}_a(t)}} \qquad (6)$$

Das ist die gesuchte DGL.

b) Bestimmen Sie die Sprungantwort des Hochpass-Messgliedes. Lösen Sie dazu die DGL für den Fall, dass sich die Eingangsspannung U_e zur Zeit $t=0$ sprungförmig von $U_e(t<0)=0$ auf $U_e(t\geq 0)=U_0$ ändert.

Lösung

Im dieser Teilaufgabe soll die Antwort des Hochpass-Messgliedes auf folgendes Signal bestimmt werden:



Lösung der homogenen Gleichung:

$$\frac{1}{RC}\cdot U_a(t)+\dot{U}_a(t)=0$$

$$\frac{d}{dt}U_a=-\frac{1}{RC}U_a$$

$$\int\frac{dU_a}{U_a}=\int-\frac{1}{RC}\cdot dt$$

$$\ln U_a=-\frac{1}{RC}\cdot t+\text{const.}$$

$$U_{a,hom}=e^{-\frac{t}{RC}+\text{const.}}=B\cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Alternativ: Lösung der homogenen DGL mit dem allgemeinen Ansatz $U_a=B\cdot e^{\lambda t}$.

Jetzt kommen wir zur partikulären Lösung:

Für $t\to\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}=0$

$$\underbrace{\dot{U}_e(t\to\infty)}_{=0!}=\frac{1}{RC}U_a(t\to\infty)+\underbrace{\dot{U}_a(t\to\infty)}_{=0!}$$

$$\Rightarrow \quad U_a(t\to\infty)=0=U_{a,part}$$

Für die Gesamtlösung gilt also:

$$U_a(t)=U_{a,\text{hom}}+U_{a,part}$$

$$U_a(t)=B\cdot e^{-\frac{1}{RC}\cdot t} \qquad (7)$$

Zur Bestimmung von *B* betrachten wir die Randbedingungen:

$$Q(t=0)=0 \text{ und } U_C=Q/C$$

$$\Rightarrow U_c(t=0)=0$$

$$\Rightarrow U_a(t=0)=U_e(t=0)=U_0$$

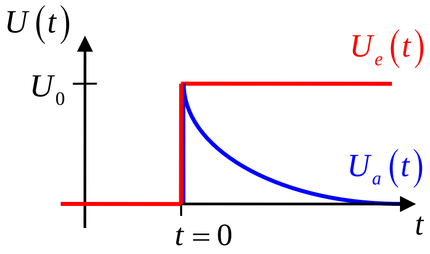
einsetzen in (7) ergibt

$$U_a(t=0) = B \cdot e^0 = U_0 \quad \Rightarrow \quad B = U_0$$

Für die Gesamtlösung gilt also:

$$\underline{\underline{U_a(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}}} \qquad (8)$$

Damit sieht die Sprungantwort des Hochpass-Messgliedes wie folgt aus:



c) Nach welcher Zeit t ist mit oben angegebenen Werten für R und C die Ausgangsspannung auf i) die Hälfte ii) den Bruchteil 1/e abgesunken.

Lösung

Für die Ausgangsspannung gilt nach voriger Aufgabe:

$$U_a(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$$

Umformen ergibt

$$\frac{U_a(t)}{U_0} = e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$$

$$\ln \frac{U_a(t)}{U_0} = -\frac{1}{RC} \cdot t$$

$$t = -RC \ln \frac{U_a(t)}{U_0}$$

Für $U_a(t) = 0.5 \cdot U_0$ oder $U_a(t) = \frac{U_0}{e}$ erhält man durch einsetzen von $R = 160\ \mathrm{k\Omega}$ und $C = 1\ \mu\mathrm{F}$ also

$$t_{0.5} = -160 \cdot 10^3 \Omega \cdot 1 \cdot 10^{-6} \mathrm{F} \ln \frac{0.5 U_0}{U_0} = 160 \cdot 10^{-3} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} \times \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}} \cdot \ln 2 = \underline{\underline{0.11\,\mathrm{s}}}$$

oder

$$t_{1/e} = -160 \cdot 10^3 \Omega \cdot 1 \cdot 10^{-6} \mathrm{F} \ln \frac{U_0}{e U_0} = 160 \cdot 10^{-3} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} \times \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}} \cdot \ln e = \underline{\underline{0.16\,\mathrm{s}}}$$

Hinweis:
Die Zeit $\tau = t_{1/e} = \mathrm{RC}$ wird *als "Zeitkonstante"* des RC-Gliedes bezeichnet (vgl. *"Grenzfrequenz"* $\omega_g = 1/\tau$ in der Beschreibung des Frequenzverhaltens).

d) Leiten Sie die *Impulsantwort* durch Übergang $T_0 \to 0$ eines Spannungsimpulses

$$U_e(t) = \begin{cases} A/T_0 & \text{für} \quad 0 \le t \le T_0 \\ 0 & \text{für} \quad t \ge T_0 \end{cases}$$

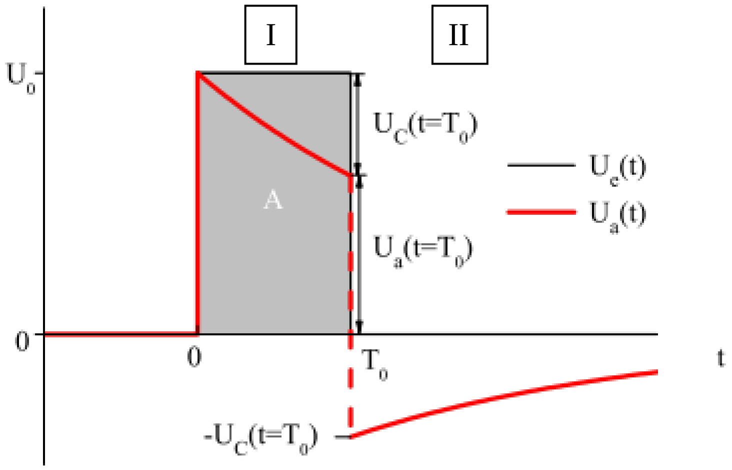
her. A sei dabei definiert als konstante *Impulsfläche* $U_0 \cdot T_0$.

Lösung

Die Differentialgleichung ist mit $\tau = RC$ gegeben als

$$U_a + \tau \dot{U}_a = \tau \dot{U}_e$$

Wir suchen eine Lösung für $A = U_0 \cdot T_0 = const. \quad T_0 \to 0$



Wir trennen das Problem nun in zwei Teile auf. Zum einen betrachten wir den Bereich I mit $0 < t < T_0$ und berechnen die klassische Lösung wie schon in der Sprungantwort in b) berechnet. Es ergibt sich die Sprungantwort:

$$U_a^I = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (9)$$

Für den Bereich II mit $t > T_0$ suchen wir ebenfalls eine Lösung für die DGL:

$$U_a + \tau \dot{U}_a = \tau \dot{U}_e$$

Wir teilen wieder in homogene und inhomogene Lösung auf und beginnen mit der homogenen Lösung. Da dies ebenfalls die Antwort auf einen (hier zeitlich verschobenen) Sprung ist, ergibt sich als Lösung:

$$U_{a,\text{hom}}^{II} = K \cdot e^{-\frac{t-T_0}{\tau}}$$

Für die partikuläre Lösung gilt: $t \to \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} = 0$

$$\Rightarrow \quad U_{a,\text{part}}^{II} = 0$$

Damit lautet die Gesamtlösung (als Summer der beiden):

$$U_a^{II} = K \cdot e^{-\frac{t-T_0}{\tau}} \qquad (10)$$

Um den Faktor K zu ermitteln verwenden wir jetzt unsere Randbedingung: $t \to T_0$
Vorsicht: Hier müssen wir aufpassen, da hier eine Unstetigkeit haben, denn

$$U_a^{I}\left(T_0\right) \neq U_a^{II}\left(T_0\right)$$

Warum ist das so? Was passiert in diesem Moment am Kondensator? Bis zu diesem Zeitpunkt wurde der Kondensator geladen, d.h. es fließt Strom, am Anfang fällt keine Spannung am Kondensator ab (Kurzschluss), bis zum Zeitpunkt $t = T_0$ fällt dann eine gewisse Spannung U_C^I ab. Da die Ladung auf dem Kondensator sich nicht sprunghaft ändern kann gilt $Q^I(T_0) = Q^{II}(T_0)$ und mit $Q = C \cdot U_C$ erhält man $U_C^I(T_0) = U_C^{II}(T_0)$.

In I gilt:

$$U_a^{I}\left(T_0\right) = U_e^{I}\left(T_0\right) - U_C^{I}\left(T_0\right) = U_0 - U_C^{I}\left(T_0\right) \qquad (11)$$

In II fällt U_e weg $(t \geq T_0)$, also gilt:

$$U_e^{II}\left(T_0\right) = U_C^{II}\left(T_0\right) + U_R^{II}\left(T_0\right) = 0 \text{ also } U_R^{II}\left(T_0\right) = -U_C^{II}\left(T_0\right) = -U_C^{I}\left(T_0\right)$$

(→ Stromrichtung kehrt um!)

außerdem

$$U_a^{II}\left(T_0\right) = U_R^{II}\left(T_0\right)$$

zusammen also:

$$\begin{aligned} U_a^{II}\left(T_0\right) &= -U_C^{I}\left(T_0\right) \\ &\overset{(11)}{=} U_a^{I}\left(T_0\right) - U_0 \\ &\overset{(9)}{=} U_0 e^{-\frac{T_0}{\tau}} - U_0 \\ &= -U_0\left(1 - e^{-\frac{T_0}{\tau}}\right) \end{aligned}$$

Diese Randbedingung in die Gesamtlösung (10) eingesetzt ergibt:

$$U_a^{II}\left(t = T_0\right) = K \cdot e^{-\frac{T_0 - T_0}{\tau}} = K \cdot e^0 = K$$

$$\Rightarrow K = -U_0\left(1 - e^{-\frac{T_0}{\tau}}\right)$$

Zusammen erhält man also für die Gesamtlösung im Bereich II

$$\Rightarrow \quad U_a^{II}\left(t > T_0\right) = K \cdot e^{-\frac{t-T_0}{\tau}} = \underline{\underline{-U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{T_0}{\tau}}\right) \cdot e^{-\frac{t-T_0}{\tau}}}}$$

Nun setzen wir noch die Bedingung für die Fläche ein:

$$U_0 = \frac{A}{T_0} \qquad (12)$$

und ermitteln den Grenzwert:

$$\lim_{T_0 \to 0} U_a^{II} = \lim_{T_0 \to 0} \underbrace{\left(-\frac{A}{T_0}\right)}_{-\infty} \underbrace{\left(1 - e^{-\frac{T_0}{\tau}}\right) e^{-\frac{t-T_0}{\tau}}}_{0}$$

$$\overset{L'hospital}{=} \lim_{T_0 \to 0} -\frac{A}{1} \cdot \left(\frac{1}{\tau} e^{-\frac{T_0}{\tau}} e^{-\frac{t-T_0}{\tau}} + \left(1 - e^{-\frac{T_0}{\tau}}\right) e^{-\frac{t-T_0}{\tau}} \cdot \frac{1}{\tau} \right) = \lim_{T_0 \to 0} \left(-\frac{A}{\tau} \cdot e^{-\frac{t-T_0}{\tau}} \right)$$

$$= -\frac{A}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

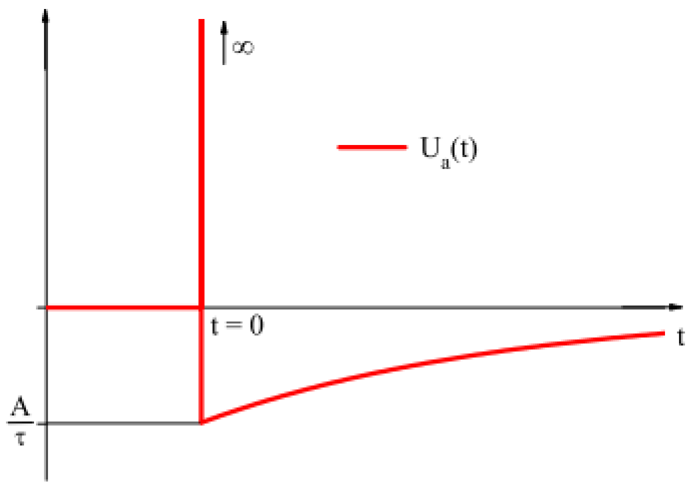
Dies ist die Impulsantwort für $t > T_0$ bzw. $t > 0$.

Für den linken Grenzwert gilt für $t = T_0 \to 0$:

$$\lim_{t = T_0 \to 0} U_a^I \underset{(9)}{=} \lim_{t = T_0 \to 0} U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \underset{(12)}{=} \lim_{t = T_0 \to 0} \frac{A}{\underbrace{T_0}_{\to\infty}} \cdot \underbrace{e^{-\frac{t}{\tau}}}_{1} = \infty \quad \text{(Kurzschluss im Kondensator!)}$$

$\Rightarrow$ Die mathematische Darstellung für $t \geq 0$ mit δ-Distribution (s. Vorlesung) lautet:

$$U_a(t \geq 0) = A \left(\underset{\substack{\infty \text{ bei } t=0 \\ 0 \text{ bei } t \neq 0}}{\underset{\uparrow}{\delta(t)}} - \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$



e) Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Ableitung der Übergangsfunktion $h(t) = U_a(t)/U_0$ aus der Sprungantwort $U_a(t)$ aus Aufgabe b)

Lösung

Übergangsfunktion $h(t) = \dfrac{U_a(t)\,\text{aus Sprungantwort (8)}}{U_0} = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ e^{-\frac{t}{\tau}} & t > 0 \end{cases}$

Ableitung und Darstellung durch δ-Distribution:

$$\left.\begin{array}{ll} t < 0 & \dfrac{dh}{dt} = 0 \\ t = 0 & \underbrace{\dfrac{dh}{dt} = \infty}_{=\text{ Steigung am Sprung!}} \\ t > 0 & \dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \end{array}\right\} \quad \frac{dh}{dt}(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \infty \text{ bei } t=0 \\ 0 \text{ bei } t\neq 0}}{\delta(t)} - \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U_a(\text{Impulsantwort})}{A} = \text{Gewichtsfunktion } g(t)$$

$\boxed{\dfrac{dh}{dt}(t) = g(t)}$ Dieser Zusammenhang gilt generell!