



Prof. Dr.-Ing. habil. Dipl.-Phys. Andreas Malcherek
Fakultät für Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften
Institut für Wasserwesen (Hydromechanik und Wasserbau)
Werner-Heisenberg-Weg 39, 85577 Neubiberg

**Experimentelle Verifikation der auf plötzlicher Aufweitung
angewandten Impulsbilanz sowie der numerischen Simulation**

Bachelorarbeit

Rafael Giersdorff

München 2021

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	I
Tabellenverzeichnis	III
Abbildungsverzeichnis	IV
Symbolverzeichnis	VI
1. Einleitung	1
1.1 Motivation und Hinführung zum Thema	1
1.2 Einführung in die Thematik	2
2. Grundlagen	2
2.1 Begrifflichkeiten	2
2.2 Druckkraft auf eine beliebige Fläche	6
2.3 Die Kontinuitätsgleichung	7
3. Theoretische Betrachtungen.....	8
3.1 Massenbilanz.....	8
3.1.1 Offene Systeme.....	10
3.2 Impulsbilanz.....	10
3.2.1 Abgeschlossene Systeme	11
3.3 Bernoulli-Gleichung.....	12
3.4 Anpassung der Bernoulli-Gleichung an Querschnittsänderungen	14
3.5 Anwendung der Impulsbilanz auf die plötzliche Aufweitung	16
3.5.1 Zusammenhang mit der plötzlichen Verengung	17
4. Der Versuchsstand.....	19
4.1 Versuchsaufbau	19
4.2 Versuchsdurchführung	22
4.2.1 Kalibrierung.....	22
4.2.2 Messung an den Druckmessstellen	24
5. Numerische Simulation.....	25
5.1 Einführung	25
5.2 Die Erhaltungsgleichungen	26

5.3 Die Navier-Stokes-Gleichungen	26
5.4 Turbulenzmodelle	28
5.5 Diskretisierung	29
5.5.1 Randbedingungen	29
5.5.2 Konsistenz.....	30
5.5.3 Stabilität.....	30
5.5.4 Konvergenz.....	30
5.5.5 Finite-Volumen-Methode FVM.....	30
5.6 Das Rechennetz.....	31
5.6.1 Strukturierte Rechennetze.....	31
5.6.2 Unstrukturierte Rechennetze.....	32
5.7 Lösungsverfahren.....	32
6. Numerische Simulation anhand der plötzlichen Aufweitung	33
6.1 Geometry.....	33
6.2 Mesh.....	34
6.2.1 Inflation.....	35
6.2.2 Sizing	36
6.3 Setup.....	37
6.3.1 Basic Settings.....	37
6.3.2 Fluid Models	38
6.4 Solution	39
6.5 Results	40
6.6 Fehler	41
7. Auswertung der Ergebnisse.....	42
7.1 Entstehung des maximalen Druckunterschiedes	42
7.1.1 Experimentelle Ergebnisse.....	42
7.1.2 Ergebnisse aus der Impulsbilanz.....	43
7.1.3 Ergebnisse aus numerischer Simulation	45
7.1.4 Gegenüberstellung und Vergleich der Ergebnisse	52
7.1.4.1 Vergleich der experimentellen Ergebnisse mit der Impulsbilanz.....	53
7.1.4.2 Vergleich der experimentellen Ergebnisse mit der numerischen Simulation.....	55
7.1.5 Vergleich der Bernoulli-Gleichung mit der nicht idealisierten Impulsbilanz und den Messergebnissen.....	57

7.2 Entfernungsabhängige Druckverhalten	60
8. Zusammenfassung und Ausblick	66
8.1 Zusammenfassung	66
8.2 Ausblick	67

Literaturverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Experimentelle Messergebnisse	42
Tabelle 2: Ergebnisse der Impulsbilanz	44
Tabelle 3: Simulationsergebnisse entlang der Wand und Rohrachse.....	46
Tabelle 4: Gegenüberstellung der Ergebnisse	52
Tabelle 5: Vergleich Experimentelle Ergebnisse – Ergebnisse Impulsbilanz.....	54
Tabelle 6: Vergleich Experimentelle Ergebnisse - Numerische Ergebnisse Rohrachse	55
Tabelle 7: Vergleich Experimentelle Ergebnisse - Numerische Ergebnisse Wand	56
Tabelle 8: Ergebnisse aus der Bernoulli-Gleichung mit Borda-Carnotschem Zusatz.....	57
Tabelle 9: Vergleich Experimentelle Ergebnisse – Ergebnisse Bernoulli mit Borda-Carnotschem Zusatz	58
Tabelle 10: Vergleich maximale Druckdifferenzen Experimentelle Ergebnisse - Numerische Ergebnisse	62

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Kontinuitätsbeziehung.....	7
Abbildung 2: Volumenstrom durch eine Fläche	9
Abbildung 3: Kontrollvolumen mit Ablösungszonen	15
Abbildung 4: Rückstaudruck p_r	17
Abbildung 5: Vollständiger Versuchsaufbau, Ansicht entgegen der Strömungsrichtung.....	19
Abbildung 6: Versuchsstand Seitenansicht	21
Abbildung 7: Draufsicht auf das Kontrollvolumen	21
Abbildung 8: Anschluss der drei Messstellen	21
Abbildung 9: Ausgleichsgerade	23
Abbildung 10: Beurteilungsparameter Matlab	23
Abbildung 11: Neues Ablaufschema einer Simulation	25
Abbildung 12: Fertiges Ablaufschema einer Simulation	25
Abbildung 13: FV-Netz.....	31
Abbildung 14: FE-Netz	31
Abbildung 15: Ansys Geometrie	34
Abbildung 16: Standardnetz.....	34
Abbildung 17: Angepasstes Netz mit Inflation	36
Abbildung 18: Face Sizing Aufweitungsebene	36
Abbildung 19: Draufsicht Selection Plane	37
Abbildung 20: Setup.....	38

Abbildung 21: Solution	39
Abbildung 22: Solution Iterationsdetails.....	39
Abbildung 23: Contourplot Geschwinidgkeitsausbreitung	40
Abbildung 24: Ergebnisse der Impulsbilanz	44
Abbildung 25: Druckverlauf entlang der Wand	45
Abbildung 26: Druckverlauf entlang der Rohrachse.....	45
Abbildung 27: Druckverläufe entlang der Wand	47
Abbildung 28: Druckverläufe entlang der Rohrachse	48
Abbildung 29: Geschwindigkeit entlang der Rohrachse	49
Abbildung 30: Geschwindigkeitsverlauf entlang der Wand	49
Abbildung 31: Bernoulli-Effekt	50
Abbildung 32: Stromlinien	50
Abbildung 33: Geschwindigkeitsvektoren	51
Abbildung 34: Aspect Ratio	51
Abbildung 35: Skewness	51
Abbildung 36: Experimentelle Ergebnisse - Impulsbilanz.....	55
Abbildung 37: Experimentelle Ergebnisse - Numerische Ergebnisse.....	57
Abbildung 38: Halb-Logarithmische Darstellung der Differenzdruckverläufe	59
Abbildung 39: Ausbildung eines Plateau-Wertes entlang der Wand	60
Abbildung 40: Ausbildung eines Plateau-Wertes entlang der Rohrachse.....	61
Abbildung 41: Druckverlauf Simulation 10l/s	63

Abbildung 42: Gradientenverlauf Simulation 10l/s	63
Abbildung 43: Positionen der Druckmaxima	65
Abbildung 44: Contourplot der Druckverteilung entlang des Rohres.....	66

Symbolverzeichnis

Formelzeichen	Bedeutung	Einheit
η	Dynamische Viskosität	$kg/(s * m)$
ν	Kinematische Viskosität	m^2/s
ρ	Dichte	kg/m^3
Moder m	Masse	kg
D oder d	Durchmesser	m
d_{hyd}	Hydraulischer Durchmesser	m
Re	Reynoldszahl	-
A	Fläche	m^2
k_s	Äquivalente Sandrauheit	m
λ	Reibungsbeiwert	-
Q	Volumenstrom/Durchfluss	m^3/s
Ω	Volumen	-
t	Zeit	s
p	Druck	Pa oder $kg/(m * s^2)$
\vec{n}	Normaleinheitsvektor	-
F	Kraft	N oder $(kg * m)/s^2$
v	Geschwindigkeit	m/s

\vec{I}	Impuls	$N * s$ oder $(kg * m)/s$
\vec{a}	Beschleunigung	m/s^2
\vec{g}	Erdbeschleunigung	m/s^2
F_R	Reibungskraft	N oder $(kg * m)/s^2$
W	Arbeit	$N * m$ oder $(kg * m^2)/s^2$
s	Strecke	m
z	Geodätische Höhe	m
h_v	Verlusthöhe	m
L	Länge	m
ζ	Lokaler Verlustbeiwert	-
c_p	Druckkoeffizient	-
$\beta_{1,2}$	Aufweitungskoeffizient	-
σ_{inv}	Inverses Flächenverhältnis	-
I	Stromstärke	A
U	Spannung	V oder $(kg * m^2)/(A * s^2)$
τ_{ji}	Spannungstensor	-
σ	Standardabweichung	-
μ	Mittelwert	-
$e_{\Delta p_i}$	Druckabweichung	%

1. Einleitung

1.1 Motivation und Hinführung zum Thema

Im Jahr 1687 veröffentlicht der englische Naturwissenschaftler **Isaac Newton** (1642-1726) sein Werk ‚*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*‘ [1], in dem er drei grundlegende physikalische Axiome („Axiomata Sive Leges Motus“ [2]) definiert. Er errichtet damit das Fundament für jegliche kinematischen Zusammenhänge [3, S. 5–6]

„*Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimatur*“ [2] beschreibt Newton das zweite newtonsche Axiom, welches heute auch als Impulssatz bekannt ist. Mit den damals von Newton noch in Worten ausgedrückten Bewegungsgrundsätzen werden später von bedeutenden Mathematikern und Physikern bewegende Fortschritte auf zahlreichen Gebieten der theoretischen Mechanik erzielt und auch mit Formeln bewiesen. Unter anderem setzte **Leonhard Euler**[4, S. 12], [5] (1707-1783) mit seinen bis heute bekannten Eulerischen Gleichungen einen Meilenstein für das Verständnis kinematischer Zusammenhänge aber auch **Jean-Baptiste le Rond d’Alembert** [3, S. 68–69] (1717-1783) entwickelte das d’Alembertsche Prinzip welches als „Vorläufer der Energieerhaltung“ [6] gesehen wird.

Vor allem aber der Schweizer Gelehrte **Daniel Bernoulli** (1700-1782) beschreibt in seinem Werk ‚*Hydrodynamica*‘ [7] das Verhalten von Fluiden durch Rohrleitungen. Seine als „Bernoulli Gleichung“ bekannte Formulierung zur Energieerhaltung ist prägend für die „Anwendung auf nahezu alle Phänomene der Hydromechanik“[7, S. 12]

Aber nicht nur Euler, sondern auch Bernoulli gehen in ihren Arbeiten bereits auf zylindrische Körper ein. Die Geschichte von zylindrischen Körpern zu Wasserbeförderung reicht bereits bis zu der antiken Hochkulturen der Römer zurück [8]. Die als *Cloaca Maxima* bekannte römische Kanalisation hat ihren Ursprung in einem überbauten, ausgetrockneten Bachlauf. Die Kanalisation wuchs durch immer mehr neue Kanalarne. Dabei wurden bereits kreisförmige Rohre benutzt, in denen sich Feststoffe nicht so leicht absetzen können. Herrenhäuser, Paläste und die wichtigsten sozialen Einrichtungen des gesellschaftlichen Lebens wurden an die *Cloaca Maxima* angeschlossen [8].

Auf der anderen Seite des Wassertransportes standen die Aquädukte. Nach bewehrter Verwendung von Steinzeug für diese römischen Frischwasserleitungen, verwendete man für kleinere Zuläufe bereits Blei oder Bronze. In der frühen Neuzeit entdeckte man durch die kriegstechnischen Innovationen der Artillerie angetrieben, die Herstellung von Gussrohren [9]. Während der industriellen Revolution zur Mitte des 19. Jahrhunderts wurden in Deutschland die ersten Rohrleitungen aus Beton verbaut, woraufhin auch das Kanalnetz in Deutschland ausgebaut wurde. Zeitgleich begann man allerdings auch mit dem Transport und Speicherung von Gasen in zylinderförmigen Körpern [8]. Während im frühen 20. Jahrhundert der Ausbau und Wiederaufbau der Trink- und Abwasserleitungssysteme nach dem zweiten Weltkrieg im Vordergrund stand, beschäftigt man sich heutzutage im städtebaulichen Umfeld mit dem Erhalt und der Sanierung von Rohrsystemen. Häufig verwendete Werkstoffe sind u.a. Edelstahl,

Kupfer oder PVC [8]. Um Rohrleitungssysteme an ihre Umgebung anpassen zu können, ist es sehr häufig notwendig diese entsprechend zu dimensionieren. Das 21. Jahrhundert zeichnet sich durch intensive Forschung und rasanten Fortschritt der Technik aus und bietet somit immer wieder neue Einsatzgebiete für Rohrleitungssysteme in verschiedenen Ausführungen. Nicht selten müssen Querschnittsänderungen verbaut und berücksichtigt werden. Die Aufgabe eines heutigen Wasserbauers ist es die mechanischen Hintergründe zu verstehen und anwenden zu können. Während für Querschnittsverengungen in der Literatur bereits umfangreiches Material zu finden ist, findet man zu Querschnittsaufweitungen deutlich weniger Daten.

1.2 Einführung in die Thematik

Im Rahmen dieser Bachelorarbeit soll die Strömung in Folge einer plötzlichen Rohraufweitung untersucht werden. Bisher wurde hierfür die Bernoulli-Formel mit dem Zusatz des Borda-Carnotschen Stoßverlustes verwendet. In dieser Arbeit wird ein neuer Ansatz zur Berechnung des Differenzdruckes Δp [10] in Folge der Querschnittsänderung basierend auf der nicht idealisierten Impulsbilanz mit experimentellen und numerischen Messergebnissen verglichen und verifiziert. Zur Bestimmung der experimentellen Ergebnisse wird im Labor des Institutes für Hydromechanik und Wasserbau an der Universität der Bundeswehr München ein Versuchsstand eingerichtet. Die numerischen Ergebnisse werden mittels Ansys ermittelt. Neben der Bestimmung und dem Vergleich der Ergebnisse von Δp , wird auch der Ort dieses maximalen Differenzdruckes sowie der maximale Druckgradient bestimmt. Maßgebende Quellen zur Auswertung der Ergebnisse sind die Wissenschaftler **Dr. H. C. Schuett** [11], **N. J. Lipstein** [12] und **W. H. Archer** [13].

2. Grundlagen

2.1 Begrifflichkeiten

In diesem Unterkapitel werden grundlegende und in dieser Arbeit häufig vorkommende Begrifflichkeiten erläutert. Die entsprechenden Referenzen, welche die Grundlage der Erläuterung bilden, stehen neben dem jeweiligen Begriff.

Dynamische Viskosität [14, S. 88–90]

Unter der dynamischen Viskosität η [$kg/(s * m)$] versteht man den Widerstand einer Flüssigkeit zu fließen, also die Zähflüssigkeit oder Widerstand gegenüber Scherung. Je höher die Viskosität, desto schlechter fließt eine Flüssigkeit oder ein Stoff. Die Viskosität ist stark massen- und temperaturabhängig.

Kinematische Viskosität [14, S. 88–90].

Die kinematische Viskosität ν [m^2/s] stellt den Quotienten aus der dynamischen Viskosität η und der Dichte ρ eines Fluids dar. Sie ist im Gegensatz zur dynamischen Viskosität massenunabhängig.

Newtonsche Fluide [14, S. 1–5]

Als newtonsche Fluide bezeichnet man Flüssigkeiten oder Gase, die einen (näherungsweise) linearen Zusammenhang zwischen Verzerrungsgeschwindigkeit/Schergeschwindigkeit und dem damit verbundenen Widerstand haben, Scherspannung. Das bedeutet, dass bei zunehmender Schergeschwindigkeit die Viskosität eines Fluids zunimmt. Das bekannteste newtonsche Fluid ist Wasser.

Inkompressible Fluide [3, S. 211]

Inkompressible Fluide sind durch eine konstante Dichte gekennzeichnet. Dies führt zu erheblichen Vereinfachungen in der Hydrodynamik, da bei allen Massengleichungen durch die Division der Dichte die Materialeigenschaft wegfällt und man statt einer Masse ein Volumen betrachtet.

Dichte [14, S. 11–14].

Unter Dichte ρ [kg/m^3] versteht man das Verhältnis der Masse M zu dem Volumen V eines Fluids. Die Dichte von Wasser, einem newtonschen Fluid, liegt bei 25°C bei 997 [kg/m^3].

Hydraulischer Durchmesser [3, S. 87],[4, S. 67]

Da es sich in der Strömungsmechanik nicht immer um kreisförmige Querschnitte handelt, führte man den hydraulischen Durchmesser d_{hyd} [m] ein. Dieser setzt sich aus der durchströmten Fläche A und dem Umfang U der Fläche zusammen:

$$d_{hyd} = \frac{4A}{U} \quad (2.1)$$

Die Reynoldszahl [3, S. 371–374], [15], [16, S. 217–219]

Der britische Mathematiker und Physiker **Osborne Reynolds** [17] (1842-1912) prägte die Turbulenztheorie der Hydromechanik durch seine Erkenntnisse über den Übergang einer laminaren zu einer turbulenten Strömung. Lange war man sich uneinig, ob der Strömungswiderstand innerhalb einer Rohrleitung einen linearen oder quadratischen Verlauf folgt, da Theorie und Praxis sich hier widersprachen. Durch die dimensionslose Reynoldszahl

Re [-] konnte er darstellen, dass ab einer bestimmten Geschwindigkeit Turbulenzen entstehen und es sich folglich um eine laminare oder turbulente Strömung handelt:

$$Re = \frac{v * d_{hyd}}{\nu} \quad (2.2)$$

Laminare Strömungen [3, S. 371–374], [15], [16, S. 217–219]

Man spricht von einer laminaren Strömung, wenn sich in einer Übergangsschicht mit zwei unterschiedlichen Strömungsgeschwindigkeiten, die Flüssigkeitsteilchen weiterhin parallel zur Strömungsrichtung bewegen und somit keine Durchmischung stattfindet. Hier steigt der Strömungswiderstand linear an:

$$Re \leq 2300 \quad (2.3)$$

Turbulente Strömungen [3, S. 371–374], [15], [16, S. 217–219]

Man spricht von turbulenten Strömungen, wenn ab der Übergangsschicht eine Verwirbelung der Flüssigkeitsteilchen stattfindet. Ihre Bahnlinien verlaufen nun „wild“ zur Strömungsrichtung. Der Strömungswiderstand hat hier nun einen quadratischen Verlauf.

$$Re > 4000 \quad (2.4)$$

Zwischen 2300 und 4000 spricht von einem Übergangsbereich, in dem die Strömung zunehmend instabiler wird.

Äquivalente Sandrauheit [3, S. 380–382], [16, S. 219–221]

Um nachvollziehen zu können wie der Reibungsbeiwert λ zu dem Druckabfall innerhalb des Rohres beiträgt, wird die Güte der Rohrwand durch die äquivalente Sandrauheit k_s [mm] beschrieben. Je nach Material und Alter variieren die Eigenschaften von Rohrleitungen.

Reibungsbeiwert [3, S. 378–388], [18, S. 217–220]:

Der Reibungsbeiwert λ definiert den Druckabfall innerhalb der Rohrleitung. Sie ist von der Wandrauheit k_s und dem hydraulischen Durchmesser d_{hyd} abhängig. Im laminaren Bereich nimmt λ folgende Form an:

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (2.5)$$

Im Übergangsbereich der laminaren zur turbulenten Strömung:

$$\lambda = \frac{0.316}{Re^{\frac{1}{4}}} \quad (2.6)$$

Abschließend ergibt sich für den turbulenten Bereich nach dem Ansatz von Colebrook-White die folgende Formulierung:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}} + \frac{ks}{3.71d_{hyd}} \right) \quad (2.7)$$

Volumenstrom [3, S. 80]

Als Volumenstrom wird in der Fluidmechanik der Durchfluss Q [m^3/s] bezeichnet. Damit wird der das Volumen pro Zeit beschrieben, der durch eine Fläche A fließt. Genauer wird dies in Abschnitt 2.3 behandelt.

$$Q = \dot{V} = \frac{dV}{dt} = vA \quad (2.8)$$

Stationäre Strömungen [4, S. 18]:

Unter stationären Strömungen versteht man zeitunabhängige Strömungen. Das bedeutet, dass sich für das betrachtete Kontrollvolumen dM/dt und dI/dt 0 sind. Im betrachteten System unterliegen die Massenbilanz und die Impulsbilanz, Kapitel 3.1 und 3.2, keiner zeitlichen Änderung.

Instationäre Strömungen [4, S. 18]:

Anders als bei stationären Strömungen, sind hier die Eingangsparameter, wie Druck und Geschwindigkeit sehr wohl von der Zeit abhängig. dM/dt und dI/dt sind hier ungleich 0.

Kontrollvolumen [4, S. 17–18]

Als Kontrollvolumen bezeichnet man in der Strömungsmechanik ein Gebiet Ω , in welchem Masse und Impuls berechnet werden können. Je nach Problematik gilt es das Kontrollvolumen so zu wählen, dass mittels der Randbedingungen eine Lösung gefunden werden kann.

2.2 Druckkraft auf eine beliebige Fläche

Die Druckkraft auf eine beliebige Fläche wird in diesem Unterkapitel auf Basis der Referenzen [3, S. 76, 93], [4, S. 134–136], [18] erläutert.

Anders als in der Statik, weisen die Normaleinheitsvektoren \vec{n} in der Hydrodynamik, immer aus dem Kontrollvolumen heraus. Der Druck wirkt jedoch senkrecht auf eine Fläche und in das Kontrollvolumen hinein, sodass die Wirkung des Druckes durch ein negatives Vorzeichen „umgedreht“ werden muss. Dieser Aspekt ist besonders wichtig, um die Vorzeichen in den folgenden Formeln nachvollziehen zu können. Allgemein ist die physikalische Formel für Druck bekannt als:

$$p = \frac{F}{A} \rightarrow F = p * A \quad (2.9)$$

Diese eher simple Beschreibung der entstehenden Kraft aus der Multiplikation von Druck und Fläche gilt es jedoch für hydrodynamische Problemstellungen zu verallgemeinern. Man spricht hier von einer Flächenkraft \vec{F} . Bei Betrachtung eines Kontrollvolumens Ω definiert man dessen Rand als $\partial\Omega$. Durch Integration über die Fläche $\partial\Omega$ und unter Verwendung des Normaleinheitsvektors erhält man folgende Gleichung:

$$\vec{F} = - \int_{\partial\Omega} p \vec{n} dA \quad (2.10)$$

Das negative Vorzeichen ergibt sich dadurch, dass der Normaleinheitsvektor \vec{n} senkrecht aus dem Kontrollvolumen heraus wirkt, der Druck jedoch entgegengesetzt. Flächenkräfte sind fast immer Kontaktkräfte, die nur auftreten, wenn andere Moleküle (hier Wasser) mit dem Körper in Kontakt treten. Je nach Randbedingungen ist es notwendig die Oberfläche oder das Volumen eines Körpers zu betrachten, sodass das Oberflächenintegral in ein Volumenintegral mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes umgewandelt werden muss:

$$\vec{F} = - \int_{\partial\Omega} \vec{n} p da = \int_{\Omega} \text{grad} p d\Omega \quad (2.11)$$

Kann die Oberfläche in Teilflächen aufgeteilt werden, auf denen der Druck nahezu konstant ist, wirkt die Druckkraft als Summe der Drücke über i Teilflächen:

$$\vec{F} = - \sum_i \vec{n}_i p_i A_i \quad (2.12)$$

2.3 Die Kontinuitätsgleichung

Die Erklärung der Kontinuitätsgleichung beruht auf den Referenzen [7, S. 10, 49–53], [18, S. 210-211].

Der italienische Gelehrte **Benedetto Castelli** formuliert 1628 in seinem Werk *Della misura dell' aqve correnti`* [19] (Deutsch: Die Vermessung des fließenden Wassers), die Kontinuität des Durchflusses eines inkompressiblen Fluids innerhalb einer Strömung. Die Kontinuität des Fluids setzt $Q = const$ voraus. Der Durchfluss ändert sich nicht, lediglich die Querschnittsfläche oder die Geschwindigkeit. Er formulierte somit den Zusammenhang des Durchflusses mit Strömungsgeschwindigkeit und Querschnitt und hielt somit fest:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (2.13)$$

Was Castelli damals in seinem Werk, „*Della misura dell' aqve correnti`*“ [19], noch in Worten formuliert hatte, ist heute als die Kontinuitätsgleichung der Hydromechanik bekannt. Die Kontinuitätsbeziehung einer Rohrleitung mit konischer Querschnittsänderung ist in Abbildung 1 dargestellt. Dabei ist die Fläche A_1 , kleiner als Fläche A_2 . Nach Formel 2.13, wird die Geschwindigkeit v_1 somit größer als die Geschwindigkeit v_2 sein um einen konstanten Durchfluss Q zu halten.

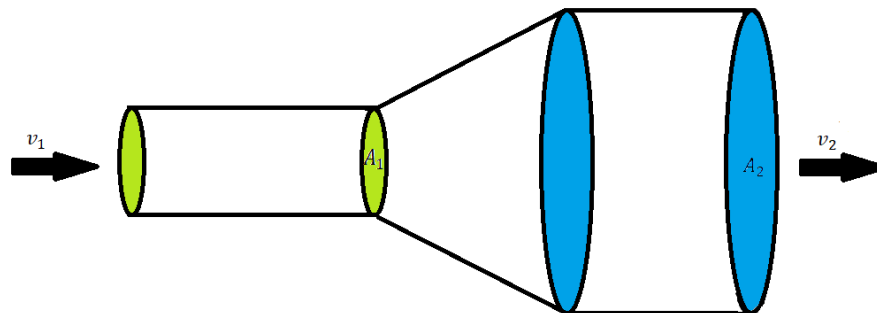


Abb. 1: Kontinuitätsbeziehung

3. Theoretische Betrachtungen

3.1 Massenbilanz

Die in diesem Unterkapitel beschriebene Herleitung und Erläuterung der Massenbilanz basiert auf den Referenzen [3, S. 197–206], [20], [21].

Um das System des Wasserkreislaufes auf der Erde zu verstehen, ist es wichtig den Übergang des Wassers zwischen den einzelnen Speichern zu betrachten. Dieses große Bild des Wasserkreislaufes lässt sich auf jedes beliebige hydrodynamische System im Wasserbau übertragen, wie Speicher, Turbinen oder Rohrleitungen. Den Massenfluss zwischen einzelnen Komponenten solcher Systeme gilt es mathematisch darzustellen und nachzuvollziehen.

Der Zusammenhang zwischen Querschnittsfläche und Geschwindigkeit bei inkompressiblen Fluiden nach Castelli kann umgeformt dargestellt werden als:

$$\frac{A_{ein}}{A_{aus}} = \frac{v_{ein}}{v_{aus}} \quad (3.1)$$

Die Querschnittsfläche verhält sich reziprok zur Geschwindigkeit. Dies lässt sich besonders gut anhand der plötzlichen Aufweitung darstellen. Im Teil der engeren Rohrleitung mit entsprechendem kleinerem Querschnitt ist die Geschwindigkeit größer als in der breiteren Rohrleitung nach der Verengung. Die Gleichung 3.1 zur Massenerhaltung lässt sich gut an Rohrströmungen, idealen Leitungen mit einem Eingang und Ausgang, erklären. Sie kann allerdings nicht pauschalisiert werden, da diese davon ausgeht, dass in dem betrachteten Kontrollvolumen zu jeder Zeit dasselbe Volumen vorhanden ist. Anders als bei der Aufweitung, handelt es sich beispielsweise bei einem Reservoir um ein instationäres Problem und ist somit nicht anwendbar.

Die Massenänderung pro Zeit, \dot{m} , lässt sich für ein stationäres System mit einem Eingang und Ausgang wie folgt beschreiben:

$$\frac{dM}{dt} = \dot{m} = \dot{m}_{ein} + \dot{m}_{aus} \quad (3.2)$$

Die Massenerhaltung in der Strömungsmechanik besagt, dass durch die sich bewegenden Massenströme innerhalb einer Strömung \dot{m} konstant ist. In der Mathematik steht der Punkt über der Variablen für die zeitliche Ableitung ($x/\Delta t$). Ändert sich die Masse innerhalb des Kontrollvolumens nicht, kann $dM/dt = 0$ gesetzt werden. Die Masse entspricht dem Produkt aus der Dichte ρ und dem Volumen V . In der Strömungsmechanik wird für den Volumenstrom der Parameter Q eingeführt:

$$Q = \dot{V} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (3.3)$$

Der Massenfluss mit einer bestimmten Dichte kann dann dargestellt werden als:

$$\dot{m} = \rho_{ein} \dot{V} = \rho_{ein} Q \quad (3.4)$$

Bei idealen Leitungen ändert sich die Masse nicht, wobei dies in der Realität sehr selten zu finden ist. Auch bei der Aufweitung handelt es sich streng genommen nicht um eine ideale Leitung, da das Plexiglas der Rohleitung dehnbar ist und somit bei Druckschwankungen Massenänderungen hervorgerufen werden können. Bei einem konstanten Druck ist dies nicht der Fall. Die Vereinfachung der Annahme einer idealen Leitung ist jedoch naheliegend, womit gilt:

$$\dot{m}_{ein} = -\dot{m}_{aus} = \rho_{ein} Q_{ein} = -\rho_{aus} Q_{aus} \quad (3.5)$$

Um die Massenbilanz abschließend aufstellen zu können wird das durch eine rechteckige Fläche strömende Volumen betrachtet.

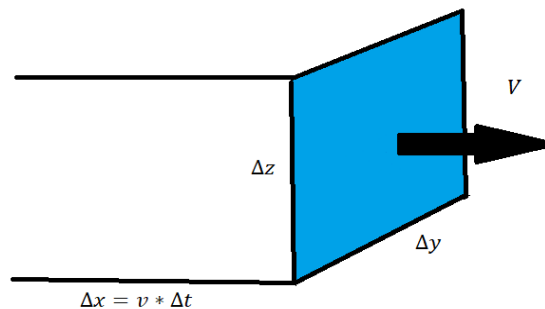


Abb. 2: Volumenstrom durch eine Fläche [20]

Betrachtet man einen Volumenstrom der durch eine aufgespannte Fläche $A = \Delta y * \Delta z$ strömt, so ist das durchfließende Volumen $V = A * \Delta x = A * v * \Delta t$. Für den Massenfluss ergibt sich dann folgende Formulierung:

$$\dot{m} = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho A v \quad (3.6)$$

Um die Massenbilanz verallgemeinern zu können, muss noch der Normaleinheitsvektor berücksichtigt werden, damit der komplette dreidimensionale Raum abgebildet werden kann und nicht nur der Fall, dass die Fläche A senkrecht zur Strömung steht. Da dieser immer senkrecht aus dem Kontrollvolumen zeigt wird durch das negative Vorzeichen ein Einströmen und Ausströmen klar geregelt.

$$\frac{dM}{dt} = - \sum_i \rho_i \vec{v}_i \cdot \vec{n}_i A \quad (3.7)$$

3.1.1 Offene Systeme [4, S. 17,18]

Als offene Systeme bezeichnet man Räume, die Masse, Energie und Gravitation mit ihrer Umwelt austauschen. In der Strömungsmechanik sind nahezu alle Probleme als offene Systeme zu betrachten, und somit auch das der plötzlichen Aufweitung. Hierbei findet ein Massenfluss \dot{m} statt, wenngleich es auch keine zeitliche Veränderung der Masse gibt $dM/dt = 0$.

3.2 Impulsbilanz

Die Referenzen [3, S. 222, 229–234], [4, S. 134–136], [10], [16, S. 213–214], [22]–[24] dienen zur Herleitung und Erklärung der Impulsbilanz aus diesem Unterkapitel, welches das Fundament zum Verständnis der nicht idealisierten Impulsbilanz bildet.

Eine der ältesten und wichtigsten Gleichungen zur Beschreibung der Kinematik ist die Impulsbilanz. Bereits Newton erkannte 1687, dass es sich bei einem Impuls um das Produkt einer bewegten Masse m mit der Geschwindigkeit \vec{v} handelt:

$$\vec{I} = m\vec{v} \quad (3.8)$$

Hierbei handelt es sich um einen Vektor, der sich in die drei Raumkomponenten (x, y, z) aufteilt. Newton beschreibt nun mit seinem Trägheitsgesetz, „dass die Impulsänderung die Summe Kraftwirkung ist“ [22].

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \quad (3.9)$$

Dieses allgemeingültige Gesetz lässt sich nun durch Ersetzen von \vec{F}_{ges} durch $\vec{I} = m\vec{v}$ und Anwenden der Produktregel darstellen als:

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt} \quad (3.10)$$

Handelt es sich bei dem System um ein Objekt mit unveränderlicher Masse, so lässt sich Gleichung 3.9 nach Newtons zweitem Axiom [2] zusammenfassen zu:

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \rightarrow \vec{F} \quad (3.11)$$

Dabei ist die Geschwindigkeit \vec{v} nach der Zeit abgeleitet die Beschleunigung \vec{a} . Damit wird deutlich, dass die durch ein Objekt erzeugte Kraft, von ihrer Masse und Geschwindigkeit abhängig sind. Als tragische Alltagsanalogie lässt sich dies anhand eines Verkehrsunfalles gut veranschaulichen, wobei ein aufprallender LKW mehr Kraft ausübt als ein PKW. Beide Objekte haben eine konstante Masse.

Um die Impulsbilanz auf das Problem der plötzlichen Aufweitung anwenden zu können, muss diese entsprechend erweitert werden. Da es sich hier um ein offenes System handelt wird die

Massenänderung durch den Term aus Gleichung 3.6 beschrieben. Des Weiteren werden die auf den Rand angreifenden Druckkräfte durch Gleichung 2.10 addiert. Zusätzlich wirkende Kräfte wie die Gravitationskraft $m\vec{g}$ oder Reibungskraft F_r werden zur Vollständigkeit mitgeführt. Somit erhält die Impulsbilanz die allgemein gültige Form für ein offenes System mit einem Zufluss und einem Abfluss:

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = M\vec{g} + \sum_i \dot{m}_i \vec{v}_i - \int_{\partial\Omega} p\vec{n}dA + F_R \quad (3.12)$$

Von dieser Formulierung ausgehend lassen sich fast alle Problemstellungen der Hydraulik begründen. Da bei der plötzlichen Aufweitung nur die x und y Richtung von Relevanz sind und die Strömung horizontal verläuft, fällt der Gravitationsterm $m\vec{g}$ durch $\vec{g} = [0, 0, -1]$ weg. Auch die Reibungskraft kann vernachlässigt werden, da die Reibungsverluste sehr gering sind. Für den stationären Fall wird $d\vec{I}/dt = 0$ gesetzt. Somit ergibt sich Beschreibung für die plötzliche Aufweitung aus Gl 3.12 zu:

$$0 = - \int_{\partial\Omega} p\vec{n}dA - \int_{\partial\Omega} \rho(vn)v dA \quad (3.13)$$

3.2.1 Abgeschlossene Systeme

Unter einem abgeschlossenen System versteht man ein System das keinerlei Verbindung zu seiner Umgebung oder Umwelt hat [23]. Es findet folglich kein Austausch von Masse, Energie oder Gravitation statt. Ein solches System gibt es in dieser Form nicht. Der Raum des Universums als ganzer könnte ein abgeschlossenes System sein. Es werden deshalb Vereinfachungen für abgeschlossene Systeme getroffen. Wasserkreisläufe oder geschlossene Behälter können als solche idealisiert werden. Es findet keine Änderung des Gesamtimpulses statt. Dies kann auch durch die Impulserhaltung dargestellt werden, in welcher schon Newton die Impulsänderung als Summe der Gesamtimpulses der einzelnen Kräfte \vec{F}_i beschreibt[2], Gleichung 3.9.

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{I}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \quad (3.14)$$

So beschreibt er in seiner „*lex tertia*“ [2] (drittes Gesetz), dass Kräfte immer paarweise auftreten. Zwischen einzelnen Teilchen innerhalb eines abgeschlossenen Systems treten Wechselwirkungen auf, wobei die Kraft eines Teilchens $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ ist. Newton formuliert dies als „*Actioni contrariam semper & æqualem esse reactionem*“ [2] (zu einer Aktion gibt es immer eine gegensätzliche Reaktion).

3.3 Bernoulli-Gleichung

Die in diesem Unterkapitel behandelte Bernoulli-Gleichung wird auf der Basis von den Referenzen [3, S. 273–275], [18, S. 211], [26] hergeleitet.

Ein weiterer Wissenschaftler der Hydrodynamik war der Schweizer Mathematiker und Physiker Daniel Bernoulli (1700–1782), der in seinem Werk *Hydrodynamica* [7] (1738) komplexe Problemstellungen wie die des Ausflusses aus einem Gefäß, mit Formeln und Gleichungen darstellen konnte. Er erkannte die innerhalb einer Strömung herrschende mechanische Energie und ihren Zusammenhang mit Druck, Geschwindigkeit und potenzieller Energie. Er formulierte damit seine Energie-Gleichung, welche als Spezialfall der Impulsbilanz hergeleitet werden kann [4, S. 11–12].

Ausgehend von der Impulsbilanz aus Gleichung 3.12 betrachtet man jetzt die Gleichung für ein Kontrollvolumen, in das weder Masse ein- noch austritt. Dies lässt sich anhand eines sich in der Strömung bewegendes Teilchens mit der unveränderlichen, unteilbaren kleinen Masse M beschreiben. Somit entfällt der Term des Impulsflusses und die Masse ist nicht mehr zeitabhängig. Da $d\vec{l}/dt = dm\vec{v}/dt$ gilt und die Masse als konstant angenommen wird, kann die Masse nun vor die Ableitung geschrieben werden:

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = - \sum_i p_i A_i \vec{n}_i + M \vec{g} \quad (3.15)$$

Es werden somit nur noch die Druckkräfte und die Gravitationskraft betrachtet. Sonstige Kräfte werden ausgeschlossen.

Man betrachte nun den Term zur Beschreibung der Arbeit W . Arbeit ist das Produkt aus Kraft und Weg. Kann sich die Kraft entlang des Weges jedoch ändern, muss man die Formulierung mittels eines Integrals über den Weg $d\vec{s}$ mathematisch korrekt abbilden:

$$W = - \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \vec{F} d\vec{s} \quad (3.16)$$

Nun ist es wichtig, den Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie zu verstehen. Energie ist Arbeit, nur mit einem positiven Vorzeichen. Da sowohl Arbeit als auch Energie von dem Grundsatz Kraft mal Weg ausgehen, wird mithilfe der newtonschen Bewegungsgleichung, Gleichung 3.15 einer Masse M geschrieben zu:

$$\int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} M \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{s} = - \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \sum_i p_i A_i \vec{n}_i d\vec{s} + \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} M \vec{g} d\vec{s} \quad (3.17)$$

Dabei wird der letzte rechte Term, der Gravitationsterm, durch das negative Vorzeichen positiv. Als nächstes wird der Trägheitsterm der linken Seite der Gleichung 3.15 umgeformt. Durch

Anwendung Kettenregel, mit $d\vec{s}/dt = \vec{v}$ und durch die Substitutionsregel wird nicht mehr über x_1 und x_2 integriert, sondern über v_1 und v_2 , womit sich Gleichung 3.17 ergibt zu:

$$\frac{1}{2}M(v_2^2 - v_1^2) = - \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \sum_i p_i A_i \vec{n}_i d\vec{s} + \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} M \vec{g} d\vec{s} \quad (3.18)$$

Somit ergibt sich für den linken Term die Formulierung der kinetischen Energie. Hierbei handelt es sich nun um die Absolutgeschwindigkeiten der Masse M . Dies ergibt sich aus dem Skalarprodukt aus der Geschwindigkeit \vec{v} und dem Ortsvektor \vec{s} . Als nächstes wird der Gravitationsterm umgebaut. Es ergibt sich nach Integration über den Weg folgender Ausdruck, wobei hier x_1 und x_2 zu z_1 und z_2 werden, da \vec{g} nur in Z-Richtung wirkt.

$$\frac{1}{2}M(v_2^2 - v_1^2) = - \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \sum_i p_i A_i \vec{n}_i d\vec{s} + Mg(z_1 - z_2) \quad (3.19)$$

Der somit entstandene Term kann auch als geodätische Energie bezeichnet werden. Auch hier handelt es sich um einen Absolutwert, der aus dem Skalar von \vec{g} und \vec{s} entsteht. Als letztes muss der über die Grenzen aufsummierte Druckterm umformuliert werden. Bei der Formulierung wird nicht ein einfacher Ein- oder Ausgang eines Systems betrachtet, sondern das gesamte Gebiet Ω , weshalb eine Integration über die Gebietsgrenzen nicht möglich ist. Das Volumenintegral kann durch das Oberflächenintegral nach dem Gaußschen Integralsatz ersetzt werden. Mit Hilfe des Integralsatzes kann das Integral über den Rand als Gradient über das gesamte Gebiet Ω dargestellt werden:

$$- \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \int_{\partial\Omega} p \vec{n} dA d\vec{s} = - \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \int_{\Omega} \text{grad } p d\Omega d\vec{s} \quad (3.20)$$

Es wird vereinfacht angenommen, dass das betrachtete, durchströmte Volumen infinitesimal klein ist, und somit keine Druckänderung in diesem stattfindet. Dadurch kann der Gradient vor das Integral über Ω gezogen werden.

$$- \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \int_{\Omega} \text{grad } p d\Omega d\vec{s} = - \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \text{grad } p \int_{\Omega} d\Omega d\vec{s} \quad (3.21)$$

Im letzten Integral steht nun das Integral über das Volumen, was gleichzusetzen mit dem Volumen selbst ist. Der Term wird zu dem konstanten Volum V . Da es sich bei V um einen konstanten Wert handelt, kann es vor das Integral geschrieben werden. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung beschreibt in der Analysis die Beziehung zwischen Ableitung und Integration. Dies lässt sich hier anwenden, da der Druck abgeleitet und über den Weg integriert dem Druck an der Stelle $x_2 - x_1$ entspricht:

$$-\int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} V \operatorname{grad} p \, d\vec{s} = -V \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \operatorname{grad} p \, d\vec{s} = -V(p_2 - p_1) \quad (3.22)$$

Da $-V(p_2 - p_1) = V(p_1 - p_2)$ ist, ergibt sich schließlich folgende Formulierung der Bernoulli-Gleichung:

$$\frac{1}{2}M(v_2^2 - v_1^2) = V(p_1 - p_2) + Mg(z_1 - z_2) \quad (3.23)$$

Die Gleichung erklärt die Energieerhaltung in der Strömungsmechanik und setzt sich aus drei Teilen zusammen, der kinetischen Energie, der Druckenergie und der geodätischen Energie. In der Literatur findet man für die geodätische Energie auch häufig den Begriff der potenziellen Energie. Bringt man nun noch alle Teile mit einem Index eins oder zwei auf eine Seite und teilt durch die Masse fällt sie im kinetischen und geodätischen Teil weg. Im Druckterm steht nun $V/M := \rho$. Somit ergibt sich mit den Umformungen Gleichung 23 zu der Endformel:

$$\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 \quad (3.24)$$

3.4 Anpassung der Bernoulli-Gleichung an Querschnittsänderungen

Als Grundlager zu der Erklärung der Anwendung der Bernoulli-Gleichung an Querschnittsänderungen dienen die Referenzen [3, S. 276–286], [10], [16, S. 217], [26]–[28].

Man ist bei der Anwendung der Bernoulli-Gleichung immer wieder auf Abweichungen mit den tatsächlich gemessenen Ergebnissen gestoßen. Somit formulierte der deutsche Wissenschaftler **Julius Weisbach** 1845 in seinem „Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik“ [29], die Verlusthöhe h_v und integrierte diese in die Bernoulli-Gleichung:

$$z_1 + \frac{1}{2g}v_1^2 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{1}{2g}v_2^2 + \frac{p_2}{\rho g} + h_v \quad (3.25)$$

Die Verlusthöhe durch Reibung enthält den Reibungsbeiwert λ , den hydraulischen Durchmesser d_{hyd} und die Rohrlänge L :

$$h_v = \lambda \frac{L}{d_{hyd}} \frac{v^2}{2g} \quad (3.26)$$

Zur Berücksichtigung weiterer Beiträge zur Verlusthöhe, bspw. durch Querschnittsänderungen werden neben den Reibungsverlusten lokale Verluste ζ_i addiert. Diese sind abhängig von der Geschwindigkeit. Wie in Abbildung 3 dargestellt, wird lediglich der Druck p_1 an der Aufweitung und der Druck p_2 an den Messstellen gemessen. Daher spielen die Reibverluste über die Rohrleitung hier keine große Rolle, sondern lediglich die lokalen Verluste. Nach der Aufweitungsebene erstreckt sich ein Verwirbelungsbereich, die sogenannte Ablösungszone.

Diese werden in Abbildungen 3 und 4 in den dunkelgrauen Bereichen mit geschwungenen Pfeilen dargestellt. Innerhalb dieser Zone finden keine Reibungsverluste statt. Nach dem Ende dieser Zone befindet man sich bereits kurz vor den Messstellen des Druckes p_2 . Somit ergibt sich für die angepasste Bernoulli-Gleichung für die Aufweitung:

$$z_1 + \frac{1}{2g} v_1^2 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{1}{2g} v_2^2 + \frac{p_2}{\rho g} + \zeta \frac{v_2^2}{2g} \quad (3.27)$$

Für eine einzelne Stromlinie wäre die Bernoulli-Gleichung vollkommen ausreichend. Betrachtet man jedoch die Strömung über die Aufweitungsebene führt diese zu verfälschten Ergebnissen. Würde man jedoch dies für eine Vielzahl an Stromlinien machen und den Wert schließlich mitteln, kämen wieder plausible Ergebnisse heraus. In der Regel wird das Ergebnis der Stromlinie auf den gesamten Querschnitt übertragen, was zu den Abweichungen zwischen Bernoulli-Gleichung und Messung führt. Des Weiteren wird bei der Bernoulli-Gleichung für den Druck entlang der Aufweitungswand p_1 angenommen. Diese Vereinfachung kann jedoch zu erheblichen Abweichungen führen.

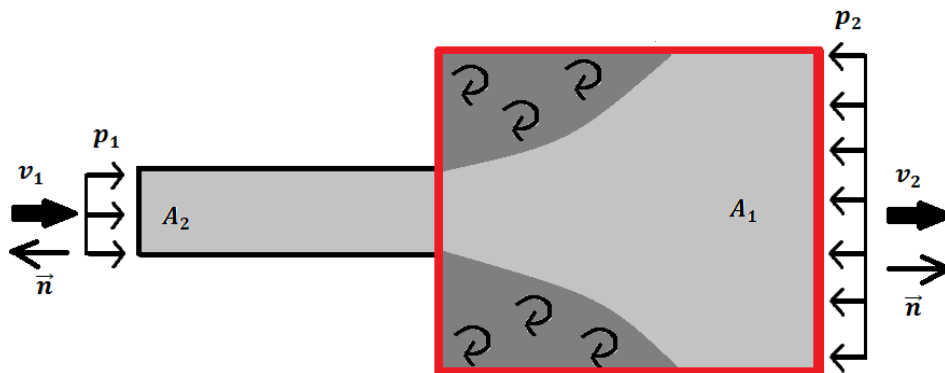


Abb. 3: Kontrollvolumen mit Ablösungszonen [10]

Nun wird die angepasste Bernoulli-Gleichung nach **Borda-Carnot** [30] mit der Impulsbilanz gleichgesetzt. Die Strömung bewegt sich nur horizontal, wodurch die geodätischen Terme vernachlässigt werden können. Bei Bernoulli kürzt sich g schließlich auch raus. Da $v \cdot A = Q$ ist und der Normaleinheitsvektor die Terme jeweils mit dem richtigen Vorzeichen versehen hat, ergibt sich folgende Formulierung nach Umstellen beider Gleichungen nach $p_1 - p_2$, wobei sich ρ und Q letztlich ebenfalls rauskürzen.

$$\frac{1}{2A_2^2} - \frac{1}{2A_2^2} + \frac{\zeta}{2A_2^2} = \frac{1}{A_2 A_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \quad (3.28)$$

Löst man den Term nach ζ auf erhält man: $\zeta = (1 - (A_2/A_1))^2$. Da die Strömung nach dem Aufweitungsbereich einen höheren Druck aufweist, muss die Formel nach $p_2 - p_1$ umgestellt werden um positive Ergebnisse zu erhalten. Dadurch verschiebt sich die Anordnung der Koeffizienten zu $\zeta = ((A_2/A_1) - 1)^2$. Nach Borda-Carnot [30], ist der Stoßverlust definiert durch:

$$p_L = \frac{\rho}{2} v_2^2 \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2 \quad (3.29)$$

Dadurch kann die Bernoulli-Gleichung 3.24 mit dem Verlustterm aus Gleichung 3.29 kombiniert werden zu:

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2} v_2^2 \left(\frac{A_2^2}{A_1^2} - 1 \right) - p_L \quad (3.30)$$

Verschiedene Wissenschaftler haben den Erkenntnissen von Borda und Carnot versucht genauere Verlustbeiwerte zu ermitteln. Neben Archer [13] hat auch Gibson [31] an einem passenden Term geforscht. Gibson passt dabei den Verlustkoeffizienten ζ durch folgende Formulierung an:

$$\zeta = \frac{102.5 + 0.25 \frac{A_2}{A_1} - 2d_1}{100} \quad (3.31)$$

Schuett [11] nimmt diese Formulierung auf, betont jedoch auch, dass ζ stark abhängig von dem Aufweitungsverhältnis A_2/A_1 ist. In der Literatur sind deswegen mehrere Anpassungen an den Stoßverlust nach Borda-Carnot [30] zu finden. Schuett kann zudem in seinen Versuchen die Korrektheit des Borda-Carnotschen Stoßverlusten anhand seiner Messungen belegen, und stellt dabei geringe Abweichungen mit den Messwerten fest, sodass dieser als ausreichend genaue Annäherung akzeptiert ist [10].

3.5 Anwendung der Impulsbilanz auf die plötzliche Aufweitung

Die in diesem Unterkapitel behandelte Anpassung der Impulsbilanz an die plötzliche Rohraufweitung und die den Zusammenhang mit der plötzlichen Rohrverengung wird anhand von Referenz [10] dargestellt und erläutert. Die Impulsbilanz aus Gleichung 3.12 wird nun noch mit einem Normaleinheitsvektor in Strömungsrichtung n_v multipliziert, um nur die in Strömungsrichtung wirkenden Kräfte zu betrachten. Da man von konstanten Druckverteilungen über die Ränder des betrachteten Kontrollvolumens ausgehen kann, wird das Integral des Druckterms durch eine Summe über die Flächen ersetzt. Das Kontrollvolumen erstreckt sich lediglich über die relevanten Bereiche, von der Aufweitung bis zu dem Querschnitt, in dem der Druck maximal ist. Des Weiteren wird das Integral des Impulsflusses aufgeteilt in ein Integral über die Fläche A_1 und über die Fläche A_2 . Dabei ist das Integral über A_1 hier positiv, da der Normaleinheitsvektor aus dem Kontrollvolumen in negative Richtung zeigt, und sich dies mit dem negativen Vorzeichen des Terms selbst als positiv ergibt. Das Integral über die Fläche A_2 bleibt negativ, da hier der Normaleinheitsvektor in positive Richtung zeigt. Außerdem kann die Dichte vor die Integrale geschrieben werden, da diese konstant ist.

$$0 = \sum_i p_i n_i n_v A_i + \rho \int_{A_1} v^2 dA - \rho \int_{A_2} v^2 dA \quad (3.32)$$

Da die Geschwindigkeit nicht gleichmäßig über die Flächen des Ein- und Ausgangs verteilt ist, wird das Integral durch Proportionalitätsfaktoren $\beta_{1,2}$ ersetzt, welcher eine Beziehung zwischen der Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt und einer mittleren Geschwindigkeit \bar{v} herstellt. Da $v * A = Q$ ist, ergibt sich die Gleichung:

$$0 = \sum_i p_i n_i n_v A_i + \rho Q^2 \left(\frac{\beta_1}{A_1} - \frac{\beta_2}{A_2} \right) \quad (3.33)$$

3.5.1 Zusammenhang mit der plötzlichen Verengung [10]

Gleichung 3.33 lässt sich sowohl für die plötzliche Aufweitung als auch für, die plötzliche Verengung, anwenden. Es wurde bereits der Druck p_1 auf die Fläche A_1 in oder kurz vor der Querschnittsänderung und der Druck p_2 auf die Fläche A_2 nach der Querschnittsänderung betrachtet. Es fehlt jedoch noch die Betrachtung des Druckes auf die Fläche $(A_1 - A_2)$ bei der Verengung und $(A_2 - A_1)$ bei der Aufweitung. Diesen Rückstaudruck p_r gilt es noch in die

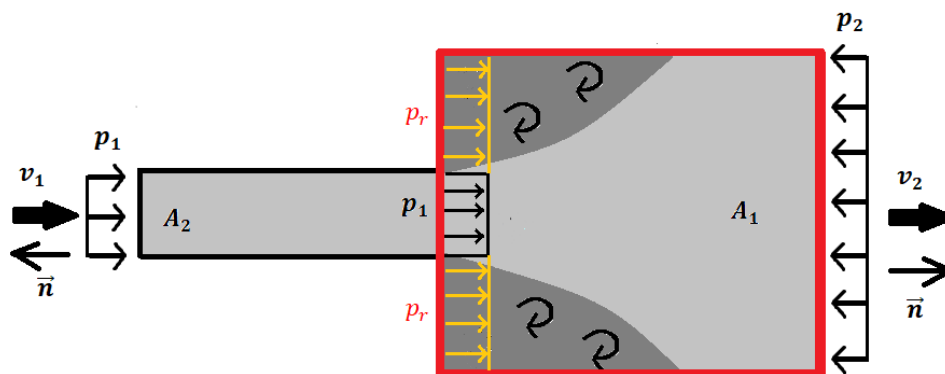


Abb. 4: Rückstaudruck p_r [10]

Impulsbilanz mit aufzunehmen. Der Rückstaudruck wird als durchschnittlicher Druckverlauf $p(r)$ über die Querschnittsänderungsebene dargestellt. Er hat jedoch keinen konstanten Verlauf über die resultierende Fläche, sowohl bei der Verengung als auch bei der Aufweitung. Die Annahme, dass $p(r) \approx p_1$ ist, scheint zwar plausibel, führt jedoch zu Abweichungen. Diese Vereinfachung wird bei der Borda-Carnot [30] getroffen.

Um den Rückstaudruck in der Impulsbilanz zu berücksichtigen, wird bei der plötzlichen Verengung dieser Term als Integral des Druckes über die Verengungsebene dargestellt und durch die resultierende Fläche $A_1 - A_2$ dividiert. Zusätzlich wird der auf p_1 bezogene Druckkoeffizient c_p eingeführt, der die unregelmäßige Druckverteilung über die Verengungsebene als auch die Druckverteilung über das Flächenverhältnis $\sigma = A_2/A_1$

betrachtet. Dieser Koeffizient wird numerisch bestimmt. Somit ergibt sich für den Rückstaudruck bei der plötzlichen Verengung:

$$p_r = p_1 - c_p \frac{\rho Q^2}{2 A_1^2} \quad (3.34)$$

Bei der plötzlichen Aufweitung stellt man nach numerischen Simulationen fest, dass bei abnehmendem des Flächenverhältnisses der Aufweitung $\sigma_{inv} = A_1/A_2$, die Abweichungen zunehmen. Allerdings stellt man auch fest, dass mit abnehmender Entfernung zur Aufweitungsebene, der durchschnittliche Druck $p(r)$ abnimmt. Bei kleinen Verhältnissen von σ_{inv} beobachtet man außerdem eine große Spannweite zwischen dem maximalen und minimalen Wert des Verhältnisses von $p(r)$ zu p_1 , anders als bei größeren Verhältnissen von σ_{inv} , wo man keine großen Spannweiten zwischen dem Minimum und Maximum des Verhältnisses $p(r)$ zu p_1 feststellen kann. Man schließt sich für den Rückstaudruck also der Formulierung der Verengung an, wobei c_p auch hier die Druckverteilung über die Aufweitungsebene und die Abweichung zwischen p_1 und p_r betrachtet. Somit ergibt sich für die Aufweitung die folgende Formulierung, nachdem der p_r -Term durch die Richtung des Normaleinheitsvektors positiv wird. Als Differenz zwischen dem Druck in der Aufweitungsebene p_1 und dem maximalen Druck stromaufwärts p_2 mit dem Rückstaudruck p_r aus Gleichung 3.34 ergibt sich die finale Formel zur Berechnung des Druckunterschiedes Δp auf Basis einer nicht idealisierten Impulsbilanz zu Gleichung 3.35:

$$p_2 - p_1 = \rho \frac{Q^2}{A_2^2} \left(\frac{A_2}{A_1} \beta_1 - \beta_2 + \frac{c_p A_2}{2 A_1} - \frac{c_p A_2^2}{2 A_1^2} \right) \quad (3.35)$$

4. Der Versuchsstand

4.1 Versuchsaufbau

Der Versuchsstand befindet sich im Wasserlabor der Universität der Bundeswehr München. Das Labor verfügt über einen Wasserkreislauf, der von einem Tiefbehälter versorgt wird. Über eine Bedienoberfläche der Speicher-Programmierbaren-Steuerung (SPS) kann das Wasser zu der entsprechenden Rinne des Versuchsstandes geführt werden. Der Bediener steuert per Mausklick die Pumpe an, welche das Wasser aus dem Tiefbehälter in den Kreislauf einspeist. Durch Öffnen der gewünschten Schiebventile, wird das Wasser dem Hochbehälter zugeführt, sodass der Wasserstand in diesem ansteigt. Der Hochbehälter verfügt über einen Überlauf, um konstant Wasserhöhe und damit Wasserdruck halten zu können. Anschließend wird erneut die richtige Klappe geöffnet, um das Wasser dem Versuchsstand zuzuführen. Am Auslass des Versuchsstandes befindet sich ein Fangbecken, von dem aus das Wasser wieder dem Tiefbehälter zugeführt wird und sich somit der Kreislauf schließt.

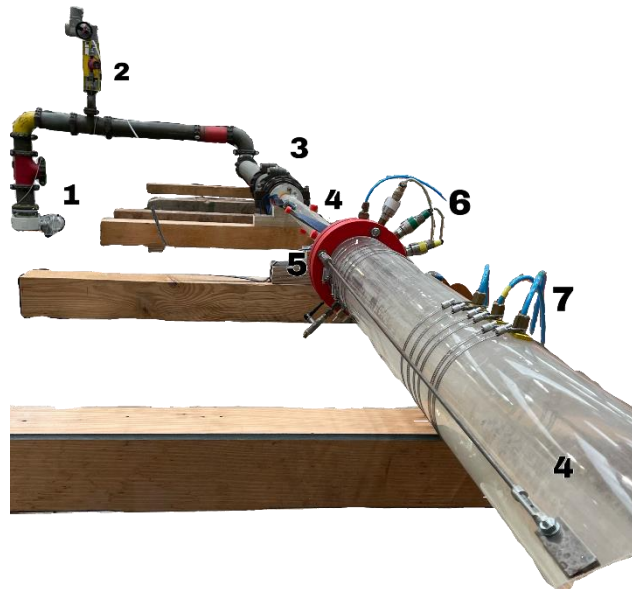


Abb. 5: Vollständiger Versuchsaufbau, Ansicht entgegen der Strömungsrichtung

Abbildung 5 zeigt die Ansicht des Versuchsaufbaus entgegen der Strömungsrichtung. Die jeweiligen Zahlen entsprechen wichtigen Bauteilen, die in der folgenden Versuchsbeschreibung erläutert werden.

Der aus drei miteinander verbundenen Rohren bestehende Versuchsstand ist auf Holzsparrn über einer Rinne gelagert. Das erste Glied der Kette bildet jedoch der magnetisch-induktive-Durchflussmesser (MID). Der MID (1) wird durch den Wasserkreislauf von dem Hochbehälter gespeist und überwacht den Volumenstrom. Das Messprinzip beruht auf dem Induktionsgesetz. Es wird durch zwei Feldspulen ein künstliches Magnetfeld erzeugt. Sobald sich die im Wasser befindlichen elektrisch geladenen Ionen durch das Feld bewegen, wird eine Spannung

induziert. Das Messgerät macht sich die Proportionalität zwischen Spannung und Fließgeschwindigkeit zu Nutze und gibt folglich den Volumenstrom aus [32, S. 25–27, 508]. Die Rohrleitung macht einen rechtwinkligen Knick nach rechts worauf sich kurz dahinter das Steigventil (2) befindet. Über das Steigventil lässt sich von einem Computer aus der Volumenstrom steuern. Nun macht das Rohrleitungssystem einen weiteren Knick nach rechts unten, sodass der Wasserstrom die Versuchsebene erreicht. Die Versuchsebene besteht aus einem Stahlrohr (3), worauf sich eine transparente 1.5 m lange Plexiglasrohrleitung (4) DN 60 mm mit einem Durchmesser $D_1 = 0.0604\text{ m}$ befindet. Im Aufweitungsbereich (5) geht das kleine Rohr abrupt auf die größere Plexiglasrohrleitung (4) DN 140 mm mit einem Durchmesser $D_2 = 0.14092\text{ m}$ über. Das Verhältnis der beiden Rohrdurchmesser D_1/D_2 beträgt somit 0.43. Die Rohre haben eine Rauigkeit von $k_s = 7.8 * 10^{-5}\text{ m}$ [33]. Um die Druckdifferenz Δp messen zu können, ist es erforderlich zwei Messpunkte zu haben, einen im Druckbereich der Aufweitung und einen stromaufwärts. Der Druck p_1 wird bei $x = 0\text{ m}$ gemessen und p_2 im vermuteten Bereich des maximalen Druckes. Um die genaue Stelle des maximalen Druckes herauszufinden, werden drei Messstellen (7) in den Abständen $5.5D_2$, $6D_2$ und $6.5D_2$ stromaufwärts angelegt, da hier der maximale Druckunterschied Δp erwartet wird [10]. Die Messstelle an der Aufweitung (6) ist ständig mit dem Sensor verbunden, während die drei anderen jeweils angesteuert werden müssen. Um den Druck an einer bestimmten Stelle messen zu können, wurden Löcher in die Plexiglasrohrleitung gebohrt. Über den Bohrlöchern der Messstellen werden Ventile mit Schneckenschraubschellendraht angebracht. Diese können dann mit einem PU-Schlauch (Polyurethan) mit dem Differenzdrucksensor verbunden werden. Normalerweise steht für solche Versuche ein Ventilumschaltblock zur Verfügung, bei welchem durch Betätigen eines Schalters, die jeweilige Messstelle angesteuert werden kann. Da sich dieser jedoch nach abweichenden und fehlerbehafteten Messungen als stark verkalkt herausstellte, wurde eine durch Ventile gesteuerte manuelle Umschaltung angebracht. An einem Eingang des Differenzdrucksensors befindet sich der Schlauch aus der Aufweitung und an dem anderen Eingang der Schlauch der manuellen Umschaltung. Durch Öffnen und Schließen der Ventilhebel, gibt der Sensor den Differenzdruck an der gewünschten Stelle aus. Genutzt werden zwei SIEMENS SITRANS P, Messumformer für Differenzdruck, einer mit einem Messbereich von 0 mbar bis 60 mbar und der andere mit 60 mbar bis 60 mbar. Beim Anschließen der PU-Schläuche an die Sensoren muss darauf geachtet werden, dass die Leitung mit niedrigerem Druck an die Minus-Seite und die Leitung mit höherem Druck an die Plus-Seite des Sensors angeschlossen wird. Dabei ist im Aufweitungsbereich ein niedrigerer Druck als an den Messstellen zu erwarten, sodass die Leitungen dementsprechend mit dem Sensor verbunden werden. Um das Signal digital nutzen zu können sind jedoch noch einige Schritte nötig. Der Sensor gibt ein analoges Signal zwischen 4-20 mA aus. Da Computer keine analogen Signale verarbeiten können, wird ein AD-Wandler (Analog-Digital-Wandler) benötigt. Nun wird das analoge Spannungssignal mit Hilfe eines 12-Bit-Wandlers digitalisiert. Das bedeutet, dass der Eingangssignalebene von 2-10 V auf 12-Bit (dabei entspricht $2^{12} - 1 = 4095$ Werte) diskretisiert wird. Bei einer Spannungsänderung um $12/4095$ ändert sich der digitale Wert um 1. Dieser Prozess ist vergleichbar mit dem des Druckabfalls innerhalb eines rauen Rohrs, wobei sich die Stromstärke hier wie der Volumenstrom verhält [S. Müller, persönliche Kommunikation, 06.10.2021]. Das nun digitale Signal kann dann mit Hilfe des Programmiersystems LabView von dem Computer ausgegeben werden. Abbildung 6 zeigt die

horizontale Versuchsebene aus einer Seitenansicht und Abbildung 7 nur den Aufweitungsbereich mit den angeschlossenen Messstellen. In Abbildung 8 sind die drei Messstellen im Detail dargestellt. Die gelben Plättchen besitzen eine mit einem O-Ring gedichtete Bohrung. Sie werden direkt über den Bohrlöchern des Rohres befestigt. Die blauen PU-Schläuche werden über die messingfarbene Mutter verbunden.

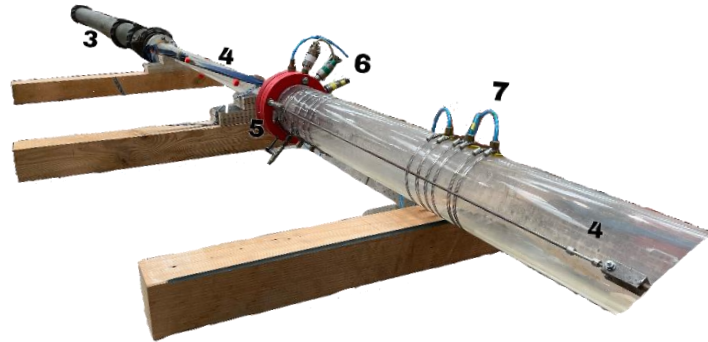


Abb. 6: Versuchsstand Seitenansicht

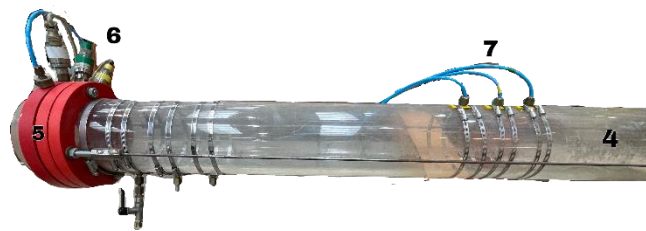


Abb. 7: Draufsicht auf das Kontrollvolumen

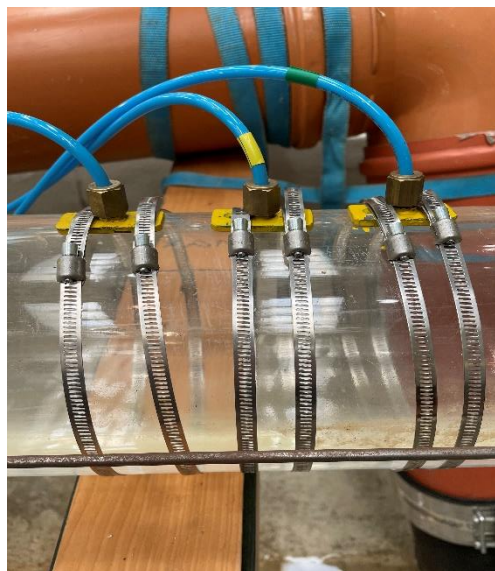


Abb. 8: Anschluss der drei Messstellen

4.2 Versuchsdurchführung

In diesem Unterkapitel wird schwerpunktmäßig die Kalibrierung der Sensoren, sowie die Versuchsdurchführung behandelt. Ein elementares Instrument hierfür ist die Software Matlab.

4.2.1 Kalibrierung

Bevor mit den Messungen begonnen werden kann, muss eine Kalibrierung durchgeführt werden. LabView gibt lediglich digitalisierte Spannungen als Messwerte aus. Dieser Zusammenhang wird anhand des AD-Wandlers im vorherigen Teilkapitel beschrieben. Um jedoch die Spannungen einem bestimmten Druck zuordnen zu können, wird mithilfe eines Druckkalibrators das Verhältnis von Druck und Spannung zueinander ermittelt. Der Sitrans Differenzdrucksensor verfügt über einen Messbereich von 0 mbar bis 60 mbar , wodurch der Messbereich bis zu einem bestimmten Durchfluss limitiert ist. Dabei wird aufsteigend von 0 mbar bis 60 mbar und absteigend von 60 mbar bis 0 mbar gemessen. Es wird mit einer Schrittweite von jeweils 6 mbar gearbeitet, sodass 21 mal gemessen wird. LabView erwartet vor der Messung noch die Vorgabe, wie viele Werte an der Messstelle abgetastet und ausgewertet werden sollen. Das Programm tastet dabei das periodische Signal ab. Hierbei werden die Sensoren mit 1000 Hz , 1000 „samples per second“ (Werte pro Sekunde) abgetastet. Anschließend werden durch 100 „samples to read“ (Ausgelesene Werte) jeweils 100 Werte gemittelt, wodurch 10 Messwerte für eine Messung entstehen und als Datei gespeichert werden. Die Messung dauert dabei eine Sekunde. Diese Einstellungen in LabView werden auch für die weiteren Messungen gespeichert. Der Messbereich ist dabei auf 10 V beschränkt. Dabei entspricht 10 V dem maximalen messbaren Druck des Sensors, also 60 mbar . Die Werte der Kalibrierung aus LabView werden in eine Excel Arbeitsmappe eingespeist und in Matlab eingelesen. Über das *Curve-Fitting-Tool* wird eine Ausgleichsfunktion ermittelt. Die dabei entstehenden Ausgleichskurven werden auch als Regressionskurven bezeichnet. Demnach geht man von einer Abhängigkeit zwischen der Spannung U und dem Druck P aus. Die „Gaußsche Methode der kleinsten Quadrate“ [34, S. 694–700] ist die maßgebende Methode zur Bestimmung der Regressionskurve. Dabei wird über Abstandsquadrate der einzelnen Messwertpunkte die bestmögliche Regressionskurve erstellt. Da die Messwerte annähernd auf einer Geraden liegen, wird ein linearer Zusammenhang gewählt. Im *Curve-Fitting-Tool* wird Polynomial (Polynomialfunktion) ausgewählt und als *Degree* (Polynomgrad) 1 festgelegt. Somit erstellt Matlab eine lineare Regression mit folgender Ausgleichsgeradenfunktion:

$$y = 7.5098x - 15.2135 \quad (4.1)$$

Es gibt verschiedene Kriterien, die die Genauigkeit einer Ausgleichsrechnung beurteilen. Matlab bietet hierbei *RMSE* (Root Mean Squared Error), *SSE* (Sum of Squares Due To Error), *R-Square* und *Adjusted R-Square* an [35]. *RMSE* gibt dabei die Standardabweichung der Residuen an. Als Residuen bezeichnet man die Abweichung der Messwerte von der Näherungslösung, die auch in der numerischen Diskretisierung ein wichtiger Indikator für Änderungen von der reellen Lösung darstellen [36, S. 96–97]. *RMSE* gibt somit Aufschluss darüber, wie groß die Streuung der Messwerte ist. *SSE* hingegen gibt Auskunft über die gesamte Abweichung von der Regressionskurve. Es wird auch als Quadrat der Summe der Residuen bezeichnet. Sowohl bei

RMSE als auch bei *SSE* werden Werte, die gegen 0 gehen angestrebt. Gute *RMSE* und *SSE* - Werte sind zudem ein Indikator für eine gute Kalibrierung. *R-Square* und *Adjusted R-Square* sind schließlich ein Parameter, der die Übereinstimmung der Ausgleichsrechnung darstellt. Hier sind Werte, die gegen 1 gehen anzustreben [35]. Abbildung 9 zeigt die lineare Ausgleichsgerade und die maßgebenden Beurteilungsparameter, die in Abbildung 10 dargestellt sind:

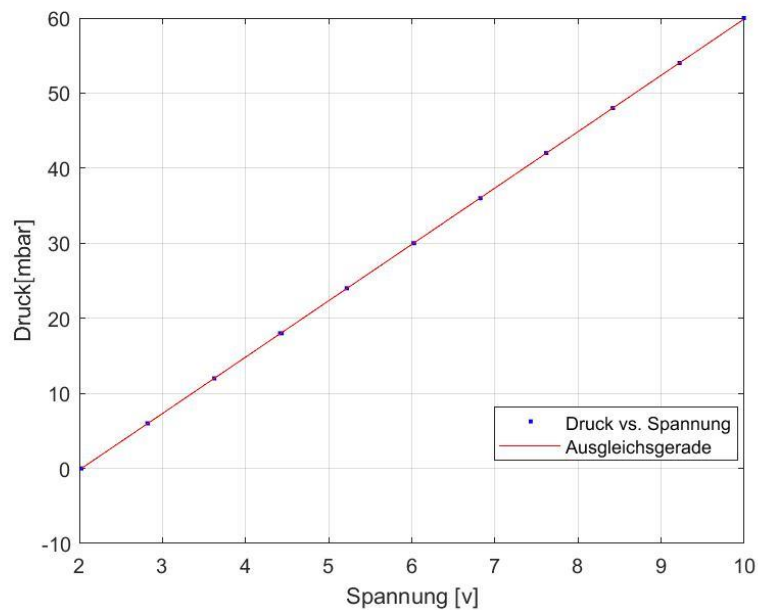


Abb. 9: Ausgleichsgerade

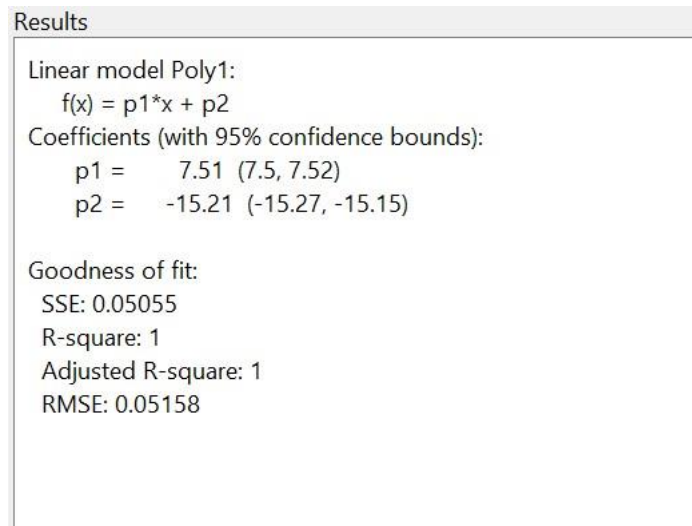


Abb. 10: Beurteilungsparameter Matlab

Da der Differenzdrucksensor lediglich einen Messbereich bis 60 *mbar* besitzt, ist der Durchfluss mit diesem Messgerät auf 17 *l/s* beschränkt. Für größere Durchflüsse wird der Differenzdrucksensor durch einen Siemens Sitrans P mit einem Messbereich von 60 *mbar* bis

600 *mbar* ersetzt. Dieser gibt ebenfalls ein Stromstärke-Signal von 4-20 *mA* aus. Dazu wird lediglich die Verkabelung mit dem AD-Wandler angepasst und die PU-Schläuche mit dem Sensor verbunden.

Aus bereits durchgeführten Kalibrierungen des Institutes für diesen Sensor hat man folgende Ausgleichsfunktion erhalten:

$$y = 64.4775x - 79.3467 \quad (4.2)$$

4.2.2 Messung an den Druckmessstellen

Über die SPS wird das Wasser dem Versuchsstand zugeführt. Dabei wird der Ringkolbenschieber, der die Verbindungsstelle zwischen dem Wasserkreislauf des Labors und dem Versuchsstand darstellt, geöffnet. Mit LabView wird das Steigventil geöffnet und ein Durchfluss von 5 *l/s* eingestellt. Die Messungen sollen bei 5 *l/s* als Volumenstrom beginnend und in 5 *l/s* Schritten aufwärts durchgeführt werden. Um die Rohrleitung zu entlüften wird der Volumenstrom auf 10 *l/s* bis 15 *l/s* erhöht. Des Weiteren werden auch die Entlüftungsventile des Druckaufnehmers geöffnet und die Leitung mit dem Sensor entlüftet. Dadurch werden alle Luftrückstände in Form von kleinen Bläschen ausgespült. Anschließend wird der Volumenstrom wieder auf 5 *l/s* eingestellt. Es stellt sich jedoch heraus, dass dabei nicht genug Wasser über die Aufweitung in das breitere Rohr D_2 gelangt, wodurch sich in der Aufweitungsebene und an der Rohrwand große Lufteinschlüsse bilden. Diese würden zu verfälschten Messergebnissen führen. Durch Anpassung des Durchflusses auf 7 *l/s* stellt sich schließlich eine konstante Strömung ohne Lufteinschlüsse an der Rohrwand oder in der Aufweitungsebene ein. Der erste Differenzdrucksensor mit einem Messbereich von 0 *mbar* bis 60 *mbar* beschränkt den einstellbaren Durchfluss. Da der Durchfluss ein maßgebender Faktor für den Druckunterschied Δp ist, stellt sich nach mehreren Versuchsdurchläufen heraus, dass bei 17 *l/s* das Maximum des Messbereiches erreicht ist. LabView gibt dabei 10 *V* als maximale Spannung aus. Mit dem ersten Sensor können die Volumenströme 7 *l/s*, 10 *l/s*, 15 *l/s*, und 17 *l/s* aufgenommen werden. Beginnend mit 7 *l/s* werden über die an dem Sensor angebrachte Ventilumschaltung die drei Messstellen angesteuert. An jeder Messstelle wird dreimal gemessen, sodass sich 30 Messwerte für jede Messstelle ergeben. Dieser Vorgang wird auch mit den restlichen Durchflüssen durchgeführt. Der gesamte Messvorgang wird in LabView durch *Stop* beendet, wobei sich das Steigventil wieder schließt. Die Messwerte werden als Datei gespeichert und können in Microsoft-Excel eingelesen werden.

Um Messungen mit größeren Volumenströmen durchführen zu können wird der Differenzdrucksensor mit einem Messbereich von 60 *mbar* bis 600 *mbar* angebracht. Beim Wechseln des Sensors ist erneut auf die richtige Verbindung der Schlauchleitungen mit der Minus- und Plus Seite des Sensors zu achten. Über die SPS wird ein anderer Hochbehälter mit größerer Füllhöhe angesteuert. Dadurch kann mehr Druck erzeugt werden, was zu einem höheren Volumenstrom führt. Es werden mit dem neuen Sensor die Durchflüsse 20 *l/s*, 22 *l/s*, und 25 *l/s* eingestellt. Mit jedem Durchfluss werden erneut drei Messungen an jeder Messstelle vorgenommen.

5. Numerische Simulation

In diesem Kapitel wird die numerische Simulation mittels Ansys Inc. erklärt. Dabei werden die theoretischen Hintergründe erläutert und ein Einblick in die grundlegenden Turbulenz- und Diskretisierungsmodelle gegeben. Als Grundlage für die folgenden Unterkapitel werden schwerpunktmäßig Referenzen [36]–[38] genutzt.

5.1 Einführung

Neben der Messung am Versuchsstand und der Rechnung mit Hilfe des Matlab-Codes, soll ein dritter Standpunkt als Validierung in Betracht gezogen werden: Die numerische Strömungsberechnung mit der Simulationssoftware von dem amerikanischen Hersteller Ansys Inc. Es handelt sich bei dieser Simulation um ein CFD-Programm (CFD - Computational Fluid Dynamics). CFD-Programme sind numerische Simulationsprogramme, die strömungsmechanische Vorgänge numerisch berechnen. Ihnen liegen Erhaltungsgleichungen, wie beispielsweise die Navier-Stokes-Gleichungen zu Grunde. Das Programm bietet dem Ingenieur oder Forschenden die Aussicht seine Modelle numerisch überprüfen zu lassen und zu verifizieren, ob diese auch in der Praxis funktionieren würden. Die numerische Strömungsberechnung findet häufig Anwendung in der Luft und Raumfahrtbranche, sowie in der Automobilbranche und ist in der Industrie heutzutage kaum mehr wegzudenken [37, S. 1–2], [38, S. 27–28]. Die Simulation wird mit Ansys-Modul-CFX vorgenommen. Der Ablauf der Berechnung ist dabei von dem Hersteller bereits vorgegeben und unterteilt sich in fünf sequenzielle aufeinander aufbauende Arbeitsschritte: Geometry, Mesh, Setup, Solution und Results (Geometrie, Netz, Setup, Lösung und Ergebnisse).

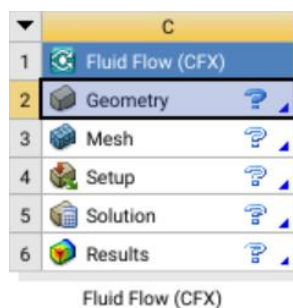


Abb. 11: Neues Ablaufschema einer Simulation

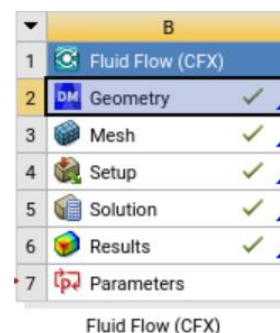


Abb. 12: Fertiges Ablaufschema einer Simulation

Abbildung 11 zeigt das noch unausgefüllte Ablaufschema eines neuen Projektes mit Ansys-Workbench CFX und Abbildung 12 ein bereits fertig ausgefülltes Schema. Der siebte Punkt in Abbildung 12, Parameters (Parameter) kann erst bei einer abgeschlossenen Simulation erscheinen.

5.2 Die Erhaltungsgleichungen

Alle CFD-Programme basieren auf den strömungsmechanischen Erhaltungsgleichungen. Dabei handelt es sich um die Massenerhaltung, Impulserhaltung und die Energieerhaltung. Die Energieerhaltungsgleichung berücksichtigt die thermodynamischen Aspekte innerhalb des Systems. Da für dieses System keine Temperatureinflüsse berücksichtigt werden, spielt die Erhaltungsgleichung für diesen Versuch keine Rolle. Es verbleiben also noch zwei Erhaltungsgleichungen. Die Impulserhaltung wird in Gleichung 3.9 und die Massenerhaltung in Gleichung 3.4 dargestellt. Die Impulserhaltung kann auch in die drei Raumrichtungen x, y und z aufgeteilt werden. Dies wird in der Strömungsberechnung des Programms noch verdeutlicht. Dabei können die Erhaltungsgleichungen in Integral oder Differentialform angegeben werden. CFD-Programme wie Ansys CFX verwenden üblicherweise die Integralform, da diese physikalisch abschließend über den kompletten Raum des Systems integrieren können. Mathematisch anschaulicher ist jedoch die Differentialschreibweise, sodass sie zur Beschreibung der Erhaltungsgleichungen häufiger verwendet wird. Die Impulserhaltung wird jeweils für die drei Koordinatenachsen betrachtet: dI_x , dI_y und dI_z . Diese drei Impulsgleichungen sind die Navier–Stokes Gleichungen. Zusammen mit der Massenerhaltung ergeben sich somit vier Erhaltungsgleichungen, die es zu berücksichtigen gilt [37, S. 10–20], [38, S. 3–10].

5.3 Die Navier-Stokes-Gleichungen

Zur Erklärung der Euler- und Navier-Stokes-Gleichungen sind die Referenzen [37, S. 20–41], [38, S. 10–20] sowie die Referenzen [39], [40] genutzt worden.

Kurze Zeit nach Bernoullis Erkenntnissen, befasste sich auch sein enger Freund, der Schweizer Mathematiker und Physiker, **Leonhard Euler** [41] (1707-1783) umfassend mit mathematischen Modellen der Strömungsmechanik. Ähnlich wie die Bernoulli-Gleichung, ist auch die Euler-Gleichung ein Spezialfall der Impulsbilanz. Euler geht hier von einer heterogenen Dichteverteilung aus. Zudem gibt es für Euler keine Reibverluste.

Die Masse wird als Integral der Dichte über das Volumen dargestellt. Durch die Infinitesimalisierung der Masse, geht diese gegen 0, und die Integration wird somit fast konstant. Nach Anwendung des Gaußschen Integralsatzes, ergibt sich ein Tensorprodukt aus den beiden Geschwindigkeitsvektoren $\vec{v} \otimes \vec{v}$. Dabei handelt es sich um eine Matrix der Dimension 3×3 für die drei Raumrichtungen (u, v, w). Außerdem ergibt sich noch ein Gradient über \vec{v} und p , wodurch sich die Euler-Gleichung folgendermaßen ergibt:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \text{grad} \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \vec{g} \quad (5.1)$$

Anders als bei der Euler-Gleichung, berücksichtigt die Navier-Stokes-Gleichung auch die viskosen Kräfte eines Fluids. Die Navier-Stokes-Gleichungen, stammen von dem französischen Wissenschaftler **Henri Navier** und dem irischen Mathematiker **George Gabriel Stokes**. Da die Viskosität bei Euler nicht berücksichtigt wird, gibt es keine Reibung an den Wänden und folglich auch keine Reibverluste. Im Gegensatz dazu erfasst die Navier Stokes Gleichung das

komplette turbulente Spektrum. Sowohl Euler als auch Navier-Stokes betrachten die Druckkraft und die Gravitationskraft, wobei bei Navier-Stokes noch die viskose Kraft dazu kommt. Somit ergibt sich die Navier-Stokes Gleichung für ein inkompressibles newtonsches Fluid:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mu \operatorname{grad} \vec{v} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \quad (5.2)$$

Die vollständige Navier-Stokes-Gleichung aus Gleichung 5.2 kann nur für sehr stark vereinfachte Probleme analytisch gelöst werden. Es werden bei allen modernen CFD Programmen die *Reynolds gemittelten Navier-Stokes Gleichungen* (RANS – Reynolds Averaged Navier Stokes) verwendet. Anders als die Navier-Stokes-Gleichungen betrachten die RANS nicht das gesamte turbulente Spektrum, wodurch man von minimierten Rechenaufwand und verkürzten Rechenzeiten profitiert.

Die Navier-Stokes-Gleichungen betrachten jede turbulente Fluktuation, wodurch der hohe Rechenaufwand entsteht. In der Praxis sind jedoch weniger die einzelnen Fluktuationen von Interesse als die gesamte Wirkung, die die mittleren Strömungseigenschaften auf das System haben. Somit reicht eine gemittelte Betrachtung der Geschwindigkeit und des Druckes innerhalb der Strömung aus. Osborne Reynolds zerlegt in seiner Mittelwertbildung die Strömungsgeschwindigkeit und den Druck in eine mittlere Strömungsgeschwindigkeit \bar{u}_i und einen mittleren Druck, sowie deren Fluktuation u_i ($u_i = \bar{u}_i + u'_i$). Dies wird dann in die Navier-Stokes-Gleichung eingesetzt. Um die Fluktuationen zu eliminieren, werden sie über die Zeit gemittelt. Der Mittelwert der Fluktuationen ist null. Es entfallen also die Mittelwerte der Fluktuationen, wodurch sich zu der ursprünglichen Navier-Stokes-Gleichung, noch die Korrelation der Geschwindigkeit als zusätzlicher Term addiert. Multipliziert man diese mit der Dichte ρ erhält man einen Spannungstensor, die Reynoldsspannung. Zum Vergleich stehen in Gleichung 5.3 oben die Navier-Stokes-Gleichung und unten die Reynolds-Gleichung. Es wurde, um Platz die Indexnotation gewählt. Der grüne Term ist der Reynolds-Spannungstensor (τ_{ji})

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - g_i \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{u'_j u'_i} \right) - g_i \end{aligned} \quad (5.3)$$

Die Navier-Stokes Gleichung löst alle Details mit allen Fluktuationen einer Strömung auf, wobei die Reynolds-Gleichung lediglich einen Mittelwert beschreibt. Um jedoch die Reynolds-Gleichung lösen zu können, muss man den Mittelwert der Korrelationen der Fluktuationen kennen. Allgemein verursachen Strömungsgeschwindigkeiten einen Impulstransport der größeren Geschwindigkeiten über die kleineren, wobei die größeren Geschwindigkeiten Impuls an die kleineren weitergeben. Bei turbulenten Strömungen findet jedoch durch Verwirbelungen innerhalb der Strömung eine Durchmischung des Fluids statt, dem auch eine Verwirbelung der Geschwindigkeiten folgt. Um dies nun darstellen zu können wird eine künstliche Viskosität ν_t eingeführt, die Wirbelviskosität [16, S. 35–37], [38, S. 454–458]. Diese wird dann in den Wirbelviskositätsmodellen verarbeitet. Bei diesen Turbulenzmodellen handelt es sich somit um

eine Approximation der realen Strömungsvorgänge. Die gemittelten Navier Stokes Gleichungen bilden als mathematisches Modell die Grundlage für jegliche numerische Berechnung. Es gibt jedoch auch Vereinfachungen der gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen, wie die *Thin-Layer Navier-Stokes Gleichungen* [16, S. 37] spielen Reibung durch Viskosität keine Rolle, können auch die Euler-Gleichungen verwendet werden. Je nach Problemstellungen kann ein anderes mathematisches Modell gewählt werden, auf welchem die numerische Simulation aufbaut. Besonders verbreitet, insbesondere für CFD, sind jedoch die gemittelten Reynolds gemittelten Navier-Stokes Gleichungen.

5.4 Turbulenzmodelle

In diesem Unterkapitel werden die Referenzen, [37, S. 34–37], [38, S. 397–403, 454–458] und [36, S. 203–204] verwendet.

Die Turbulenzmodelle bilden das Fundament für eine näherungsweise Berechnung der Strömungsvorgänge. Dabei ist vor allem der Übergang von dem laminaren zu dem turbulenten Bereich sehr fehleranfällig. Bei turbulenten Strömungen werden Reynolds-Spannungs-Modelle (RNS) verwendet. Während bei den isotropen Wirbelviskositätsmodellen die Turbulenzen mithilfe der künstlichen Wirbelviskosität berechnet wird, lösen die anisotropen RNS den Reynolds-Spannungstensor. Bei den Wirbelviskositätsmodellen wird von einer richtungsunabhängigen Turbulenz ausgegangen, wobei es sich um eine vereinfachte Beschreibung handelt. Bei den RNS wird die Turbulenz als richtungsabhängig berücksichtigt, was zu erheblichen Rechenaufwand führt. Bei laminaren Strömungen wird kein Turbulenzmodell benötigt. Durch eine hohe Auflösung oder Vernetzung werden bei direkter numerischer Simulation, DNS, ebenfalls keine Turbulenzmodelle benötigt. [38, S. 400–403]. Dies erfordert jedoch eine sehr hohe Auflösung, da jeder durch Turbulenz erzeugte Wirbel gelöst werden muss. Bei laminaren Strömungen wird kein Turbulenzmodell benötigt. Für turbulente Strömungen haben sich im industriellen Bereich die Wirbelviskositätsmodelle durchgesetzt, da diese eine gute Approximation bilden und für praktische Anwendung ausreichend genau Ergebnisse liefern.

Hierbei unterscheidet man zwischen drei unterschiedlichen Ansätzen von Gleichungsmodellen zur Ermittlung der Wirbelviskosität: Null-Gleichungsmodelle, Ein-Gleichungsmodelle und Zwei-Gleichungsmodelle [37, S. 34]. Dabei handelt es sich um die Anzahl an Differentialgleichungen, die zur Approximation der ν_t gelöst werden. Die Null-Gleichungsmodelle oder auch algebraischen Modelle wird die Wirbelviskosität algebraisch gelöst. Sie benötigen keine langen Rechenzeiten, eignen sich jedoch nur für bestimmte Anwendungen. Besonders bekannt ist hier das *Baldwin-Lomax-Modell*. Bei den Ein-Gleichungsmodellen wird die Wirbelviskosität durch eine zusätzliche Transportgleichung bestimmt. Ein bekanntes Modell hierzu ist das *Spalart-Allmaras-Modell* [37, S. 34]. Die Zwei-Gleichungsmodelle hingegen benutzen noch eine weitere Differentialgleichung zur Bestimmung der Wirbelviskosität. Diese bieten den Vorteil gegenüber Ein-Gleichungsmodellen, dass sie Änderungen besser erfassen und darstellen können. Man unterscheidet bei den Zwei-Gleichungsmodellen zwischen den drei am meisten genutzten Modellen: dem k - ε -Modell, k - ω -Modell und dem k - ω SST (Shear Stress Transport) Modell.

Das k - ε Modell wurde lange Zeit als Standardmodell in der Industrie verwendet. Dabei wird die Wirbelviskosität mithilfe des Parameters k zur Beschreibung der turbulenten kinetischen Energie und es Parameters ε für die Dissipation beschrieben. K ist die kinetische Energie und kann als Maß für die Turbulenz verstanden werden, während die Dissipation ε den Energietransfer in andere Turbulenzelemente bzw. Fluidelemente beschreibt. Das k - ω -Modell benutzt anstatt der Dissipation den Parameter ω zur Beschreibung der Dissipationsfähigkeit der kinetischen Energie. Während das k - ε -Modell das Strömungsfeld im Kernbereich besser darstellen kann, liefert das k - ω -Modell genauere Ergebnisse an der Wand. Dies führte zur Einführung eines dritten Modells, dem SST-Modell (Shear Stress Transport). Das SST-Modell vereint die Vorteile beider vorherigen Modelle. Es liefert sowohl in Strömungsmitte als auch an den Wänden genaue Ergebnisse, wodurch sich dieses Modell als Industriestandard durchgesetzt hat [37, S. 34–35].

5.5 Diskretisierung

In diesem Unterkapitel werden die Referenzen [37, S. 44–62], [38, S. 30–31, 43–45, 48] und [36, S. 76–81] verwendet.

Es handelt sich bei den gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen um ein Differentialgleichungssystem, welches nicht analytisch gelöst werden kann, sodass hierfür numerische Lösungsverfahren notwendig werden. Bei den Differentialgleichungen handelt es sich um kontinuierliche Gleichungen in Zeit und Raum. Mit Hilfe der Diskretisierung werden die kontinuierlichen Differentiale als diskrete Differenzen behandelt. Dabei wird nicht das ganze System der Differentialgleichungen bestimmt, sondern es werden nur einige Stützstellen ausgewertet. Die Entwicklung zwischen den einzelnen Stützstellen wird approximiert. Die Diskretisierung erfolgt sowohl in zeitlicher als auch in räumlicher Richtung. Dabei wird zwischen drei grundlegenden Verfahren unterschieden: Finite-Differenzen-Verfahren (FDM), Finite-Elemente-Verfahren (FEM) und Finite-Volumen-Verfahren (FVM). Letzteres findet in den in der Praxis verwendeten CFD-Verfahren am häufigsten Anwendung.

5.5.1 Randbedingungen [36, S. 65–68], [37, S. 27–32], [38, S. 63–65]

Die gemittelten Navier-Stokes Gleichungen erfordern die Definition von Randbedingungen, um gelöst zu werden. Dabei unterscheidet man unter anderen zwischen drei Rändern: Inlet, Outlet und Wall (Einströmrand, Ausströmrand und Körperwand). Es wird zudem zwischen physikalischen und numerischen Randbedingungen unterschieden. Die physikalischen Randbedingungen werden vom Benutzer des Programmes definiert. Am Einströmrand und am Ausströmrand werden als festgelegte physikalische Bedingung Drücke, Temperaturen oder Massenströme erwartet. Am Körperwand wird die Reibung u.a durch die Wandrauigkeit definiert. Bei Strömungen von viskosen Fluiden führt diese dazu, dass die Geschwindigkeit im direkt an der Wand auf null abfällt. Die numerischen Randbedingungen werden im Strömungsinnen vom Programm berechnet und sorgen zusammen mit den physikalischen Randbedingungen dafür, dass die Erhaltungsgleichungen erfüllt werden. Die zu simulierende

Problematik darf durch die Randbedingungen nicht über- oder unterbestimmt sein, da die Lösung sonst nicht konvergiert

5.5.2 Konsistenz [37, S. 55], [38, S. 38–39]

Der Unterschied zwischen der physikalischen Gleichung und der diskretisierten Gleichung ist der Abbruchfehler. Geht dieser gegen null, ist das Lösungsverfahren konsistent. Die Konsistenz eines numerischen Verfahrens gibt an, wie genau die physikalischen Gleichungen gelöst werden.

5.5.3 Stabilität [37, S. 55–56], [38, S. 39]

Die Stabilität eines numerischen Verfahrens beschreibt die Anfälligkeit gegenüber Fehlern des Verfahrens und ihre Wirkung auf die Lösung. Ein Verfahren wird als stabil bezeichnet, wenn kleine Fehler innerhalb des Lösungsprozesses nicht zu großen Abweichungen zwischen numerischer und physikalischer Lösung führen.

5.5.4 Konvergenz [37, S. 56], [38, S. 39–40]

Die Konvergenz eines numerischen Verfahrens beschreibt die Annäherung der diskretisierten Gleichungen an die Differentialgleichungen des mathematischen Modelles. Sie gibt an, wie gut die diskretisierte Lösung die physikalische approximiert. Damit ein Verfahren konvergiert werden Konsistenz und Stabilität vorausgesetzt.

5.5.5 Finite-Volumen-Methode FVM [38, S. 43–44, 91–109], [36, S. 105–111], [42]

Das Grundprinzip der FVM besteht darin, dass die Erhaltungsgleichungen (Massen- und Impulserhaltung) auf einzelne Kontrollvolumina übertragen werden. Es wird ein finites Volumengitter erzeugt, auf dem die Lösungen der Erhaltungsgleichungen bestimmt werden. Dabei wird die Integralform der Erhaltungsgleichungen verwendet. Auch bei der FVM wird eine räumliche und eine zeitliche Diskretisierung durchgeführt. Das Gitter wird dabei von mehreren Knoten aufgespannt. Es wird ein zentraler Knoten festgelegt, um den sich die Ränder des Kontrollvolumens anordnen. Bei der räumlichen Diskretisierung wird im dreidimensionalen Fall über die üblicherweise sechs Seiten einer Gitterzelle ein Oberflächenintegral gebildet und ein Volumenintegral über das Volumen dieser Zelle. Im Zweidimensionalen gibt es nur vier Seiten. Die Integrale der Kontrollvolumina werden anschließend approximiert.

Bei der zeitlichen Diskretisierung handelt es sich meistens um explizite oder implizite Euler Verfahren (Vorwärts-Rückwärts Euler). Implizite Verfahren besitzen eine deutlich höhere Genauigkeit als explizite Verfahren und konvergieren schneller. Explizite Verfahren hingegen sind anpassungsfähiger und sparen Rechenaufwand ein, worunter jedoch die Stabilität leidet [37, S. 56–62].

Während FDM die Erhaltungsgleichungen in Differentialform beschreiben und finite Differenzenquotienten zwischen den einzelnen Knotenpunkten gebildet werden und somit sehr flexibel sind, werden bei FEM die Elemente mittels Ansatzfunktionen diskretisiert [38, S. 48]. Im Bauingenieurwesen sind FE-Methoden aufgrund ihrer Genauigkeit sehr beliebt, allerdings eignen sich zur Beschreibung von strömungsmechanischen Vorgängen FV-Methoden am

besten. Dies ist darauf zurückzuführen, dass dieses Verfahren die Größen der Erhaltungsgleichungen konserviert – ein konservatives Diskretisierungsverfahren und dass durch die Aufteilung eines Körpers in finite Volumina, Anpassungen an komplexe geometrische Formen möglich sind. FE-Methoden sind außerdem sehr anfällig für Locking-Probleme, wodurch die Konvergenz verschlechtert wird [43, S. 302]. Darüber hinaus treten bei FE-Methoden häufig Singularitäten, also Spannungsanstiege, an scharfkantigen Ecken auf. Bei der Simulation der plötzlichen Aufweitung könnte dies vor allem im Aufweitungsbereich ein Problem darstellen. Abbildungen 13 und 14 zeigen eine Gegenüberstellung eines FE-Gitters und eines FV-Gitters für ein 2D-Rechteckelement.



Abb. 13: FV-Netz

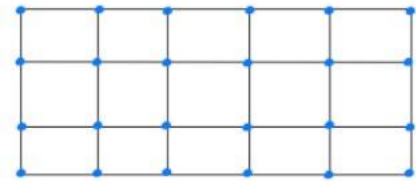


Abb. 14: FE-Netz

5.6 Das Rechenetz

Um die numerische Lösung zu bestimmen, wird ein Rechenetz erzeugt, auf dessen Gebiet die diskretisierten Differentialgleichungen gelöst werden. Dabei handelt es sich um ein Gitternetz, das durch eine Vielzahl an Gitterknoten aufgespannt wird. Man unterscheidet dabei zwischen strukturierten und unstrukturierten Rechenetzen. Hierzu werden die Referenzen [37, S. 63–75], [38, S. 31–37] und [36, S. 115–125].

5.6.1 Strukturierte Rechenetze

Bei unstrukturierten Rechenetzen handelt es sich um gleichmäßig angeordnete Rechenetze. Dabei haben die kartesischen Rechenetze einfache rechtwinkelige Gitterzellen, die gleichmäßig angeordnet sind und parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen (x, y, z) [37, S. 66]. Sie haben den Vorteil, dass die zu verarbeitenden Datensätze sehr gering sind und somit nur kurze Rechenzeiten entstehen. Der große Nachteil jedoch ist, dass sich diese Netze hauptsächlich für rechtwinkelige Geometrien eignen. Besonders bei kreisförmigen Geometrien, wie es in der Rohrhydraulik üblich ist, liegen nur wenige Netzpunkte auf der Oberfläche des Körpers, wodurch die Genauigkeit der Lösung abnimmt. Eine Verbesserungsmöglichkeit wird durch querschnittsangepasste Gitterzellen ermöglicht. Es entstehen dabei jedoch Gitterzellen mit mehr als vier Ecken, was bei der Lösung des Systems zu verlängerten Rechenzeiten führt. Weit effizienter sind dabei die schiefwinkligen Rechenetze, bei denen sich die Gitterlinien der Körpergeometrie anpassen und nicht mehr parallel zu den Koordinatenachsen sind (jetzt ξ, η, ζ). Diese werden in O-, C- und H-Rechenetze unterteilt [37, S. 67]. Dabei sind die konstanten Verläufe der Netzlinien in ξ, η und ζ Richtung jeweils unterschiedlich angeordnet, wobei keine Überschneidung der Verläufe einer selben Variablen stattfindet. So läuft beispielsweise bei dem O-Rechenetz die ξ -Netzlinie um die Geometrie des Körpers herum, während die η -Netzlinie sich von der Geometrie entfernt, aber dennoch senkrecht auf ξ steht. Um die diskretisierte Differenzialgleichung auf dem schiefwinkligen Rechenetz zu lösen, ist

es notwendig eine Koordinatentransformation durchzuführen. Die Grundform bei strukturierten Rechennetzen bilden im Zweidimensionalen Rechtecke und im Dreidimensionalen Hexaeder. Strukturierte Rechennetze sind bei FD-Methoden notwendig, um die räumliche Differenz zwischen zwei Netzpunkten zu bilden. Zusätzlich gehören zu den strukturierten Netzen die blockstrukturierten Rechennetze. Diese setzen sich aus mehreren Gruppen von Netzen zusammen, den Netzblöcken [37, S. 73–74]. Ein wichtiger Aspekt bei diesen Rechennetzen sind die Grenzen zwischen den einzelnen Blöcken. Handelt es sich bei den Grenzen um nicht identische Punkte, müssen diese Übergänge interpoliert werden. Blockstrukturierte Rechennetze sind sehr genau und lassen sich ebenfalls auf komplexe Geometrien anwenden.

5.6.2 Unstrukturierte Rechennetze

Bei unstrukturierten Rechennetzen handelt es sich anders als bei den strukturierten Rechennetzen meistens im zweidimensionalen um Dreiecke und im dreidimensionalen um Prismen oder Tetraeder. Man spricht hier von der Triangularisierung [36, S. 129], also von der Erzeugung von Dreiecken oder Körpern mit dreieckiger Grundfläche. Unstrukturierte Netze findet man bei FV-Methoden sehr häufig wieder. Sie zeichnen sich durch ihre hohe Flexibilität durch Anpassung an komplexe Geometrien oder scharfkantige Ecken, so wie die Aufweitungsebene in der plötzlichen Rohraufweitung aus.

5.7 Lösungsverfahren

Zu diesem Unterkapitel werden die Referenzen [37, S. 79–93], [38, S. 125–144]

Als abschließender Schritt einer numerischen Simulation müssen die diskretisierten Differenzialgleichungen auf dem Rechennetz gelöst werden. Je nachdem ob es sich um lineare oder nicht lineare Gleichungen handelt, gibt es hier verschiedene Möglichkeiten. Lineare Gleichungslöser sind direkte Methoden, wie die Gauß-Elimination oder die LU-zerlegung. In der Regel hat man es jedoch mit nicht linearen Gleichungssystemen zu tun. Es handelt sich hierbei um iterative Methoden. Unterschieden wird zwischen drei maßgebenden Verfahren: *Zentrale Verfahren*, *Upwind Verfahren* und *High-Resolution-Verfahren*. Zentrale Verfahren erwiesen sich als 2. Ordnung genaue Lösungsverfahren, leiden jedoch unter Oszillationen an Stößen. Bei den monotonen Upwind Verfahren entstehen diese Oszillationen nicht, da hier keine Diskontinuitäten erzeugt werden. Diese sind jedoch nur 1. Ordnung und neigen dazu Werte der Strömungsgrößen zu verschmieren. High Resolution Verfahren vereinen die besten Eigenschaften der beiden vorherigen Verfahren. Sie bieten eine gute Genauigkeit und sind stabil. Die Oszillationen werden durch die Einführung der TVD-Bedingungen gekoppelt mit Entropiebedingungen (Total Variation Diminishing) verhindert. High Resolution Verfahren werden deshalb auch gerne als TVD-Verfahren bezeichnet [37, S. 85]. Dabei werden *Flusslimiter* [38, S. 506] verwendet, um Maxima oder Minima zu unterdrücken und somit die Ausbildung von Oszillationen verhindern. Durch die Entropiebedingung wird sichergestellt, dass auch die thermodynamischen Grundsätze eingehalten werden und die Entropie nicht abnehmen kann.

6. Numerische Simulation anhand der plötzlichen Aufweitung

Der Ablauf der numerischen Simulation wird wie in Abbildung 12 gezeigt durchgeführt. Es handelt sich um den Versuch der plötzlichen Aufweitung mit den wie im Versuchsaufbau, Abschnitt 4.1, beschriebenen Maßen. Dabei wird das System Fluid Flow CFX verwendet.

6.1 Geometry [37, S. 106–109, 119–120]

Die Grundlage für jegliche numerische Simulation bildet das Simulationsgebiet. Das geometrische System der Aufweitung wird in dieser Simulation selbst innerhalb des CFX-Moduls erstellt. Dabei wird zuerst die Ebene festgelegt, in der die Strömung fließt. In diesem Fall ist es die YZ-Ebene. An dieser Ebene wird dann auch der Ursprung für das Koordinatensystem des Körpers festgelegt. Unter *Sketching* (Skizzierung) kann ein neuer *Sketch* (Entwurf) konstruiert werden. Dabei wird der erste Kreis mit $D_2 = 0.14092 \text{ m}$ erzeugt. Dazu navigiert man über *Sketching* zu *Diameter* (Durchmesser) und setzt die Maus im Koordinatenursprung an. Schließlich kann im *Sketching* Menü der Wert geändert werden. Über *Extrude* (extrudieren, in die Länge ziehen) wird aus der kreisförmigen Grundfläche schließlich ein Zylinder der Länge $l = 10 D_2 \text{ m}$. An derselben Stelle wird ein zweiter Kreis mit $D_1 = 0.0604 \text{ m}$ erzeugt, und dann auf $l = 1.5 \text{ m}$ extrudiert. Dieser Zylinder stellt das vordere dünnere Rohr der Aufweitung dar. Nach Erzeugung eines Körpers, muss über das Blitzsymbol die neue Darstellung vom Programm erzeugt werden. Es ist auch möglich, für jeden neuen Entwurf ein eigenes Koordinatensystem zu bilden, um für bestimmte Teilstücke nicht auf das globale System achten zu müssen. Für die Anschlussstelle zwischen den beiden Rohren ist die globale Betrachtung jedoch ausreichend. Das System erkennt selbstständig, dass es sich um einen zusammenhängenden Körper handelt, und stellt diesen als *1 Part, 1 Body* dar. Hier wird noch die Einstellung *Solid* zu *Fluid* geändert. Dies beeinflusst das Element *Meshing* direkt indem andere Voreinstellungen gewählt wurden. In Abbildung 15 stellen die gelb umrandeten Kreise die beiden Entwürfe dar, und die sich anschließenden lila Zylinder die jeweiligen Extrusionen.

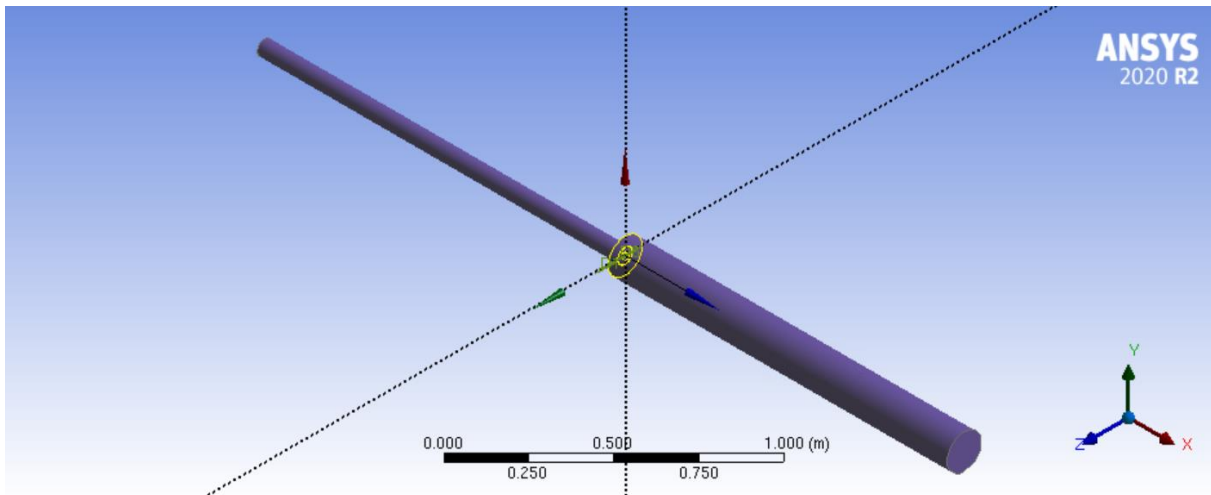


Abb. 15: Ansys Geometrie

6.2 Mesh [37, S. 109–110, 120–124], [44]

Das Rechenetz ist entscheidend für den erfolgreichen Ablauf einer numerischen Simulation. Sobald der zweite Reiter im Ablaufschema, Abbildung 12, geöffnet wird, erstellt das Programm ein Standardnetz für den Körper. Dabei handelt es sich noch um Hexaederelemente. Abbildung 16 zeigt beispielhaft ein Standardnetz für einen zylindrischen Körper, bei dem deutlich die Hexaederstruktur zu erkennen ist. Anschließend gilt es das Netz zu verfeinern. Der erste Schritt ist jedoch die Randflächen zu benennen, da so später Arbeitsaufwand im Setup minimiert wird und es zur Übersichtlichkeit beiträgt. Dazu wird von der jeweiligen Fläche eine *Named Selection* (benannte Auswahl) erstellt. Hierbei wird der Anfang des dünneren Rohres als *Inlet* (Einlass), die Aufweitungsebene als *Aufweitung* und das Ende des breiteren Rohres als

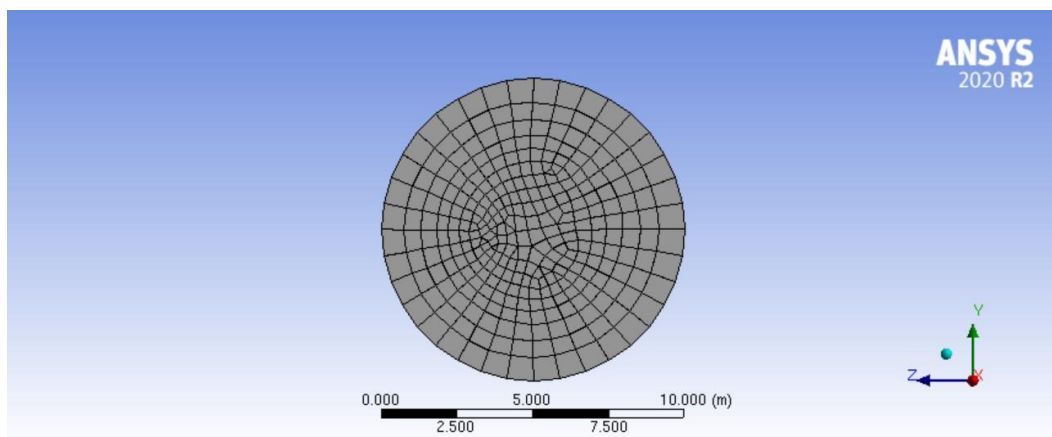


Abb. 16: Standardnetz

Outlet (Auslass) definiert. Des Weiteren kann über *Selection Plane* (Ebene auswählen) ein Schnitt durch den Körper gezogen werden, um somit kritische Stellen des Netzes leichter zu entdecken. Der wichtigste Reiter innerhalb des Strukturbaums der Netzerzeugung ist mit *Mesh* betitelt.

Durch Auswählen des Reiters *Mesh* können schließlich Netzadaptationen vorgenommen werden. Bevor man jedoch mit der Verfeinerung des Netzes beginnt, müssen die Voreinstellungen *Defaults* als Rahmenbedingungen festgesetzt werden. Dabei ist die *Solver Preference* auf CFX gestellt, und die *Element Order* (Ordnung der Elemente) auf linear. Hierbei kann zwischen linear und quadratisch gewählt werden, was sich auf die Anordnung der Knotenpunkte bezieht. Bei linearer Ordnung gibt es nur Knotenpunkte an den Ecken einer Zelle, während bei quadratischer Ordnung ein zusätzlicher Knoten auf den Kanten des Elementes eingefügt wird [44]. Dies kann besonders bei schafkantigen oder stark verrundeten Körpern zu genaueren Lösungen führen, da hier über den zusätzlichen Knotenpunkt interpoliert wird. Dies ist jedoch auch mit zusätzlichem Rechenaufwand verbunden. Eine lineare Ordnung ist hier ausreichend. Unter *Element Size* wird die Elementgröße definiert. Hier wurde 0.003 m gewählt. Man hat auch die Möglichkeit das Programm selbst Netzadaptationen vorzunehmen. Dazu muss bei der Abfrage der nächsten Reiter nach den Standardeinstellungen, *Sizing* und *Inflation*, beide durch *Yes* aktiviert werden. Bei dieser numerischen Simulation wurden jedoch beide Anpassungen selbst vorgenommen. Unter Qualität hat man die Möglichkeit *Smoothing* (Glättung) zu optimieren. Dabei kann zwischen drei Stufen (niedrig, mittel und hoch) gewählt werden. Die Glättung bewegt Knoten oder ganze Zellen so, dass sie an ihre Nachbarn angepasst werden. Dies trägt zur Qualität des Netzes bei. Für diese Simulation wurde die Glättung hoch eingestellt.

6.2.1 Inflation

Ein sehr beliebtes Werkzeug ist die *Inflation* [38, S. 121-122]. Dabei wird ein Prismengitter erzeugt. Die *Inflation* erwartet zwei Eingaben, die über die Geometrie ausgewählt werden können. Dabei handelt es sich um *Scope* (Umfang) und *Face* (Fläche). Als Umfang wird der gesamte Körper festgelegt und als Fläche nur die Rohrwand. Anschließend werden dann noch die Anzahl an *Layers* (Schichten) festgelegt, die an der Fläche aufgezogen werden. Abschließend wird noch die Option *Total Thickness* ausgewählt. Dadurch werden Schichten an der ausgewählten Fläche erzeugt. Es öffnen sich drei weitere Eingabemöglichkeiten: *Number of Layers*, *Grwoth Rate* und *Maximum Thickness* (Anzahl an Schichten, Wachstumsrate und maximale Dicke). Hier werden 20 Schichten mit einer Wachstumsrate von 1.1 und ein maximaler Dicke von 0.003 m eingestellt. Das Programm erzeugt dadurch 20 Schichten, die jeweils um das 1.1-fache wachsen, bis sie maximal eine Dicke von 0.003 m erreichen. In Abbildung 17 sieht man sehr deutlich das Prismengitter und die in schwarz am Rand dargestellt die 20 Schichten.

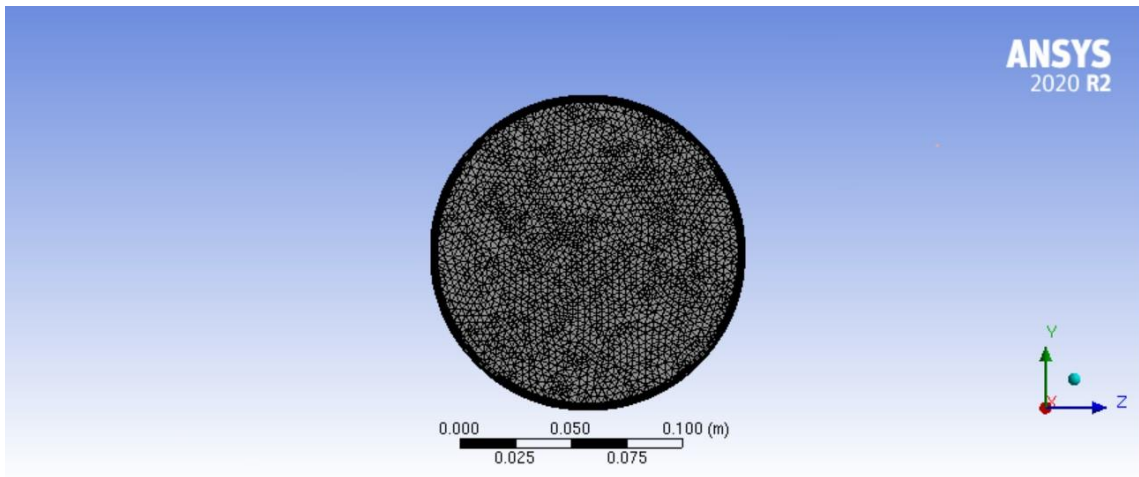


Abb. 17: Angepasstes Netz mit Inflation

6.2.2 Sizing

Unter *Sizing* (Dimensionierung) gibt Ansys einem die Möglichkeit das Netz an bestimmten Stellen zusätzlich zu verfeinern. Dabei kann es sich um einzelne Punkte, Flächen oder sogar ganze Körper handeln. In dieser Simulation wird durch *Face Sizing* die Netzverfeinerung an einer bestimmten Fläche durchgeführt, die Aufweitungsebene. Als kritischste Stelle des Körpers ist eine lokale Netzverfeinerung hier zielführend, um ein gut aufgelöstes Ergebnis zu erhalten und um den Druck und Geschwindigkeitsabfall an dieser Stelle darstellen zu können. Abbildung 18 zeigt sehr deutlich die verfeinerte Netzstruktur in der Aufweitungsebene.

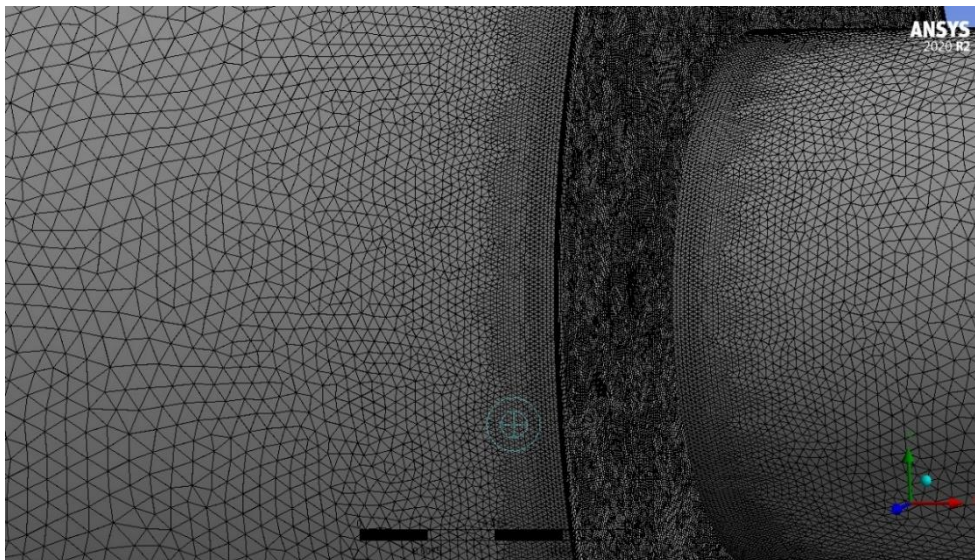


Abb. 18: Face Sizing Aufweitungsebene

Um das Netz nach jeder eingegebenen Netzverfeinerung darzustellen, wird das Blitzsymbol mit der Aufschrift *Generate* (Generieren) betätigt. Der letzte Unterpunkt des Reiters Mesh heißt *Statistics*. Dabei wird die Anzahl der bis zum jeweiligen Zeitpunkt generierten Knoten und Elemente gezeigt. In diesem Modell wurden 4 544 446 Knoten und 14 509 925 Elemente erzeugt. Die Anzahl der Knoten und Elemente beeinflusst dabei sehr stark die von dem

Programm benötigte Rechenzeit, um das Netz zu erzeugen. Abbildung 19 zeigt die Draufsicht auf die y-Achse des *Selection Plane* Schnittes.

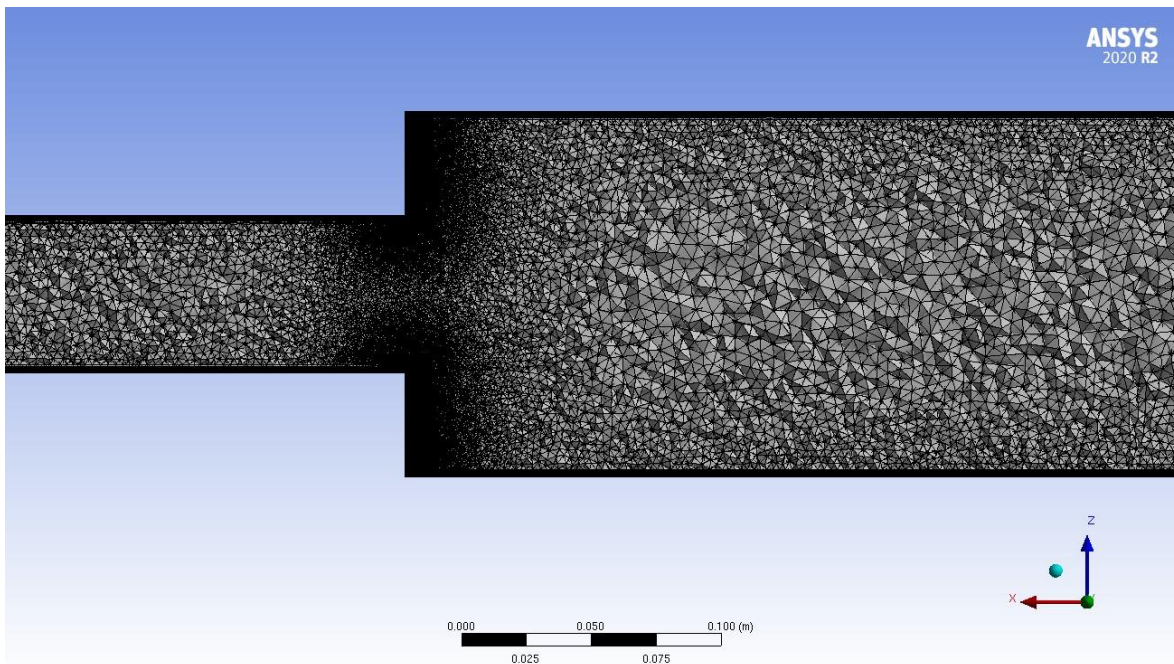


Abb. 19: Draufsicht Selection Plane

6.3 Setup [37, S. 110–111, 124–134], [44]

Der dritte Reiter aus Abbildung aus Abbildung 12 ist die Eingabe der Rechenparameter im Setup. Durch Anwählen der Funktion *Boundary* (Grenze) in der Taskleiste, werden nun die Randflächen die im Mesh bereits als *Named Selections* gekennzeichnet wurden definiert. Zusätzlich werden noch die beiden Mantelflächen der Rohre als *Wall* (Wand) definiert. Als erster Punkt im Strukturbaum wird unter *Analysis Type, Steady State* (stationärer Zustand) festgelegt. Unter dem Reiter *Default Domain*, werden die ähnlich wie bei der Erzeugung des Rechnetzes die Voreinstellungen festgelegt. *Default Domain* unterteilt sich in *Basic Setting* (Grundeinstellungen) und *Fluid Models* (Modelle).

6.3.1 Basic Settings [38, S. 126-127].

Hierbei wird für eine Strömungsberechnung unter *Domain Typen, Fluid Domain* und als verwendetes Material schließlich Wasser als newtonsches Fluid eingestellt und dies als *Continuous Fluid* (kontinuierliche, nicht verdichtet Flüssigkeit) definiert. Als Referenzdruck wird 1 atm gewählt.

6.3.2 Fluid Models

Da hier keine thermischen Einwirkungen berücksichtigt werden müssen, wird der *Heat Transfer* mit *none* als nichtig erklärt. Unter *Turbulence* wird nun das in Abschnitt 5.4 erklärte SST-Modell als Turbulenzmodell festgelegt [37, S. 127-129].

Schließlich wird am Einlass ein Massenstrom als Eingangsparameter definiert. Dieser wird dann entsprechend den Durchflüssen als 7, 10, 15, 17, 20, 22, 25 [kg/s] angepasst. Am Auslass wird ein Referenzdruck von 1 *atm* als Parameter definiert. Im Strukturbaum werden als letztes unter *Solver Control* (Rechenlauf) die Randbedingungen für die Berechnung gesetzt. Hier wird das *High Resolution Verfahren*, wie in Abschnitt 5.7 beschreiben als Lösungsverfahren definiert. Mit *Convergence Control* und *Convergence Criteria* werden die Randbedingungen zur Erfüllung der Konvergenz gesetzt. Hierbei sollen mindestens 1 Iteration und maximal 200 Iterationen durchgeführt werden. Die Erhaltungsgleichungen sollen bis auf einen Fehler von $1e-4$ erfüllt werden, sodass das Abbruchkriterium auf diesen Fehler eingestellt wird. Die Simulation wird dementsprechend beendet, sobald alle Residuen unter das Abbruchkriterium fallen oder 200 Iterationen durchgeführt wurden. In Abbildung 20 wird die Strömungsrichtung

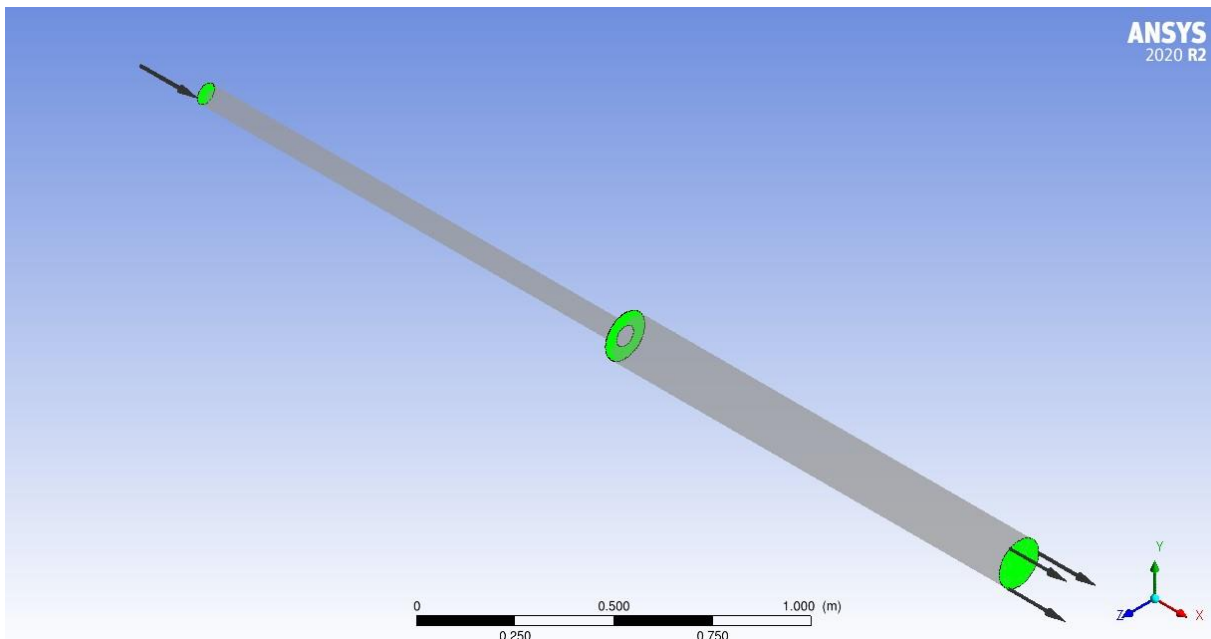


Abb. 20: Setup

durch die Pfeilrichtung am Ein- und Auslass dargestellt. Die grün markierten Flächen zeigen die Randflächen aus den Named Selections.

6.4 Solution [37, S. 111, 134–137]

Sobald die Berechnung gestartet wurde, erscheint im linken Fenster ein Graph, der die Konvergenzverläufe für *Mass* und *Momentum*, Massenerhaltung und Impulserhaltung in die drei Raumrichtungen, darstellt. Im rechten Fenster werden Details zu den einzelnen Iterationsschritten gezeigt. Abbildung 21 zeigt beispielhaft für eine Simulation mit 10 kg/s als definierten Massenstrom die vier Verläufe der Erhaltungsgleichungen bis zum Erreichen des Abbruchkriteriums. Dabei wurden 47 Iterationen durchgeführt. Dabei ist klar zu erkennen, dass das Residuum des Massenstroms schnell unter das Abbruchkriterium fällt, während die Residuen aus der Impulserhaltung deutlich länger brauchen. Die Impulserhaltung in x-Richtung, hier in grün als U-Mom. dargestellt, ist als Komponente der Hauptströmungsrichtung ausschlaggebend für den Rechenaufwand von 47 Iterationen.

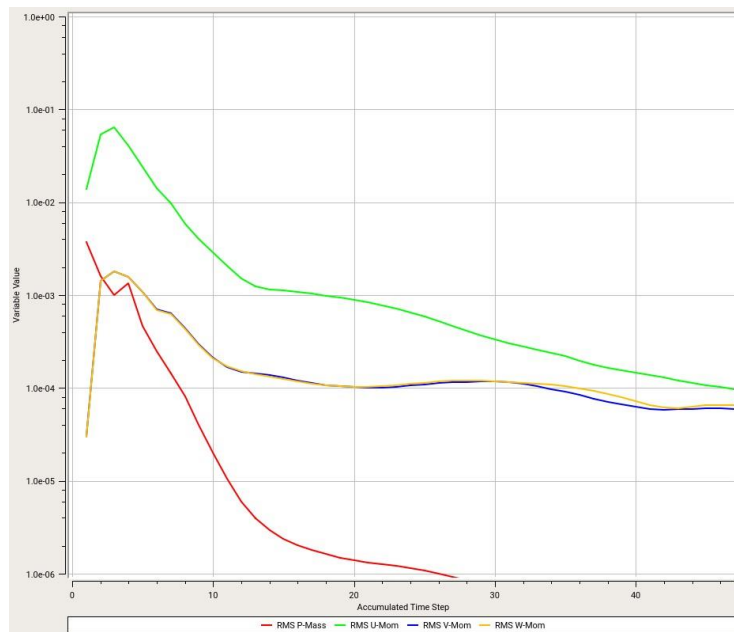


Abb. 21: Solution

```

OUTER LOOP ITERATION = 47                      CPU SECONDS = 1.514E+04
-----
|      Equation      | Rate | RMS Res | Max Res | Linear Solution |
+-----+-----+-----+-----+-----+
| U-Mom              | 0.95 | 9.7E-05 | 3.9E-03 | 3.6E-02 OK|
| V-Mom              | 0.99 | 6.0E-05 | 2.2E-03 | 4.3E-02 OK|
| W-Mom              | 0.99 | 6.5E-05 | 2.7E-03 | 4.8E-02 OK|
| P-Mass             | 0.95 | 1.8E-07 | 2.6E-05 | 14.4 7.9E-02 OK|
+-----+-----+-----+-----+-----+
| K-TurbKE           | 0.94 | 1.7E-04 | 6.4E-03 | 5.8 8.2E-02 OK|
| O-TurbFreq         | 0.92 | 1.1E-05 | 3.2E-04 | 10.5 1.6E-03 OK|
+-----+-----+-----+-----+-----+

CFD Solver finished: Tue Nov 9 12:24:33 2021
CFD Solver wall clock seconds: 6.3599E+02

=====
Termination and Interrupt Condition Summary
=====

CFD Solver: All target criteria reached
(Equation residuals)

=====
Boundary Flow and Total Source Term Summary
=====

```

Abb. 22: Solution Iterationsdetails

6.5 Results [37, S. 111–112, 137–143]

Im letzten Punkt des Strukturbaums aus Abbildung 12 können die Ergebnisse der Simulation eingesehen werden. Dabei gibt es die Möglichkeit Contourplots und Graphen erstellen zu lassen. In Abbildung 23 ist ein Contourplot durch die Schnittebene des *Selection Plane* zu sehen. Dabei wird die Geschwindigkeitsentwicklung farblich dargestellt. Des Weiteren wird eine Linie über die Rohrwand des breiteren Rohres im Abstand $D_2/2 = 0.07046\text{ m}$ in y Richtung und über die Rohrlänge von 1.41 m gezogen. Die zweite Linie wird in Strömungsmitte von -0.5 m bis 1.41 m durch den Ursprung bei $y = 0$ gezogen. Entlang beider Linien können dann in einem Graphen verschiedene Werte ausgegeben werden, beispielsweise einer die Druckentwicklung über die Länge, an der durch die Linie definierten Höhe darstellt. Die Daten werden anschließend in Matlab eingelesen und dienen der Versuchsauswertung. Der in Abbildung 23 dargestellte Contourplot stammt aus einer Simulation mit 22 kg/s als definierter Massenstrom. Dabei sind die beiden zuvor erklärten Linien in Gelb über den Rand und in Strömungsmitte dargestellt. Zudem wird deutlich, dass die Geschwindigkeit im dünneren Rohr D_1 deutlich höher ist als im breiteren Rohr D_2 nach der Verengung. Dies kann mit der Kontinuitätsgleichung 2.13 erklärt werden. Dabei muss die kleinere Querschnittsfläche mit einer größeren Geschwindigkeit durchströmt werden, für einen konstanten Durchfluss. Darüber hinaus geht die Geschwindigkeit nach der Aufweitung an den Wänden gegen 0, bis sie langsam wieder ansteigt. Dies wird anhand der dunkelblau unterlegten Farbtons dargestellt. Es verdeutlicht auch die in Abschnitt 3.4 vorgestellte Theorie der Ausbildung von Ablösungszonen nach der Aufweitung. Demnach sorgen Verwirbelungen für den Geschwindigkeitsabfall. Erst nach einer bestimmten Länge stellt sich wieder eine konstante Geschwindigkeit an den Rändern ein. Das ist der hellblaue Bereich in Abbildung 23.

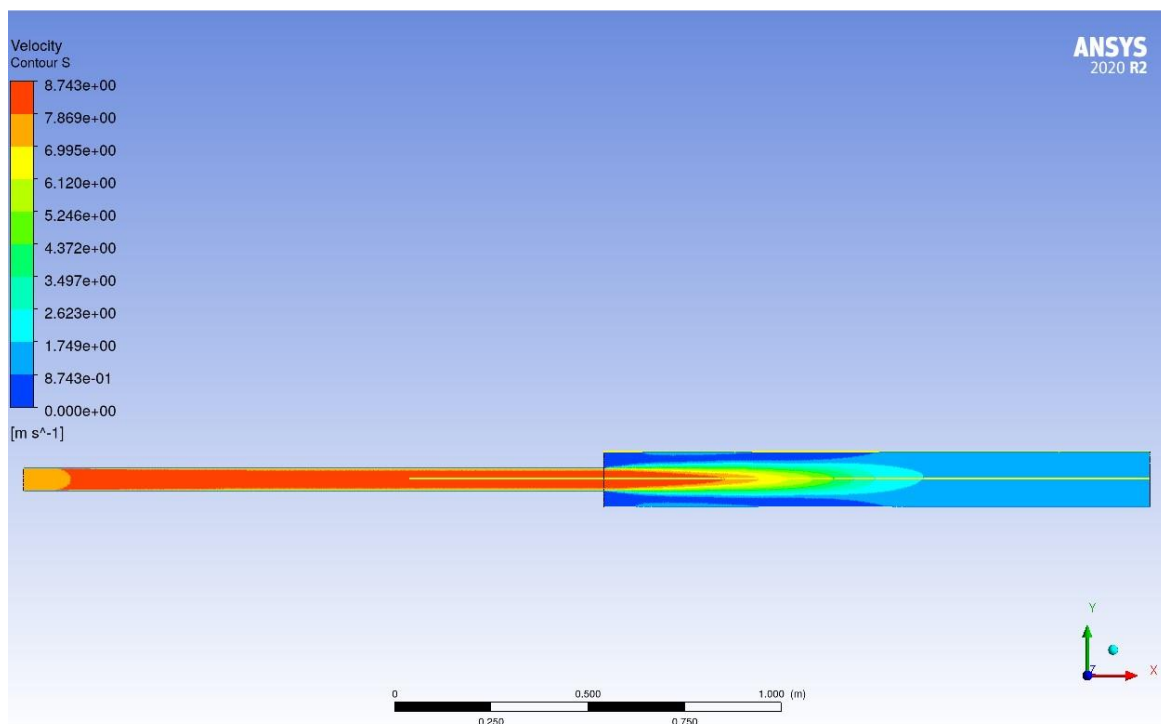


Abb. 23: Contourplot Geschwindigkeitsausbreitung

6.6 Fehler [38, S. 41–42, 518–520, 527–530] und [36, S. 234–235]

Da numerische Simulationen sich der reellen Lösung nur annähern, sind Fehler unvermeidbar. Sie sollten jedoch so gering wie nötig gehalten werden. Dabei wird zwischen drei hauptsächlichen Fehlergruppen unterschieden: *Modellfehler*, *Diskretisierungsfehler* und *Iterationsfehler* [38, S. 41]. Bei *Modellfehlern* handelt es sich um Fehler, die bei der Lösung des mathematischen Systems mit der vorgegebenen Geometrie und Randbedingungen entstehen. Dabei können mathematische Modelle wie die Navier-Stokes-Gleichungen zwar numerisch exakt gelöst werden, jedoch stehen sie in Zusammenhang mit Geometrie und Randbedingungen, die stellenweise nicht exakt oder eindeutig zugewiesen werden können. Als *Diskretisierungsfehler* bezeichnet man die Abweichung zwischen der exakten und der numerischen Lösung. Dieser Fehler ist schwer deuten, da man die exakte Lösung nicht genau kennt. Eine bekannte Methode der Fehlerschätzung ist hier die Richardson Extrapolation [38, S. 69–71, 529–530]. Wie bereits in Abschnitt 6.3 erklärt, werden Iterationen durchgeführt, bis die Residuen unter ein vorgegebenes Abbruchkriterium fallen. Dabei wird die iterative Lösung, unter anderem durch Rundungsfehler, niemals identisch mit der exakten Lösung sein. Dies bezeichnet man als *Iterationsfehler*.

7. Auswertung der Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die experimentellen Ergebnisse des Versuches, die theoretischen Berechnungen aus der Impulsbilanz für die plötzliche Aufweitung und die numerischen Simulationsergebnisse miteinander verglichen und ausgewertet. Zusätzlich werden die experimentellen Ergebnisse und die Ergebnisse der Impulsgleichung mit der Bernoulli-Gleichung mit dem Borda–Carnotschen Zusatz verglichen. Dabei wird zuerst die Entstehung der maximalen Druckdifferenz Δp ausgewertet und verglichen. Anschließend wird die Entfernung der maximalen Druckdifferenz zur Aufweitungsebene behandelt. Die Entfernungen zur Aufweitungsebene werden sowohl in Metern als auch in Vielfachen des Rohrdurchmessers $x * D_2$ dargestellt ($D_2 = 0.14092 \text{ m}$). Das Ziel der Auswertung ist es, den Einfluss des Volumenstroms auf das Druckverhalten, sowie die entfernungsabhängige Einstellung eines maximalen Druckgradienten und eines maximalen Differenzdruckes Δp zu ermitteln, sowie die Anwendung der nicht idealisierten Impulsbilanz zu verifizieren.

7.1 Entstehung des maximalen Druckunterschiedes

7.1.1 Experimentelle Ergebnisse

Aus den 30 Messwerten pro Messstelle (MS1 bis MS3) wird jeweils ein Mittelwert gebildet. Dadurch können zufällige Messabweichungen reduziert werden. Die Mittelwerte werden in Matlab eingelesen und mit der entsprechenden Formel aus der Kalibrierung aus Abschnitt 4.2.1 verknüpft. Für die Volumenströme 7 l/s bis 17 l/s werden die Mittelwerte für x in Formel 4.1 eingesetzt. Für die Volumenströme 20 l/s bis 25 l/s wird Formel 4.2 genutzt. Dabei werden die Ergebnisse in Millibar ausgegeben. Um einheitlich mit Pascal zu arbeiten, werden die Werte mit dem Faktor 100 Pa/mbar multipliziert.

Tab. 1: Experimentelle Messergebnisse

$Q [\text{l/s}]$	MS 1 [Pa]	MS 2 [Pa]	MS 3 [Pa]
7	971.76	969.16	976.24
10	1877.19	1889.91	1817.92
15	4342.72	4282.41	4245.59
17	5635.23	5617.60	5612.38
20	7007.73	6985.93	7026.40
22	8450.09	8411.93	8455.12
25	11142.30	11166.60	11128.80

Tabelle 1 zeigt die Ergebnisse für die drei Messstellen in Abhängigkeit des eingestellten Volumenstroms. Hierbei ist es wichtig zu beachten, dass bei den Messergebnissen bis 17l/s der Differenzdrucksensor mit der Messspanne von 0 mbar bis 60 mbar verwendet wurde und für die Volumenströme 20l/s , 22l/s und 25l/s der Sensor mit der Messspanne von 60 mbar bis 600 mbar . Die Messungenauigkeit der Sensoren beträgt 0.2% der jeweiligen Messspanne, wodurch sich Messungenauigkeiten von 0.12 mbar für den ersten Sensor und 1.08 mbar für den zweiten Sensor ergeben. Diese Messungenauigkeiten werden in Abschnitt 7.1.4 bei dem Vergleich der Ergebnisse aufgegriffen. Die US-amerikanischen Forscher **H.C.Schuett** [11], **N.J. Lipstein**[12] und **W.H. Archer** [13] sind die drei maßgebenden Quellen zur Auswertung der Ergebnisse. Sie untermauern alle drei die geschwindigkeitsabhängige Ausbildung des Differenzdruckes Δp . Lipstein kann den Bereich des maximalen Druckgradienten als Entfernung von der Aufweitungsebene sogar eingrenzen. Dies wird in Abschnitt 7.2, entfernungsabhängiges Druckverhalten, behandelt. Die drei Forscher sehen außerdem einen Zusammenhang zwischen dem Durchmesserverhältnissen D_1/D_2 und der Druckentwicklung über den Rohrverlauf. Dieser Zusammenhang kann im Rahmen des Versuchsaufbaues jedoch nicht behandelt werden. Bei Betrachtung der Messergebnisse zeigt sich bereits, dass mit steigendem Durchfluss und nach der Kontinuitätsgleichung 2.13, auch steigender Geschwindigkeiten v_1 und v_2 , der Differenzdruck Δp zunimmt. Dieser Zusammenhang wird in der Auswertung der numerischen Ergebnisse genauer behandelt.

7.1.2 Ergebnisse aus der Impulsbilanz

Gleichung 3.35 wird mit den zugehörigen Koeffizienten in Matlab eingegeben. Die Impulsbilanz ist abhängig von dem Volumenstrom und dem Verhältnis der Querschnittsflächen A_1/A_2 . Gleichung 3.35 betrachtet sowohl den Gegendruck p_r aus Gleichung 3.34 der auf die Aufweitungsebene wirkt, als auch die Aufweitungskoeffizienten $\beta_{1,2}$ und den Druckkoeffizient cp . Die Formel gibt den auf den genannten Variablen und Koeffizienten basierenden Druckunterschied $\Delta p = p_2 - p_1$ wieder. Für die Berechnung wird hier jeweils der Durchfluss geändert. Tabelle 2 zeigt die Ergebnisse der Berechnung mittels Matlab für die jeweiligen Durchflüsse und gibt in Abbildung 24 zusammen mit den Messwerten eine graphische Darstellung der Ergebnisse in Abhängigkeit des Durchflusses. Eine Gegenüberstellung der Ergebnisse wird in Abschnitt 7.1.4 behandelt. Dabei lässt sich ebenfalls ein Zusammenhang zwischen Durchfluss und Druckunterschied Δp erkennen.

Tab. 2: Ergebnisse der Impulsbilanz

Q [l/s]	Δp [Pa]
7	896.02
10	1828.62
15	4114.38
17	5284.70
20	7314.46
22	8850.50
25	11428.84

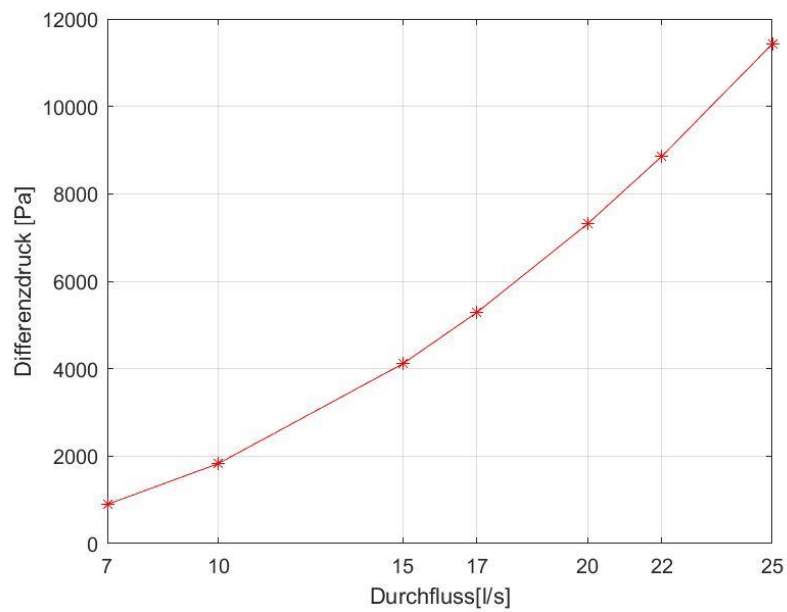


Abb. 24: Ergebnisse der Impulsbilanz

7.1.3 Ergebnisse aus numerischer Simulation

Die numerische Simulation wird nach dem in Abschnitt 6 beschriebenen Schema durchgeführt. Dabei werden im Setup 7 kg/s, 10 kg/s, 15 kg/s, 17 kg/s, 20 kg/s, 22 kg/s und 25 kg/s als Massenstrom definiert. Im fünften Punkt, *Results*, werden graphische Darstellungen erstellt, die den Druckverlauf sowie den Geschwindigkeitsverlauf in Abhängigkeit der Entfernung von der Aufweitung ($x = 0 \text{ m}$) darstellen. Der erste Graph verwendet als Orientierung die in Abbildung 23 dargestellte gelbe Linie entlang Wand und der zweite Graph die Linie entlang in der Rohrachse. Die Daten werden als Excel-Datei gespeichert und in Matlab zur Auswertung eingelesen. Die Abbildungen 25 und 26 zeigen einen typischen Druckverlauf entlang der Wand und entlang der Rohrachse. Die folgenden Graphen wurden aus einer Simulation mit 22 kg/s als Massenstrom entnommen

Der Graph aus Abbildung 26 hat seinen Ursprung 0.5 m vor dem Graph aus Abbildung 25, da dieser noch einen halben Meter des Druckverlaufes aus dem ersten Rohr $D_1 = 0.06 \text{ m}$ darstellt. Beide Graphen erreichen ihr Minimum nicht in der Aufweitungsebene bei $x = 0$

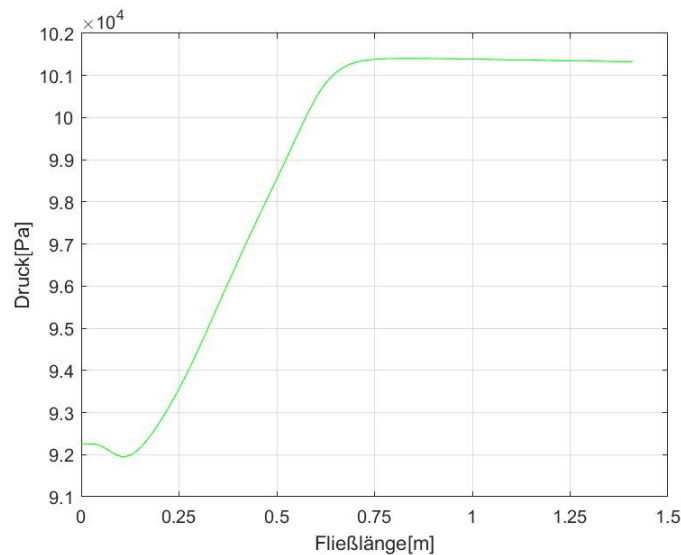


Abb. 25: Druckverlauf entlang der Wand

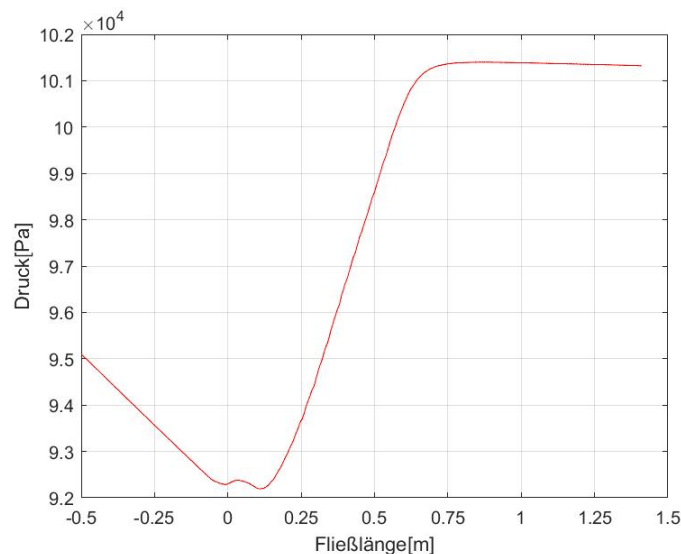


Abb. 26: Druckverlauf entlang der Rohrachse

Zusammen mit den Auswertungen der restlichen Simulationen zeigt sich, dass die Minima zwischen $0.5 D_2$ und $1 D_2$ liegen, also zwischen $0.07 m$ und $0.1 m$. Dies stimmt auch mit Lipsteins [12] Erkenntnissen überein, wonach sich aus seinen Diagrammen zu „*Sudden expansion static pressure rise*“ das Minimum nach der Aufweitung bei ca. $X/(D_2 - D_1) = 1$ befindet. X stellt dabei die Entfernung zur Aufweitungsebene dar. Dies kann darauf zurückzuführen sein, dass der Druck noch eine gewisse Fließlänge benötigt, bis sich der Druck im Strahl dem Druck im großen Rohr angeglichen hat.

Tab. 3: Simulationsergebnisse entlang der Wand und Rohrachse

Q [l/s]	Wand [PA]	Rohrachse [PA]	σ
7	928.03	925.33	1.91
10	1900.10	1889.00	7.85
15	4267.71	4231.06	0.61
17	5444.00	5403.02	0.53
20	7543.44	7566.89	0,22
22	9144.56	9095.58	0.38
25	11773.69	11726.05	0.29

Tabelle 3 stellt die Simulationsergebnisse für den maximalen Druckunterschied Δp zwischen der Aufweitungsebene ($x = 0$) und Rohr D_2 dar. Dabei wird zwischen Wand und Rohrachse unterschieden. Zusätzlich wird die Standardabweichung der Messpaare dargestellt [34, S. 340–347, 662–667]. Formel 7.1 stellt den Mittelwert und Formel 7.2 die Standardabweichung dar:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (7.1)$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (7.2)$$

Bei diesen Formulierungen handelt es sich um sehr gute Schätzung der Wahrscheinlichkeitsfunktionen zur Beschreibung des Mittelwertes und der Standardabweichung, wodurch $\mu \approx \bar{x}$ und $\sigma \approx s$ gilt. Durch die niedrigen Standardabweichungen aus Tabelle 3 kann von einer guten Genauigkeit der Messungen ausgegangen werden. Die Druckverläufe für alle sieben Durchflüsse, sind zum einen entlang der Wand in Abbildung 27 und zum anderen entlang der Rohrachse in Abbildung 28 dargestellt. Durch die y- Achsenskalierung erscheinen die Verläufe niedrigerer Durchflüsse sehr stark gestreckt. Anhand der Tabelle 3 und den beiden

Graphen aus den Abbildungen 27 und 28 lassen sich folgende Schlussfolgerungen ziehen: Der eingestellte Volumenstrom Q hat einen starken Einfluss auf die Entstehung des maximalen Druckunterschiedes Δp . Nach der Kontinuitätsgleichung 2.13, führt eine Zunahme des Volumenstroms unmittelbar zum Anstieg der Geschwindigkeiten v_1 und v_2 . Die Geschwindigkeit v_2 wird als die maßgebende Geschwindigkeit betrachtet, da sie in Zusammenhang mit den örtlichen Verlusten hinter der Aufweitung steht. Diesen Druckverlust bei der plötzlichen Aufweitung stellt auch Schuett [11] in seinen Versuchsergebnissen als „*Loss of Pressure Head due to Sudden Enlargement*“ dar. In seinem Versuch bildet er an einer Rohraufweitung $D_2/D_1 \approx 1.68$ mit drei unterschiedlichen, gemessenen, ansteigenden Geschwindigkeiten v_2 die Druckhöhe ab. Anhand der Querschnittsfläche lassen sich die Durchflüsse berechnen, wodurch sich $Q_1 = 6.54 \text{ l/s}$, $Q_2 = 11.75 \text{ l/s}$ und $Q_3 = 16.91 \text{ l/s}$ ergeben. Wie die numerische Simulation kann auch Schuett einen Zusammenhang des Durchflusses bzw. der Geschwindigkeit mit dem Druckverlust und dem sich daraus einstellenden maximalen Druckunterschiedes zwischen Aufweitungsebene und Rohr D_2 feststellen. Bei Betrachtung der Simulationsergebnisse aus Tabelle 3, stellen sich die Ergebnisse der Druckdifferenz Δp entlang der Wand bis auf einen Ausreißer als größer heraus als die Ergebnisse entlang der Rohrachse. Die Druckunterschiede zwischen Rohrachse und Wand können auf die durch die Wandrauheit bedingten Reibungsverluste zurückgeführt werden [3, S. 284, 350–352], [16]. Dabei nimmt die Geschwindigkeit mit abnehmender Entfernung zur Rohrachse ab. Im Wandbereich stellen sich kleinere Geschwindigkeiten ein, wodurch in den Simulationsergebnissen größere Differenzdrücke zwischen Wand und Aufweitungsebene gemessen werden. Besonders im turbulenten Bereich hinter der Aufweitung entstehen dabei große Unterschiede in der Geschwindigkeitsausbreitung, wie in Abbildung 23 bereits deutlich zu sehen ist. Da im Bereich des maximalen Druckes im Rohr D_2 deutlich weniger Turbulenzen entstehen, sind hier die Geschwindigkeitsdifferenzen zwischen Wand und Strömungsmitte geringer als noch direkt hinter der Aufweitungsebene im stark turbulenten Bereich.

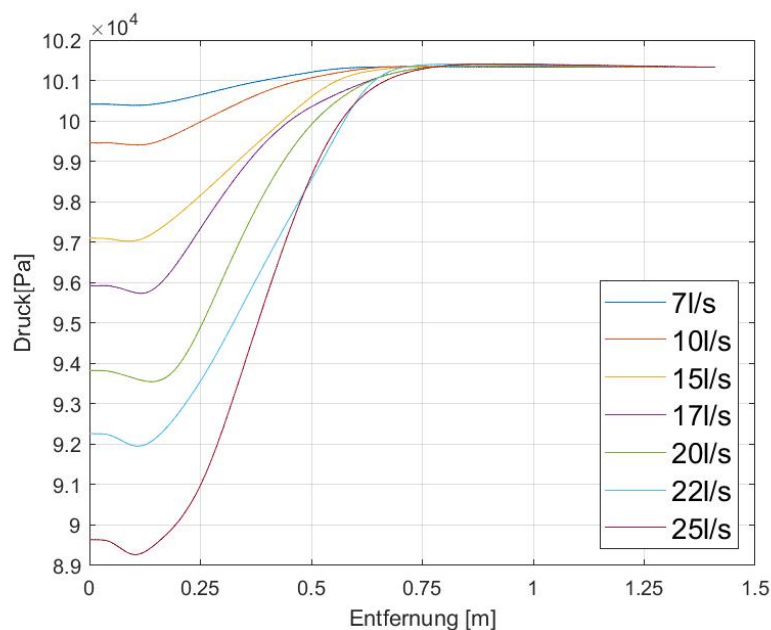


Abb. 27: Druckverläufe entlang der Wand

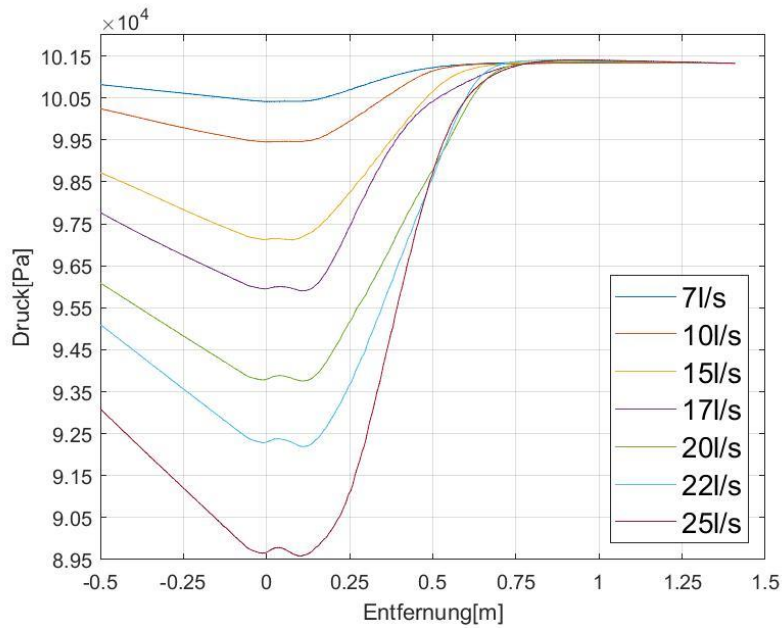


Abb. 28: Druckverläufe entlang der Rohrachse

Die Graphen in den Abbildungen 29 und 30 zeigen den Verlauf der Strömungsgeschwindigkeiten einer Simulation von 22 kg/s entlang der Rohrachse und entlang der Wand. Dabei beginnt der Geschwindigkeitsverlauf entlang der Rohrachse wieder 0.5 m vor der Aufweitung. Bis zur Aufweitung erkennt man die höhere Geschwindigkeit v_1 mit ca. 9 m/s . Nach der Aufweitung fällt die Geschwindigkeit, jetzt v_2 , dann kontinuierlich nach Gleichung 2.13 bis sie sich einem konstanten Wert von ca. 1.5 m/s annähert. Im Gegensatz zum stetigen Verlauf der „Variable“ aus Abbildung 29, weist die „Variable“ aus Abbildung 30 Fluktuationen auf. Dabei hat diese seinen Ursprung in der Aufweitungsebene, dem Ort der minimalen Geschwindigkeit des Systems. Der unstetige Verlauf des Graphen in Abbildung 30 ist auf die durch die Expansion des Strahles entstehenden Verwirbelungen und Rückströmungen zurückzuführen. Des Weiteren lässt sich deutlich erkennen, dass die Geschwindigkeit in der Aufweitungsebene gegen null geht, da hier lediglich eine Zirkulationsströmung aktiv ist. Danach steigt sie schnell an und fällt schließlich bis auf ein Minimum bei 0.5 m . Nach einem erneuten Anstieg pendelt sich v_2 bei ca. 0.4 m/s ein. Dies hängt unmittelbar mit dem Rückstromwirbel aus Abbildung 33 zusammen. Das Minimum der Geschwindigkeitsverteilung bei 0.5 m stellt somit das Ende des Wirbels dar. Diese Krümmungswechsel sind auf die Verwirbelungen in den Ablösungszonen hinter der Aufweitung zurückzuführen. Im turbulenten Bereich direkt nach der Aufweitung entsteht hier ein Rückstrom, den auch Lipstein [12] in seinen Versuchsergebnissen beobachten kann. Die geringere Geschwindigkeit entlang der Rohrwand ist damit ein maßgebender Faktor für die größeren Simulationsergebnisse entlang der Wand als entlang der Rohrachse und die damit verbundenen höheren Druckunterschiede Δp . Die Zunahme des Druckes bei abnehmender Geschwindigkeit durch die Querschnittsänderung wird als Venturi-Effekt bezeichnet, da diese gegensätzliche Beziehung sich in einem Venturi Rohr gut veranschaulichen lässt und ist in Abbildung 31 dargestellt. Da die mathematische Herleitung hierfür auf der Bernoulli-Gleichung beruht, Gleichung 3.23, ist

diese Beziehung von Druck und Geschwindigkeit auch als Bernoulli-Effekt [3, S. 285, 309–310] zu finden. Dabei entstehen bei großen Geschwindigkeiten kleine Drücke und umgekehrt. Aufgrund der niedrigen Abweichungen in Tabelle 3, sind die Unterschiede der beiden Messstellen minimal und man erhält sehr gute Ergebnisse.

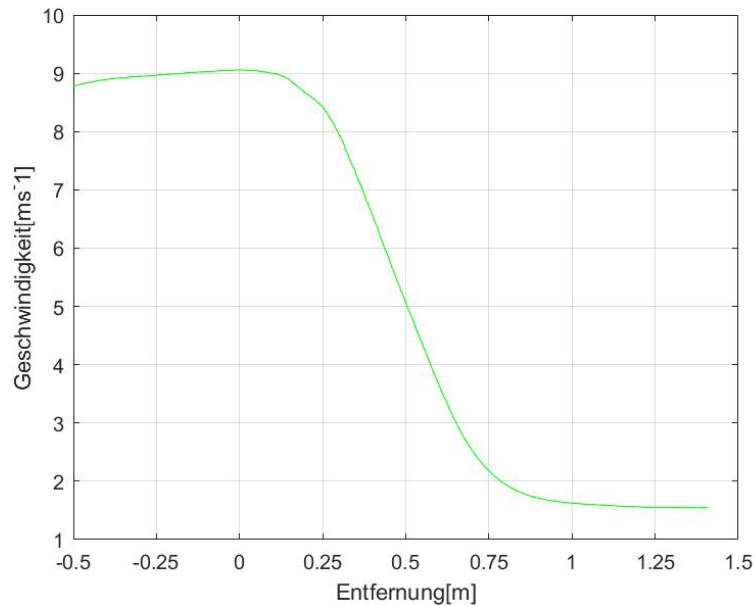


Abb. 29: Geschwindigkeit entlang der Rohrachse

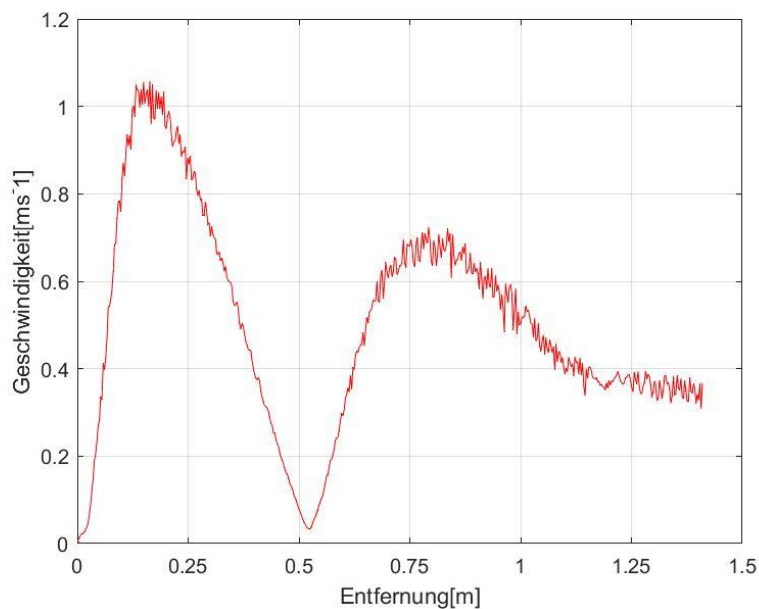


Abb. 30: Geschwindigkeitsverlauf entlang der Wand

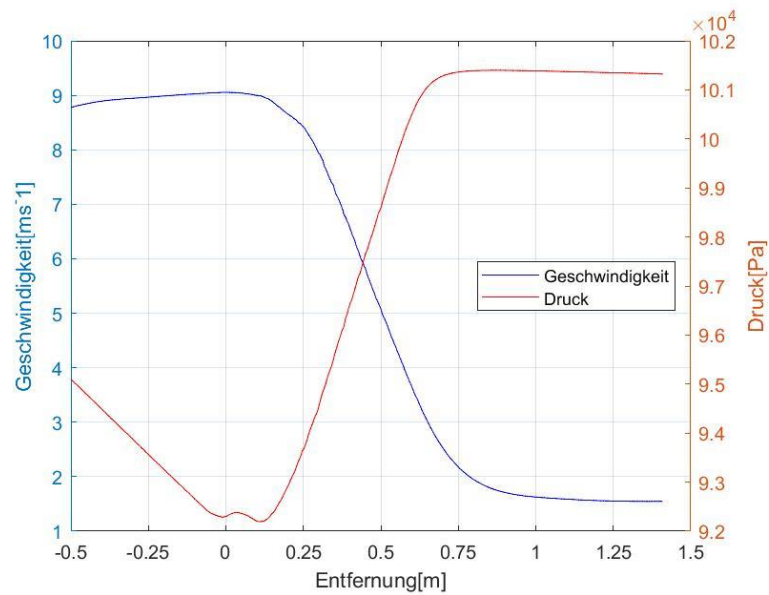


Abb. 31: Bernoulli-Effekt

Abbildung 32 stellt den Verlauf der Stromlinien und deren Geschwindigkeit dar. Dabei ist erkennbar, dass sich erst nach einer bestimmten Fließlänge das Strömungsverhalten normalisiert bis sich der Strahl in das Rohr D_2 ausgedehnt hat. Die dunkelblauen, wandnahen Strömungslinien nach der Aufweitung bekräftigen die Theorie des Rückstroms. Dies zeigt sich auch in Abbildung 33, welche die richtungsabhängige Entwicklung der Geschwindigkeitsvektoren darstellt. Beide Abbildungen bestätigen zudem sehr gut die entstehenden Verwirbelungen in den turbulenten Ablösungszonen. Man erkennt außerdem, dass in der Aufweitungsebene bei $\pm D_1/2$ die Geschwindigkeit nahezu 0 ist.

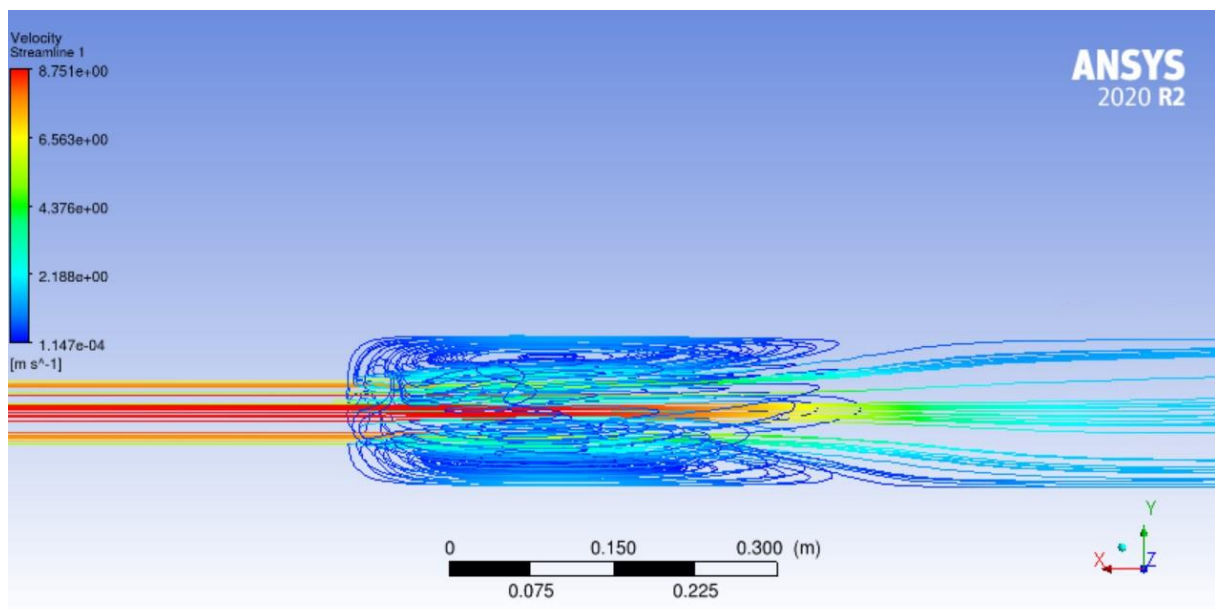


Abb. 32: Stromlinien

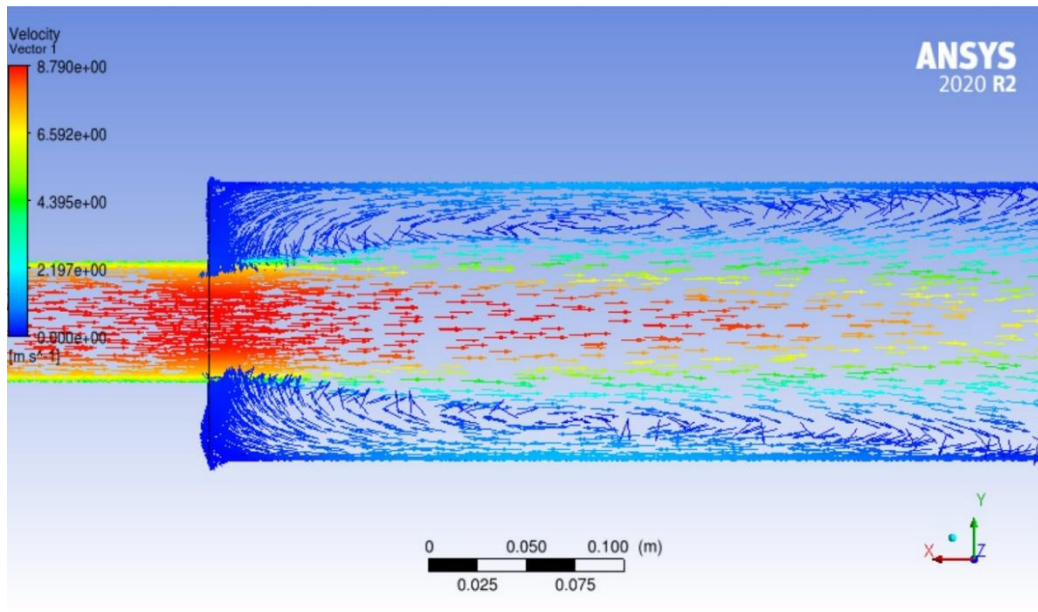


Abb. 33: Geschwindigkeitsvektoren

Abbildungen 34 und 35 zeigen zwei wichtige Merkmale zur Beurteilung der Netzfeinheit und Netzqualität. *Aspect Ratio* (Seitenverhältnis) in Abbildung 34 visualisiert die Seitenverhältnisse der Elemente, in diesem Fall die der Tetraederelemente, farbig. Kleine Verhältnisse sind dabei zu bevorzugen. Dies bedeutet, dass die Abmessungen in allen drei Raumrichtungen ähnlich groß sind. *Skewness* (Schiefstellung) Abbildung 35 ermittelt, wie stark ein Element verzerrt wurde, oder ob es stark degeneriert ist. Dabei sind Werte zwischen 0 und 0,5 anzustreben [44]. Abbildung 34 und 35 zeigen beide einen Schnitt entlang der Rohrachse. Dabei lassen sich unterschiedliche Netzfeinheiten in Strömungsmitte und entlang der Wand feststellen. Die Netzfeinheit hat keinen großen Einfluss auf die Ermittlung des Druckes aber auf den Verlauf der Geschwindigkeit über den Radius, insb. an der Wand.

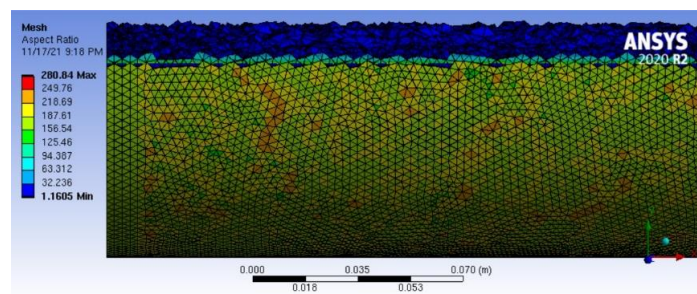


Abb. 34: Aspect Ratio

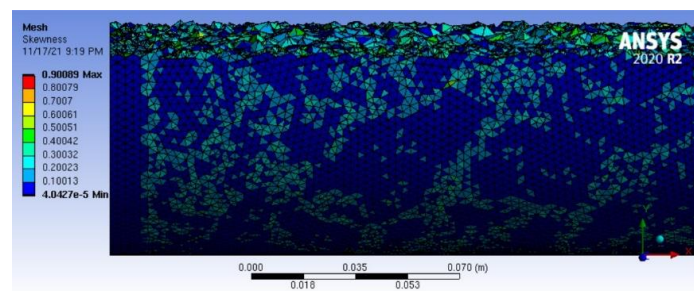


Abb. 35: Skewness

7.1.4 Gegenüberstellung und Vergleich der Ergebnisse

Tab. 4: Gegenüberstellung der Ergebnisse

Q	MS1	MS2	MS3	Impuls	Wand	Rohrachse
7	971.76	969.16	976.24	896.02	928.03	935.33
10	1877.19	1889.91	1817.92	1828.62	1900.10	1889.00
15	4342.72	4282.41	4245.59	4114.38	4267.71	4231.06
17	5635.23	5617.60	5612.38	5284.70	5444.00	5403.02
20	7007.73	6985.93	7026.40	7314.46	7543.44	7566.89
22	8450.09	8411.93	8455.12	8850.50	9144.56	9095.58
25	11142.30	11166.60	11128.80	11428.84	11773.69	11726.05

In Tabelle 4 werden die Ergebnisse aus der Impulsbilanz, dem Experiment und der numerischen Simulation, in Pascal [PA], in Abhängigkeit des Durchflusses Q [l/s] gegenübergestellt. Von links beginnend stehen die Messergebnisse aus dem Versuch für die drei Messstellen, die mit MS1, MS2 und MS3 betitelt sind. Daneben sind die theoretischen Ergebnisse aus der Impulsbilanz für die plötzliche Aufweitung dargestellt, und rechts die numerischen Simulationsergebnisse entlang der Wand und entlang der Rohrachse. Zum genaueren Vergleich werden die Abweichungen der nicht idealisierten Impulsbilanz und der numerischen Simulationsergebnisse entlang der Wand und entlang der Rohrachse von den drei Messstellen in den Tabellen 5, 6 und 7 abgebildet. Die Abweichungen von den experimentellen Ergebnissen werden folglich berechnet:

$$e_{\Delta p} = \frac{\Delta p_{\text{Messung}} - \Delta p_{\text{Impuls/Simulation}}}{\Delta p_{\text{Messung}}} \quad (7.3)$$

Auffällig ist, dass bis zu einem Volumenstrom von einschließlich 17 l/s die experimentelle Messung höhere Ergebnisse liefert als die Impulsbilanz oder die numerische Simulation. Erst ab 20 l/s erhält man negative Abweichungen, da hier Impulsbilanz und Simulation höhere Ergebnisse erzeugen. Dies ist darauf zurückzuführen, dass für höhere Volumenströme wie in der Versuchsdurchführung beschrieben, ein anderer Sensor verwendet wurde, bei dem die Messungenauigkeiten höher sind. Des Weiteren fällt auf, dass die größten Abweichungen der Tabellen 5, 6 und 7 bei 7 l/s, 20 l/s und 22 l/s entstehen. Dies ist ebenfalls auf die Messungenauigkeiten der Sensoren zurückzuführen. Die Messungenauigkeiten von 0.2% haben bei niedrigen Durchflüssen den größten Einfluss. Dadurch entstehen bei 7 l/s, dem niedrigsten Durchfluss mit dem Sensor mit einer Messspanne 0 mbar bis 60 mbar und bei 20 und 22 l/s, dem Sensor mit der Messspanne von 60 mbar bis 600 mbar die größten

Abweichungen zu der theoretischen Impulsbilanz und der numerischen Simulation. Beim direkten Vergleich der numerischen Abweichungen und der Abweichungen der Impulsbilanz lässt sich festhalten, dass für kleinere Durchflüsse die numerischen Ergebnisse näher an den experimentellen Ergebnissen liegen, und für höhere Durchflüsse die theoretische Impulsbilanz stärker mit der experimentellen Messung korreliert. Es lassen sich für alle drei Methodiken gute Ergebnisse feststellen mit Abweichungen von -8.32% bis 8.22% .

7.1.4.1 Vergleich der experimentellen Ergebnisse mit der Impulsbilanz

Die in diesem Unterkapitel verwendeten Formeln und Erklärung zum Vergleich der experimentellen Ergebnisse mit der nicht idealisierten Impulsbilanz gehen von Referenz [10] aus.

Die Aufweitungskoeffizienten $\beta_{1,2}$ und der Druckkoeffizient c_p stammen aus numerischen Simulationen mit Ansys CFX und können über das Aufweitungsverhältnis $\sigma_{inv} = A_1/A_2$ bestimmt werden. Dabei können $\beta_{1,2}$ und c_p als Funktion von σ_{inv} beschrieben werden. Die durchschnittliche Formulierung der Koeffizienten können mithilfe von Ausgleichsrechnungen in folgenden Gleichungen dargestellt werden:

$$\beta_1(\sigma_{inv}) = -0.414 \sigma_{inv}^{0.203} + 1 \quad (7.4)$$

$$\beta_2(\sigma_{inv}) = -0.414 \sigma_{inv}^2 + 0.404 \sigma_{inv} + 1 \quad (7.5)$$

$$c_p(\sigma_{inv}) = 0.035 \sigma_{inv}^{0.295} - 0.017 \quad (7.6)$$

Wie aus Referenz [10] entnommen werden kann, entstehen bei Verwendung von $\beta_{1,2}$ und c_p für den Verlustkoeffizienten K Abweichungen von -6% bis 4% zu dem gemittelten Verlustkoeffizienten.

Tab. 5: Vergleich Experimentelle Ergebnisse – Ergebnisse Impulsbilanz

Q [l/s]	$e_{\Delta pMS1}$ [%]	$e_{\Delta pMS2}$ [%]	$e_{\Delta pMS3}$ [%]
7	7,79	7,55	8,22
10	2,58	3,24	-0,59
15	5,26	3,92	3,09
17	6,22	5,93	5,84
20	-4,38	-4,70	-4,10
22	-4,74	-5,21	-4,68
25	-2,57	-2,35	-2,70

In Tabelle 5 werden die Abweichungen der nicht idealisierten Impulsbilanz, Gleichung 3.35, von den experimentellen Ergebnissen der einzelnen Messstellen dargestellt. Dabei können die niedrigsten Abweichungen mit -2.7% bis 2.58% für die Durchflüsse 10 l/s und 25 l/s festgestellt werden, wobei zu betonen ist, dass die negativen Abweichungen ab 20 l/s aufgrund des Sensors mit 60 mbar bis 600 mbar entstehen. Die höchsten Abweichungen werden bei 7 l/s , 20 l/s und 22 l/s , den Messungenauigkeiten der Sensoren für niedrige Durchflüsse, mit -5.21% bis 8.22% verzeichnet. Für 15 l/s , 17 l/s können Abweichungen 3.09% bis 6.22% festgestellt werden. Um die experimentellen Ergebnisse und Ergebnisse der nicht idealisierten Impulsbilanz graphisch gegenüberstellen zu können werden anhand von Matlab *Curve-Fitting-Tool* Ausgleichskurven für die Ergebnisse der drei Messstellen und der Impulsbilanz erstellt. Diese sind in Abbildung 36 anhand einer halb-logarithmischen Achsenskalierung dargestellt, wobei ein guter Zusammenhang der Ergebnisse durch geringe Abweichungen der Kurven deutlich wird.

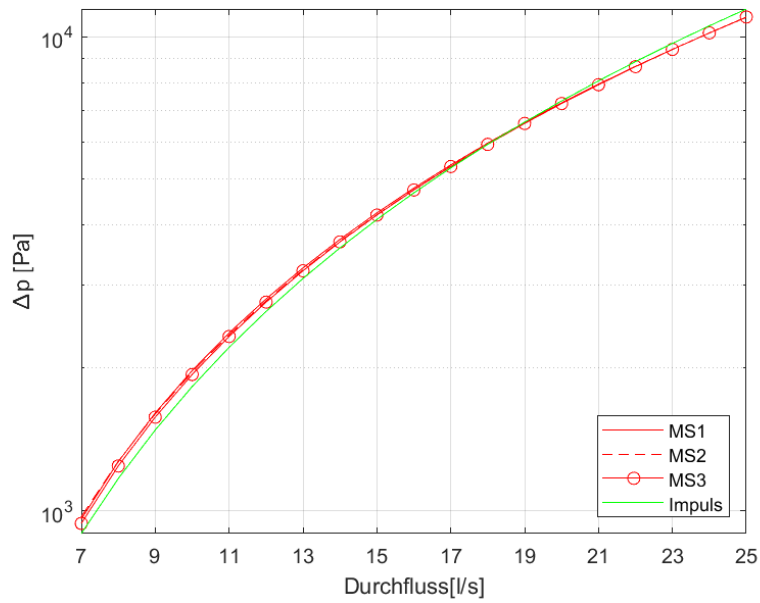


Abb. 36: Experimentelle Ergebnisse - Impulsbilanz

7.1.4.2 Vergleich der experimentellen Ergebnisse mit der numerischen Simulation

Tab. 6: Vergleich Experimentelle Ergebnisse - Numerische Ergebnisse Rohrachse

Q [l/s]	$e_{\Delta p MS1}$ [%]	$e_{\Delta p MS2}$ [%]	$e_{\Delta p MS3}$ [%]
7	4.50	4.24	4.94
10	-1.22	-0.54	-4.52
15	1.73	0.34	-0.52
17	3.39	3.09	3.04
22	-7.65	-7.98	-7.36
20	-8.21	-8.71	-8.15
25	-5.67	-5.44	-5.80

Tab. 7: Vergleich Experimentelle Ergebnisse - Numerische Ergebnisse Wand

Q [l/s]	$e_{\Delta p MS1}$ [%]	$e_{\Delta p MS2}$ [%]	$e_{\Delta p MS3}$ [%]
7	3.75	3.50	4.19
10	-0.63	0.05	-3.91
15	2.57	1.20	0.34
17	4.12	3.82	3.73
22	-7.98	-8.32	-7.69
20	-7.64	-8.13	-7.58
25	-5.23	-5.01	-5.37

Tabellen 6 und 7 stellen die Abweichungen der numerischen Messergebnisse entlang der Wand und entlang der Rohrachse von den experimentellen Ergebnissen für die drei Messstellen dar. Obwohl die numerischen Simulationsergebnisse jeweils den maximalen Differenzdruck Δp wiedergeben, können geringere Abweichungen zu den experimentellen Ergebnissen hier noch keine Aussage über den Ort von max. Δp machen. Dabei können die niedrigsten Abweichungen, bis auf einen Ausreißer an Messstelle 3, bei 10 l/s und 15 l/s mit -1.22% bis 2.57% erkannt werden. Da der Ausreißer sowohl entlang der Wand als auch in Rohrachse wiederzufinden ist und der Unterschied zwischen den anderen beiden Messstellen und MS3 sehr hoch ist, kann hier von einem Messfehler ausgegangen werden. Genau wie bei dem Vergleich aus Abschnitt 7.1.4.1, sind die Abweichungen bei 7 l/s, 20 l/s und 22 l/s mit -7.36% bis -8.71% am größten. Für 17 l/s und 25 l/s werden Abweichungen von 3.04% bis -5.80% festgestellt, wobei das negative Vorzeichen erneut auf den größeren Sensor zurückzuführen ist. Besonders interessante Ergebnisse sind an der Messstelle 2 mit einem Volumenstrom von 10 l/s zu verzeichnen. Hier werden experimentellen Ergebnisse nur -0.54% Abweichung mit den numerischen Ergebnissen entlang der Wand und sogar nur 0.05% Abweichung mit den Ergebnissen entlang der Rohrachse erzeugt. Hier korrelieren die experimentellen Ergebnisse mit den numerischen Ergebnissen sehr gut, was sich auch in Kapitel 7.2 bei der entfernungsabhängigen Druckentwicklung zeigen wird. Auch für 15 l/s kann zu den Ergebnissen entlang der Wand bei Messstelle 2 nur eine Abweichung von 0.34% und bei Messstelle 3 ebenfalls nur 0.34% Abweichung von den Ergebnissen entlang der Rohrachse festgestellt werden. Abbildung 37 verwendet ebenfalls eine halb-logarithmische Darstellung zur Verdeutlichung der guten Übereinstimmung der Ergebnisse.

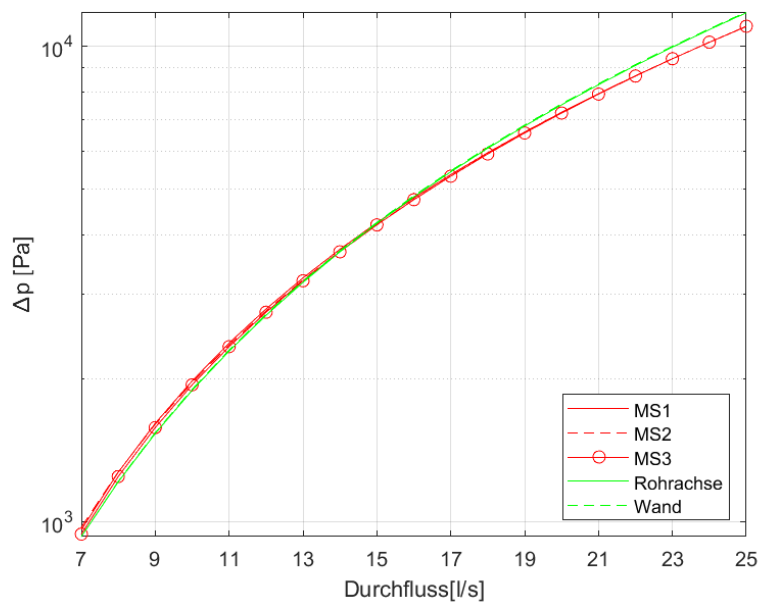


Abb. 37: experimentelle Ergebnisse - Numerische Ergebnisse

7.1.5 Vergleich der Bernoulli-Gleichung mit der nicht idealisierten Impulsbilanz und den Messergebnissen

Tab. 8: Ergebnisse aus der Bernoulli-Gleichung mit Borda-Carnotschem Zusatz

Q [l/s]	Δp [PA]
7	892.36
10	1821.13
15	4097.55
17	5263.07
20	7284.53
22	8814.28
25	11382.08

Es wird die durch den Borda-Carnotschen Stoßverlust angepasste Bernoulli-Gleichung 3.30 verwendet, um den Differenzdruck für die sieben Volumenströme zu bestimmen. Dazu werden sieben Geschwindigkeiten über die Kontinuitätsgleichung berechnet. Die Druckunterschiede

$p_2 - p_1$ für die angepasste Bernoulli-Gleichung sind in Tabelle 8 dargestellt. Tabelle 9 stellt die Abweichungen von den experimentellen Ergebnissen dar. Um auch hier schriftlichen Rechenaufwand zu sparen, werden die Ergebnisse mit Matlab berechnet.

Tab. 9: Vergleich Experimentelle Ergebnisse – Ergebnisse Bernoulli mit Borda-Carnotschem Zusatz

Q [l/s]	$e_{\Delta pMS1}$ [%]	$e_{\Delta pMS2}$ [%]	$e_{\Delta pMS3}$ [%]
7	8.17	7.92	8.59
10	2.99	3.64	-0.18
15	5.65	4.32	3.49
17	7.08	6.31	6.22
20	-3.95	-4.27	-3.67
22	-4.31	-4.78	-4.25
25	-2.15	-1.93	-2.28

Vergleicht man nun die Abweichungen der Ergebnisse aus der durch Borda-Carnot angepassten Bernoulli-Gleichung mit den experimentellen Ergebnissen und den Abweichungen aus der Impulsbilanz mit den experimentellen Ergebnissen, dann stellt man zum einen ebenso fest, dass die experimentelle Messung bis einschließlich 17 l/s größere Ergebnisse als die Theorie erzeugt, bis sich dies für 20 l/s, 22 l/s und 25 l/s ändert. Zum anderen ist auffällig, dass bis zu diesem Wendepunkt, die Impulsgleichung besser mit den Messergebnissen übereinstimmt und ab 20 l/s die angepasste Bernoulli-Gleichung näher an den Messergebnissen liegt. Schuett kann in seinen Messungen feststellen, dass die Abweichung des Stoßverlust nach Borda-Carnot nicht kleiner als 1.5 % zu den experimentellen Werten ist. Er kann ebenfalls bei größeren Geschwindigkeiten v_2 teilweise eine Abnahme der Abweichungen feststellen. Die Formulierung der Bernoulli-Gleichung mit dem Borda-Carnotschen Zusatz erzeugt für ein stationäres Problem also gute Ergebnisse bei moderaten Durchmesserhältnissen D_1/D_2 . Es können jedoch Abweichungen bei sehr kleinen oder sehr großen Aufweitungsverhältnissen entstehen [10]. Die Formulierung nach Borda-Carnot trifft dabei die Vereinfachung, dass der Rückstaudruck p_r an der Aufweitung dem Druck p_1 entspricht und eine gleichmäßige Geschwindigkeitsverteilung nach der Aufweitung angenommen wird. Diese Vereinfachungen führen zu erheblichen Abweichungen bei sehr großen und kleinen Verhältnissen D_1/D_2 , jedoch zu guten Übereinstimmungen für moderate Verhältnisse wie mit der hier verwendeten Geometrie [10]. Die größeren Abweichungen der theoretischen Impulsbilanz von den experimentellen Ergebnissen als bei der Bernoulli-Gleichung für höhere Durchflüsse kann darauf zurückzuführen sein, dass die nicht idealisierte

Impulsgleichung, Gleichung 3.35, die Koeffizienten c_p und $\beta_{1,2}$ aus Ausgleichsrechnungen vom Aufweitungsverhältnis abhängiger numerischer Simulationen für verschiedene Volumenströme entspringen. Die Abweichungen zwischen nicht idealisierter Impulsbilanz für die plötzliche Aufweitung und experimenteller Messung liegen bis auf die Ausreißer bei 7 l/s in einem Rahmen von 0.59% bis 6.22%, wodurch sich eine hohe Genauigkeit feststellen lässt. Die höheren Abweichungen in bei 7 l/s sind auf die größeren Messabweichungen des Sensors für diesen Volumenstrom zurückzuführen. Die Impulsbilanz kann durch die Koeffizienten c_p und $\beta_{1,2}$ auch auf beliebige Durchmesserhältnisse übertragen, ohne dass mit schwerwiegenden Abweichungen zu rechnen ist, sowie es bei der angepassten Bernoulli-Gleichung der Fall ist.

Abbildung 38 stellt eine halb-logarithmische Darstellung der Verläufe der Ausgleichsfunktionen der experimentellen Ergebnisse der drei Messstellen, der numerischen Ergebnisse entlang der Wand und entlang der Rohrachse, den Ergebnissen aus der nicht idealisierten Impulsbilanz und den Ergebnissen aus der Bernoulli-Gleichung für Δp in Abhängigkeit des Durchflusses dar. Durch diese Darstellung können kleine Abweichungen gut sichtbar gemacht werden. Dabei sind sehr gute Übereinstimmungen der Verläufe erkennbar, wodurch Formel 3.35 zur Beschreibung des Differenzdruckes einer plötzlichen Rohraufweitung gestützt wird und keinen großen Abweichungen bei einem moderaten Durchmesserhältnis von den Ergebnissen nach der Bernoulli-Gleichung entstehen.

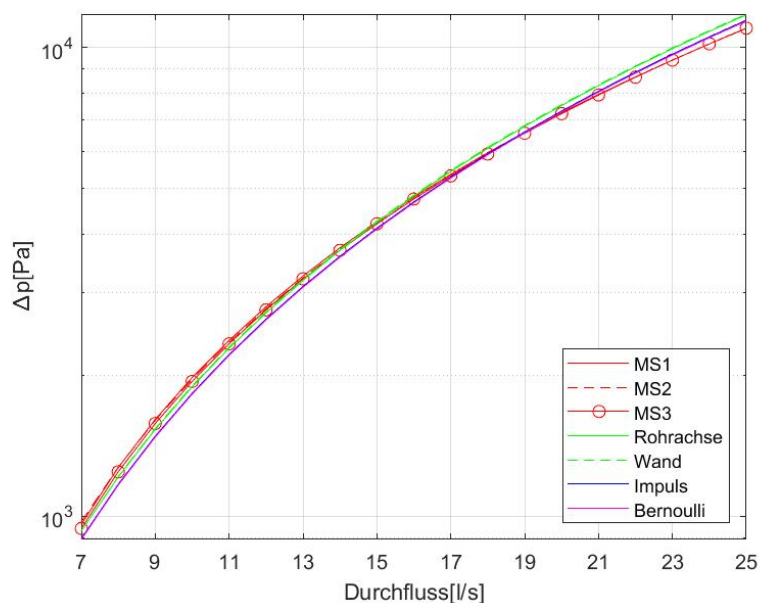


Abb. 38: Halb-Logarithmische Darstellung der Differenzdruckverläufe

7.2 Entfernungsabhängige Druckverhalten

Zur Ermittlung der Entfernung von der Rohraufweitung bis zur Stelle des maximalen Druckunterschiedes Δp , werden die Messergebnisse der drei Messstellen, die zwischen $5.5 D_2$ und $6.5 D_2$ angebracht wurden, mit den numerischen Ergebnissen verglichen und die Wahl des gewählten Messbereiches evaluiert. Zudem wird der Bereich des maximalen Druckgradienten untersucht. Da die Impulsbilanz keine Ortsangabe machen kann, genau wie andere theoretische Formulierungen zur Bestimmung von Δp , wird sie für diesen Abschnitt nicht betrachtet. Abbildungen 39 und 40 zeigen die Druckverläufe aus der numerischen Simulation in Abhängigkeit der Entfernung bis zur Aufweitungsebene für die sieben Volumenströme, in Abbildung 39 entlang der Wand und in Abbildung 40 entlang der Rohrachse. In beiden Graphen erkennt man die Einstellung eines maximalen Wertes ab ca. $5.5 D_2$ ($0.78 m$) für alle sieben Durchflüsse. Dies geht ebenfalls aus Lipsteins [12] Bericht zur „*Sudden Expansion Pipe Flow*“ hervor. Bei seinen Versuchen stellt er die Druckentwicklung über die Rohrwand dar. In seinem Bericht verdeutlicht er, dass der Druckgradient bis zu einem „*Plateau Value*“ (Plateau-Wert) ansteigt. Dieses sich einstellende „Plateau“ ist in beiden Verläufen sehr deutlich erkennbar. Noch vor Lipstein, untersuchte der US-amerikanische Wissenschaftler W.H.Archer [13], die Entfernung von der Aufweitungsebene bis zu einem maximalen Wert für p_2 . Bei seinen Ausarbeitungen lässt sich ebenfalls die Entwicklung eines „Plateaus“ beobachten.

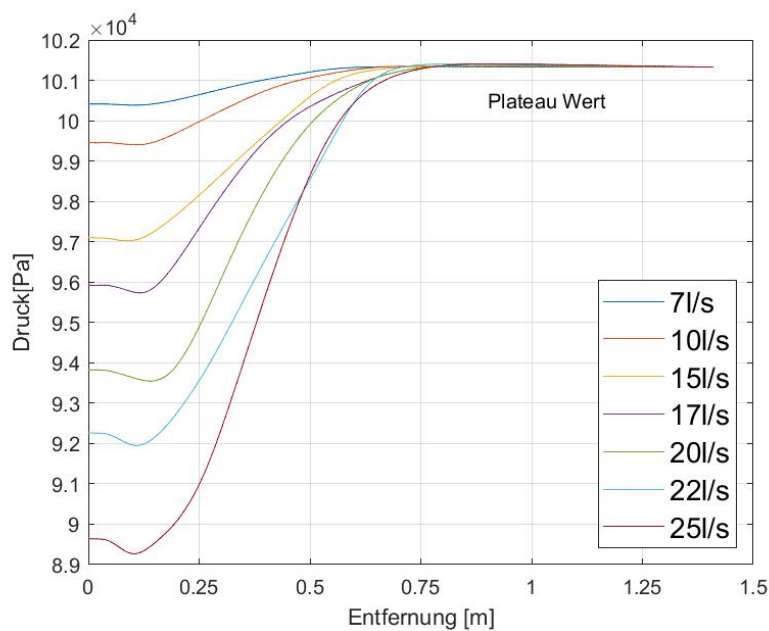


Abb. 39: Ausbildung eines Plateau-Wertes entlang der Wand

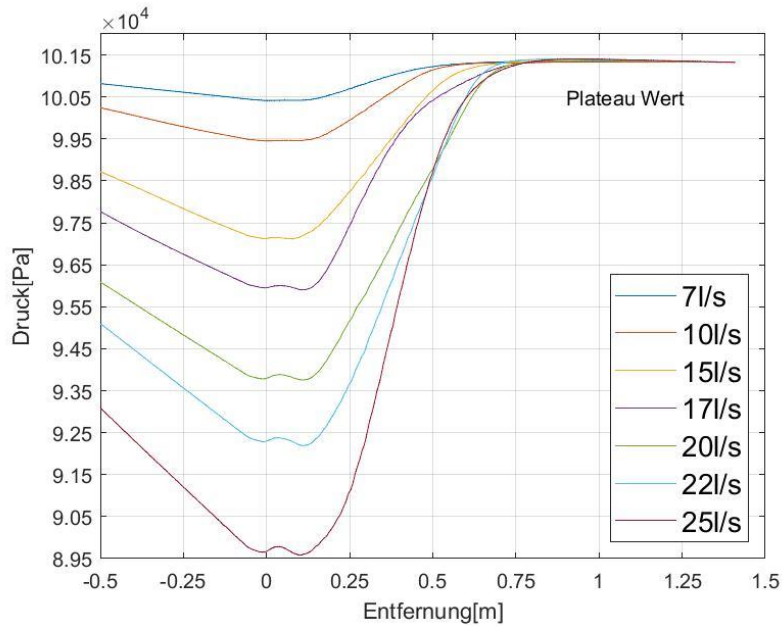


Abb. 40: Ausbildung eines Plateau-Wertes entlang der Rohrachse

Lipstein stellt ebenfalls die Einstellung eines maximalen Druckgradienten fest. Da Lipstein genauso wie Schuett die Abhängigkeit der Durchmesser D_1 und D_2 auf das Verhalten der Druckentwicklung untersuchte, stellte er die Entfernung zur Aufweitung mit der dimensionslosen Formulierung $X/(D_2 - D_1)$ dar, wobei X die Entfernung darstellt. Für Lipstein liegt der „*maximum wall pressure gradient*“ (maximale Druckgradient an der Wand) zwischen $X/(D_2 - D_1) = 2$ und 4. Auf die hier verwendete Geometrie bezogen, bedeutet das nach Lipstein, dass der maximale Druckgradient zwischen $X = 16.10 \text{ cm}$ und $X = 32.21 \text{ cm}$ liegt. Mit Matlab kann der Gradientenverlauf der Druckentwicklung genauer betrachtet werden. Dabei wird eine gute Übereinstimmung mit Lipsteins Beschreibung festgestellt. Die Abbildungen 41 und 42 stellen den Druck- und Gradientenverlauf einer Simulation mit 10 l/s als Volumenstrom dar. Dabei ist der Anstieg des Gradienten bis zu einem Maximum in dem von Lipstein beschriebenen Bereich zu erkennen. Bei den Verläufen der verbleibenden Volumenströme zeichnen sich ebenso Verläufe ab, die in den beschriebenen Bereich passen. Allerdings liegen die maximalen Gradienten eher an $X/(D_2 - D_1) = 4$ als an 2. Außerdem ist hier nochmals die Einstellung des Plateau-Wertes ab 0.75 m klar zu erkennen. Dabei geht der Gradient gegen 0.

Tab. 10: Vergleich maximale Druckdifferenzen Experimentelle Ergebnisse - Numerische Ergebnisse

Q [l/s]	max Δp	Wand [PA]	$e_{\Delta p}$ [%]
7	976.24 (MS3)	928.03	4.94
10	1889.81 (MS2)	1900.10	-0.54
15	4342.72 (MS1)	4267.71	1.7
17	5653.23 (MS1)	5444.00	0.53
20	7026.40 (MS3)	7543.44	3.70
22	8455.12 (MS3)	9144.56	-8.15
25	11166.60 (MS2)	11773.69	-5.44

Q [l/s]	max Δp	Rohrachse [PA]	$e_{\Delta p}$ [%]
7	976,.4 (MS3)	935.33	4.18
10	1889.81 (MS2)	1889.00	0.05
15	4342.72 (MS1)	4231.06	2.5
17	5653.23 (MS1)	5403.02	4.43
20	7026.40 (MS3)	7566.89	-7.69
22	8455.12 (MS3)	9095.58	-7.58
25	11166.60 (MS2)	11726.05	-5.01

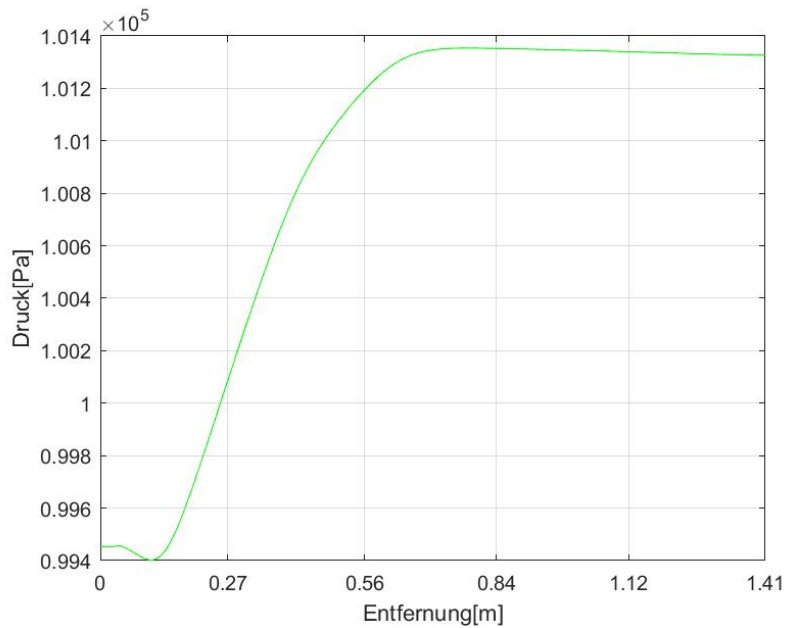


Abb. 41: Druckverlauf Simulation 10l/s

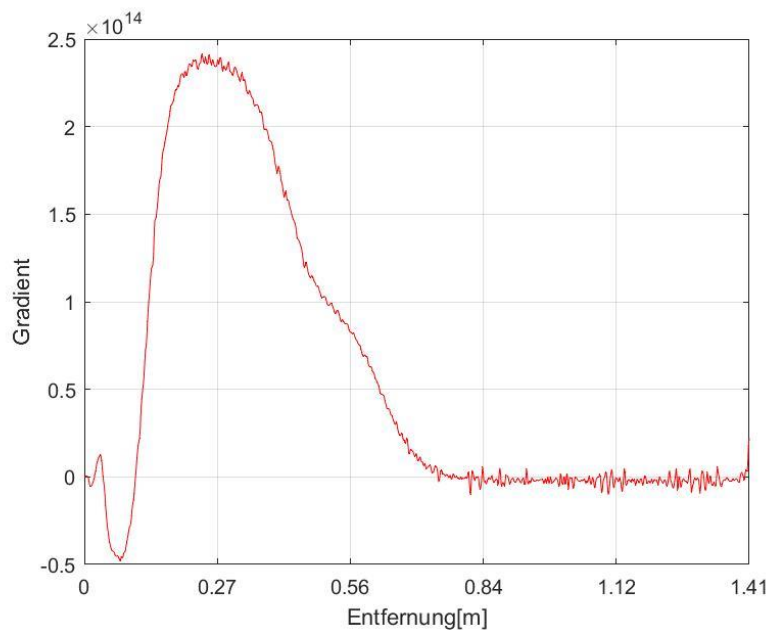


Abb. 42: Gradientenverlauf Simulation 10l/s

Schließlich gilt es die Stelle des maximalen Differenzdruckes zu ermitteln. Dazu können die experimentellen Ergebnisse mit der numerischen Simulation verglichen werden. Zunächst lässt sich die Theorie des Ortes der maximalen Druckdifferenz Δp bei 5.5 bis $6.5 D_2$ anhand der sich einstellenden Plateau Werte ab $0.75 m$ bestätigen. Messstelle 1 befindet sich bei $5.5 D_2$ ($0.78m$), Messstelle 2 bei $6.0 D_2$ ($0.85m$) und Messstelle 3 bei $6,5 D_2$ ($0.92m$). Tabelle 10 fasst die maximalen Druckdifferenzen mit der entsprechenden Messstelle zusammen und stellt sie den maximalen Druckdifferenzen aus den Simulationsergebnissen gegenüber. Dazu wird die Abweichung von den experimentellen Werten dargestellt. Anhand der Abweichungen lassen sich zwei Schlussfolgerungen ziehen: Zum einen nehmen die Abweichungen mit

steigendem Durchfluss zu und zum anderen sind bei dem Vergleich der experimentellen Ergebnisse mit den numerischen Ergebnissen aus der Rohrachse leicht höhere Abweichungen zu erkennen als mit den Ergebnissen an der Wand. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Druckmessstellen des Versuches an der Rohrwand befestigt wurden, und somit die Abweichungen mit den Simulationsergebnisse entlang Wand geringer sind. Es können in Tabelle 10 Abweichungen von 0.04% bis maximal 8.15% feststellen lassen und eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse ermittelt werden kann. Mit steigendem Volumenstrom steigen auch die Messabweichungen durch den Austausch des Sensors, wodurch höhere Abweichungen mit den Simulationsergebnissen sehr wahrscheinlich sind.

Da die Ermittlung des maximalen Differenzdruckes aus den numerischen Simulationsergebnissen auf der Differenz zwischen Druck in der Aufweitungsebene und dem Druckmaximum besteht, wird zur Ermittlung der Entfernung des maximalen Druckunterschiedes Δp , der x - Wert dieses Druckmaximums ausgelesen. In Abbildung 43 werden die Positionen der Maxima als Entfernung zur Aufweitung für die sieben verschiedenen Volumenströme dargestellt. Der Graph beruht auf den Ergebnissen der Simulation über die Wand. Dabei ist zu erkennen, dass bei den niedrigen Durchflüssen 7 l/s und 10 l/s , die Maxima näher an der Aufweitung liegen, bei 0.745 m und 0.78 m . Dies korreliert allerdings nicht mit den experimentellen Ergebnissen, da hier Messstelle 3 und 2 als Position des maximalen Differenzdruckes erkannt werden. Bei 10 l/s , wo die Abweichungen besonders gering sind, werden zwar sehr ähnliche Ergebnisse erzielt, nicht jedoch an derselben Stelle. Besonders interessant ist jedoch, dass bei den numerischen Ergebnissen, die Positionen der Maxima für 15 l/s und 17 l/s fast identisch sind. Diese liegen bei 0.88 m . Den experimentellen Ergebnissen zu Folge, liegt Δp für diese beiden Volumenströme jedoch bei Messstelle 1. Eine gute Übereinstimmung kann allerdings bei 20 l/s gefunden werden. Bei 22 l/s gibt es einen Ausreißer, da hier nach den Simulationsergebnissen, Δp bei 0.84 m liegt. Ein Rückfall des maximalen Druckes war hier nicht zu erwarten. Nach den Messungen am Versuchsstand liegt Δp hier bei Messstelle 3. Schließlich ergibt sich bei 25 l/s ein entgegengesetztes Ergebnis. Hier liegt das Maximum der numerischen Messung bei 0.91 m , wohingegen sich nach den experimentellen Ergebnissen Messstelle 2 als Position des maximalen Differenzdruckes darstellt.

Archer und Lipstein beurteilen beide die entfernungsabhängige Entwicklung des Differenzdruckverhaltens. Archer stellt dabei eine durchmesserbeeinflusste Formel zur Bestimmung der Entfernung des maximalen Druckes p_2 von der Aufweitung auf:

$$x = 1.45 * (D_2 - D_1)^{0.45} \quad (7.5)$$

X stellt dabei die Entfernung zur Aufweitung dar. Er arbeitete, genauso wie Lipstein mit dem angloamerikanischen System, wodurch die Durchmesser in Zoll angegeben werden, und das Ergebnis X in Fuß ausgegeben wird. Unter Berücksichtigung der richtigen Umrechnung erhält man für die Geometrie dieses Experimentes den maximalen Druck p_2 bei 0.7 m ($5D_2$) Dieser liegt sehr dicht an dem erwarteten Bereich $5.5D_2 - 6.5D_2$. Archer berücksichtigt in seiner Formel allerdings keine Abhängigkeit des Volumenstroms. Der Wert kann als grobe Orientierung genutzt werden, bestätigt jedoch nicht die Erwartung des maximalen Wertes für Δp zwischen $5.5D_2$ und $6.5D_2$.

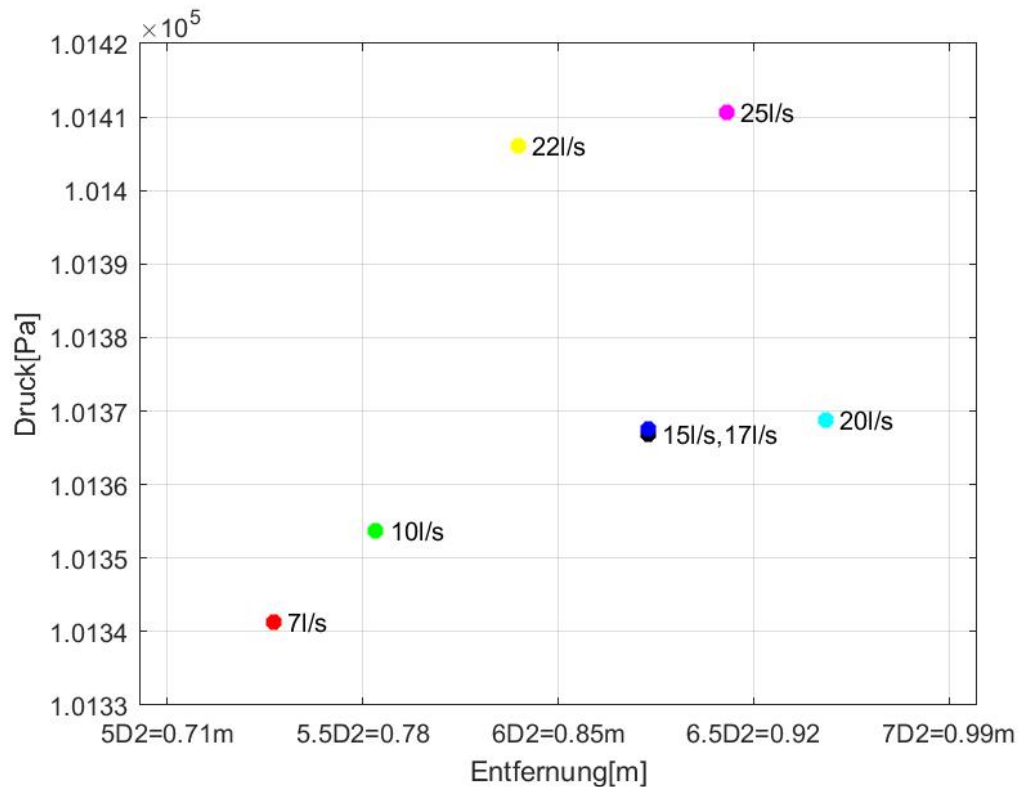


Abb. 43: Positionen der Druckmaxima

Obwohl bei dem Vergleich der numerischen Ergebnisse mit den experimentellen Ergebnissen leichte Abweichungen zwischen den Maxima an den Messstellen und den numerischen Maxima entstanden sind, bestätigen beide Evaluierungen die Theorie, dass die maximale Druckdifferenz Δp zwischen $5.5D_2$ und $6.5D_2$ liegen muss. Die Strömung hat sich hier zwar noch nicht wieder beruhigt, aber der maximale Druck wurde erreicht. Zum einen approximiert die numerische Simulation sehr gut die experimentellen Ergebnisse, wie aus den niedrigen Standardabweichungen und Abweichungen der Ergebnisse zu entnehmen ist, und zum anderen können auch aus Lipsteins graphischen Darstellungen zur Entfernung des maximalen Druckes zur Aufweitung, diese Erkenntnis stützen. Abbildung 44 zeigt einen Contourplot für den Druckverlauf aus einer numerischen Simulation mit 22 l/s als Massenstrom. Dabei stellt der dunkelorange unterlegte Farbton im Rohr D_2 den Bereich des maximalen Druckes, und somit auch den des maximalen Differenzdruckes dar. Der Contourplot kann somit den Bereich zwischen $5.5D_2$ und $6.5D_2$ für maximale Δp -Werte ebenfalls gut einordnen.

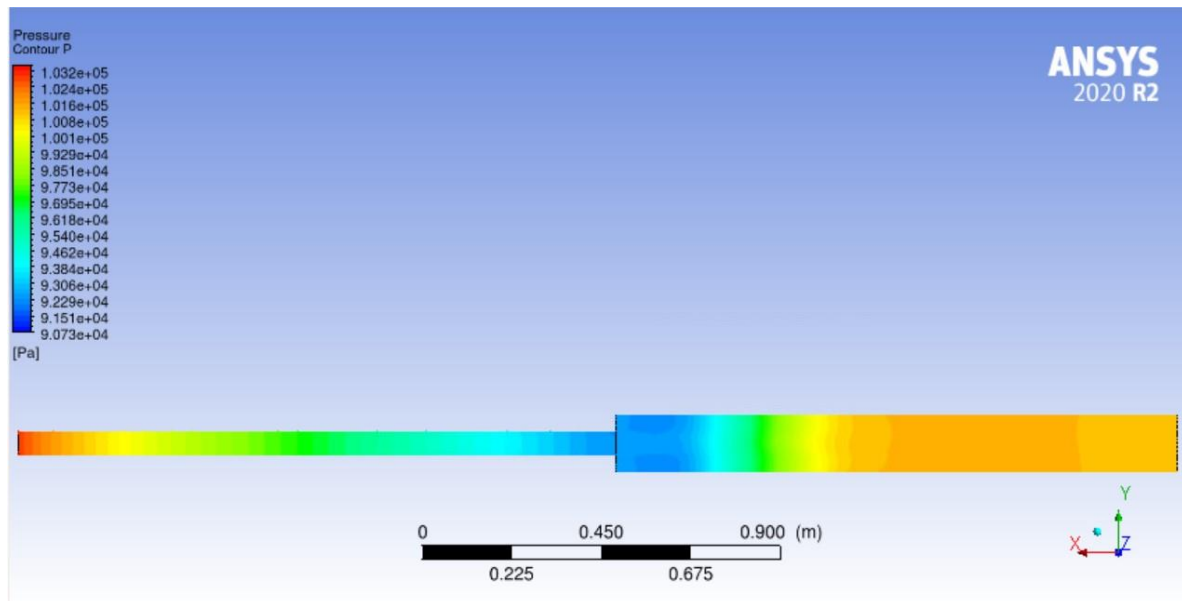


Abb. 44: Contourplot der Druckverteilung entlang des Rohres

8. Zusammenfassung und Ausblick

8.1 Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit ist es, theoretischen, experimentell und numerischen Ansätze zur Berechnung der Druckdifferenz Δp miteinander zu vergleichen und zu beurteilen. Besonderer Fokus wird dabei auf die durchflussabhängige Druckentwicklung und die Entfernung der Aufweitungsebene bis zum Ort des maximalen Gradienten und des maximalen Differenzdruckes gelegt. Des Weiteren wird anhand der experimentellen Messung und der numerischen Simulation die theoretische Impulsgleichung für die plötzliche Rohraufweitung verifiziert.

Nach der Auswertung der Ergebnisse kann ein Zusammenhang zwischen Volumenstrom und Δp erkannt werden, da dieser mit steigendem Q ebenfalls zunimmt. Der Zusammenhang zwischen Druck und Geschwindigkeit ist hierfür maßgebend. Außerdem lässt sich diese Beziehung auch durch drei Quellen bestätigen. Darüber hinaus kann der Bereich des maximalen Gradienten eingegrenzt werden und befindet sich zwischen $2D_2$ und $2.5D_2$. Diese Erkenntnis korreliert mit Lipsteins Beobachtungen und den numerischen Simulationsergebnissen. Die Überlegung, dass der Ort des maximalen Druckunterschiedes $5.5D_2$ und $6.5D_2$ liegt, kann durch den Vergleich der experimentellen Messwerte in diesem Bereich und den numerischen Simulationsergebnissen gedeckt werden.

Die verwendete theoretische Impulsgleichung für die plötzliche Rohraufweitung kann anhand der numerischen und Berechnung und den experimentellen Ergebnissen aus dem Versuch verifiziert werden. Anders als die durch Borda-Carnot angepasste Bernoulli – Gleichung, können durch den eingeführten Druckkoeffizienten c_p und die Aufweitungskoeffizienten $\beta_{1,2}$ bei niedrigen sowie hohen Durchflüssen und Aufweitungsverhältnissen gute Ergebnisse erzielt werden.

8.2 Ausblick

Durch das Anbringen mehrerer Messstellen von der Aufweitung bis zum Bereich der maximalen Druckdifferenz Δp könnte die Einstellung eines Plateaus-Wertes zusätzlich zu den numerischen Ergebnissen und dem Vergleich mit Lipsteins Erkenntnissen, experimentell bekräftigt werden. Zudem könnte der Bereich des maximalen Druckgradienten experimentell überprüft werden. Außerdem könnte durch das Anbringen mehrerer Messstellen in Rohr 2 die Druckunterschiede zwischen den einzelnen Messstellen näher untersucht werden. In diesem Versuch handelt es sich um sehr geringe Messunterschiede, da man sich schon auf der Plateau-Ebene bewegt. Mit weiteren Messstellen, näher an der Aufweitungsebene, würden größere Druckunterschiede festgestellt werden.

Eine weitere Möglichkeit das Druckverhalten und die Entstehung des maximalen Differenzdruckes infolge einer plötzlichen Aufweitung zu untersuchen, wäre es den Durchmesser D_2 des zweiten Rohres anzupassen, indem dies durch ein Rohr mit $D_{neu} > D_2$ und ein weiteres Rohr mit $D_{neu} < D_2$ ausgetauscht würde. Somit entstünden zwei neue Verhältnisse A_2/A_1 , wodurch drei unterschiedliche Aufweitungsverhältnisse zur Verfügung stünden. Dabei kann auf Lipstein, Schuett und Archer als Literaturquellen zurückgegriffen werden. Die Änderung der Geometrieverhältnisse mit Ansys Inc. und in der Impulsbilanz zum Vergleich der Ergebnisse kann leicht geändert werden.

Literaturverzeichnis

- [1] I. Newton, „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica“, *University of Sydney Library*. <https://digital.library.sydney.edu.au/nodes/view/7454> (zugegriffen Sep. 16, 2021).
- [2] I. Newton, „Axiomata Sive Leges Motus (1687) (Normalized)“, *The Newton Project*. <https://www.newtonproject.ox.ac.uk/view/texts/normalized/NATP00076> (zugegriffen Sep. 16, 2021).
- [3] A. Malcherek, *Grundlagen der Strömungsmechanik*. München: Selbstverlag, 2016.
- [4] A. Malcherek, *Fließgewässer: Hydraulik, Hydrologie, Morphologie und Wasserbau*. Springer Vieweg, 2019. doi: 10.1007/978-3-658-27000-1.
- [5] G. Wolschin, *Hydrodynamik*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2016. doi: 10.1007/978-3-662-48024-3.
- [6] A. Malcherek, *Kinematik 13: Das Prinzip von d'Alembert*. [Online Video]. Verfügbar unter: <https://www.youtube.com/watch?v=o8HsldU2A6w>
- [7] „Bernoulli, Daniel: Danielis Bernoulli Joh. Fil. Med. Prof. Basil. ... Hydrodynamica, Sive De Viribus Et Motibus Fluidorum Commentarii“, Bild 10 von 356 | MDZ“, *Münchener Digitalisierungszentrum/Digitale Bibliothek*. <https://www.digitale-sammlungen.de/de/view/bsb10871847?page=10,11> (zugegriffen Okt. 14, 2021).
- [8] H. Roscher und U. Helbig, „Historische Entwicklung der Rohrleitungstechnik“, in *Rohrleitungen*, H.-B. Horlacher und U. Helbig, Hrsg. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2015, S. 1–15. doi: 10.1007/978-3-642-45027-3_1-2.
- [9] HptFw Werner, „Geschichte Artillerie“. https://feldartilleriebataillon210.de/html/body_geschichte_artillerie.html (zugegriffen Sep. 17, 2021).
- [10] S. Müller und A. Malcherek, „A Unified Theory for the Pressure Change of Sudden Expansions and Contractions Based on the Momentum Balance“, in *Volume 2: Fluid Applications and Systems; Fluid Measurement and Instrumentation*, Virtual, Online, Aug. 2021, S. V002T03A021. doi: 10.1115/FEDSM2021-65703.
- [11] Dr. H. C. Schuett, „Losses of Pressure Head due to Sudden Enlargement of a Flow Cross Section“. 1929.
- [12] N. J. Lipstein, „Low velocity sudden expansion pipe flow“, *Am. Soc. Heat. Refrig. Air-Cond. Eng. J.*, Bd. 4, Nr. 7, S. 43–47, 1962.
- [13] W. H. Archer, „Experimental Determination of Loss of Head Due to Sudden Enlargement in Circular Pipes“, *Trans. Am. Soc. Civ. Eng.*, Bd. 76, Nr. 1, S. 999–1026, 1913.
- [14] M. Rütten, *Verallgemeinerte newtonsche Fluide: Thermische und viskose Strömungseigenschaften*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2019. doi: 10.1007/978-3-662-56226-0.
- [15] Andreas Malcherek, *Hydraulik 25/Turbulenz 1: Die Reynoldszahl*, (Feb. 23, 2015). Zugegriffen: Okt. 14, 2021. [Online Video]. Verfügbar unter: <https://www.youtube.com/watch?v=e2aIxNj1D38>

- [16] K. Lecher, H.-P. Lühr, und U. Zanke, Hrsg., *Taschenbuch der Wasserwirtschaft: Grundlagen – Maßnahmen – Planungen*, 10. Aufl. Springer Vieweg, 2021. Zugegriffen: Sep. 15, 2021. [Online]. Verfügbar unter: <https://www.springer.com/de/book/9783658312879>
- [17] O. Reynolds, „An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels“, *Proc. R. Soc. Lond.*, Bd. 35, Nr. 224, S. 84–99, Jan. 1883, doi: 10.1098/rspl.1883.0018.
- [18] Andreas Malcherek, *Kinematik 18: Volumen- und Flächenkräfte*, (Sep. 11, 2015). Zugegriffen: Okt. 12, 2021. [Online Video]. Verfügbar unter: <https://www.youtube.com/watch?v=o1ggv5Pgof4>
- [19] M. Bucciattini, „IL TRATTATO DELLA MISURA DELL’ACQUE CORRENTI DI BENEDETTO CASTELLI. UNA DISCUSSIONE SULLE ACQUE ALL’INTERNO DELLA SCUOLA GALILEIANA“, *Ann. Dell’Istituto E Mus. Storia Della Sci. Firenze*, Bd. 8, Nr. 2, S. 103–140, Jan. 1983, doi: 10.1163/221058783X01463.
- [20] Andreas Malcherek, *Vorlesung 7: Die Massenbilanz*, (Okt. 17, 2020). Zugegriffen: Okt. 13, 2021. [Online Video]. Verfügbar unter: <https://www.youtube.com/watch?v=nZZCJsdxQQs>
- [21] Andreas Malcherek, *Hydraulik 4: Die Massenerhaltung*, (Okt. 25, 2014). Zugegriffen: Okt. 13, 2021. [Online Video]. Verfügbar unter: <https://www.youtube.com/watch?v=smjKDbW94vQ>
- [22] Andreas Malcherek, *Kinematik 7: Kraft und Impuls*, (Jan. 11, 2015). Zugegriffen: Okt. 12, 2021. [Online Video]. Verfügbar unter: <https://www.youtube.com/watch?v=vjBXz-Q7MpY>
- [23] Andreas Malcherek, *Kinematik 17: Der Impulserhaltungssatz*, (Apr. 11, 2015). Zugegriffen: Okt. 18, 2021. [Online Video]. Verfügbar unter: <https://www.youtube.com/watch?v=kDmDdX51QdY>
- [24] Andreas Malcherek, *Hydraulik 9: Die Stoßkraft eines Wasserstrahls*, (Feb. 24, 2019). Zugegriffen: Okt. 12, 2021. [Online Video]. Verfügbar unter: <https://www.youtube.com/watch?v=mE0LSZAsOoQ>
- [25] Andreas Malcherek, *Hydraulik 13 Die Bernoulligleichung*, (Dez. 15, 2013). Zugegriffen: Sep. 17, 2021. [Online Video]. Verfügbar unter: https://www.youtube.com/watch?v=Dw1qXTtJu_w
- [26] Andreas Malcherek, *Hydraulik 17: Der Borda-Carnotsche Stoßverlust*, (März 01, 2016). Zugegriffen: Okt. 18, 2021. [Online Video]. Verfügbar unter: <https://www.youtube.com/watch?v=ov57J2K5Sj4>
- [27] A. H. Gibson, *Hydraulics and its applications*, 3. New York: D. Van Nostrand company, 1925. [Online]. Verfügbar unter: <http://hdl.handle.net/2027/mdp.39015024336870>
- [28] G. Brown, „The History of the Darcy-Weisbach Equation for Pipe Flow Resistance“, *Proc. Env. Water Resour. Hist.*, Bd. 38, Okt. 2002, doi: 10.1061/40650(2003)4.
- [29] J. L. Weisbach, *Lehrbuch der ingenieur-und maschinen-mechanik: Theoretische mechanik*. Vieweg, 1862.

- [30] J.-C. Borda, „Memoire sur l'ecoulement des Fluides par les Orifices des Vases“, *Hist. Acad. R. Sci.*, Nr. 1, 1766, [Online]. Verfügbar unter: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3564p?rk=21459;2>
- [31] A. H. Gibson, *Hydraulics and its applications*. London: A. Constable & Co., Ltd., 1908. Zugegriffen: Feb. 01, 2021. [Online]. Verfügbar unter: <https://archive.org/details/hydraulicsandit00gibsgoog/page/n104/mode/2up>
- [32] E. Hering und G. Schönfelder, Hrsg., *Sensoren in Wissenschaft und Technik*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2018. doi: 10.1007/978-3-658-12562-2.
- [33] A. Malcherek und I. Baselt, „Grunlagenpraktikum im Labor für Hydromechanik und Wasserbau HT20/WT21“. Okt. 14, 2020.
- [34] L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 3: Vektoranalysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik, Fehler- und Ausgleichsrechnung*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2016. doi: 10.1007/978-3-658-11924-9.
- [35] „Evaluating Goodness of Fit - MATLAB & Simulink - MathWorks Deutschland“. https://de.mathworks.com/help/curvefit/evaluating-goodness-of-fit.html?searchHighlight=Sum%20of%20Squares%20due%20to%20error&s_tid=srchtitle_Sum%20of%20Squares%20due%20to%20error_1 (zugegriffen Dez. 06, 2021).
- [36] E. Laurien und H. O. jr, *Numerische Strömungsmechanik: Grundgleichungen und Modelle – Lösungsmethoden – Qualität und Genauigkeit*. Springer-Verlag, 2018.
- [37] S. Lecheler, *Numerische Strömungsberechnung*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2018. doi: 10.1007/978-3-658-19192-4.
- [38] J. H. Ferziger, M. Perić, und R. L. Street, *Numerische Strömungsmechanik*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2020. doi: 10.1007/978-3-662-46544-8.
- [39] Andreas Malcherek, *Hydrodynamik 7: Die Eulergleichungen*, (Sep. 27, 2017). Zugegriffen: Okt. 21, 2021. [Online Video]. Verfügbar unter: https://www.youtube.com/watch?v=HP1eVlf_Kco
- [40] Andreas Malcherek, *Hydrodynamik 16: Die Navier-Stokes-Gleichungen (einfache Herleitung)*, (Juli 04, 2014). Zugegriffen: Dez. 01, 2021. [Online Video]. Verfügbar unter: <https://www.youtube.com/watch?v=AVLjUq7ZPZ0>
- [41] F. Emil A, „Euler, Leonhard“, *hls-dhs-dss.ch*. <https://hls-dhs-dss.ch/articles/018751/2005-11-22/> (zugegriffen Okt. 21, 2021).
- [42] Andreas Malcherek, *Numerik 13: Finite-Volumen-Verfahren*, (Mai 05, 2015). Zugegriffen: Okt. 30, 2021. [Online Video]. Verfügbar unter: https://www.youtube.com/watch?v=PND3Jx8n_hg
- [43] D. Braess, *Finite Elemente*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013. doi: 10.1007/978-3-642-34797-9.
- [44] ANSYS Inc., „ANSYS CFX-Solver Modeling Guide“, Canonsburg, Instruction manual ANSYS CFX Release 19.3, 2019.

Danksagung

Ich möchte mich vor allem bei meinem Betreuer Sebastian Müller für die umfangreiche Unterstützung während dieser Arbeit bedanken. Durch einen regen und unkomplizierten Mailverkehr und eine mir immer offene Tür konnten Fragen oder Unklarheiten schnell geklärt werden. Darüber hinaus möchte ich mich hiermit nochmals ausdrücklich für die mir entgegengebrachte Geduld und Zeit bedanken.

Den Laboreinsätzen hat es neben der erforderlichen Ernsthaftigkeit nicht an Spaß gefehlt, wodurch mein Interesse im Bereich der Hydromechanik für den konsekutiven Masterstudiengang gestärkt wurde. Außerdem hat mich Herr Müller mit Ansys CFX vertraut gemacht und hat mir bei Schwierigkeiten stets weitergeholfen, wodurch ich mich auch im weiteren Verlauf des Studiums auf tiefere Einblicke in die numerische Strömungsmechanik freue.

Des Weiteren möchte ich mich bei den Mitarbeitern des Wasserlabors bedanken, die mir auch bei Fragen rund um den Versuchsstand und die damit verbundene Technik stets zu Hilfe standen.

Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, die Zitate ordnungsgemäß gekennzeichnet und keine anderen, als die im Literatur/Schriftenverzeichnis angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

Ferner habe ich von dem Merkblatt über die Verwendung von studentischen Abschlussarbeiten Kenntnis genommen und räume das Nutzungsrecht an meiner Bachelor-Arbeit an der Universität der Bundeswehr München ein.

München, den 14.12.2021