Ganzzahlige Galoisstrukturen und L-Reihen: II. Allgemeine Hauptordnungen in zahmen Erweiterungen

Andreas Nickel

Diplomarbeit
im Studiengang Diplom-Mathematik
am Institut für Mathematik der Universität Augsburg

Betreuer: Prof. Dr. J. Ritter
Zweitkorrektor: Priv.-Doz. Dr. W. Bley

September 2004

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Die vorliegende Arbeit setzt die Diplomarbeit [13] meiner Studienkollegin Simone Schuierer logisch fort. Diese beschäftigt sich u.a. mit den verschiedenen Beschreibungen von Klassengruppen, insbesondere mit der von A. Fröhlich eingeführten Beschreibung durch Homomorphismen. Falls der Leser bereits mit dieser Theorie vertraut ist, kann er mit der Lektüre beginnen, auch ohne vorher die Arbeit von S. Schuierer gelesen zu haben. Dazu werden alle aus dieser Arbeit benötigten Resultate in einer kurzen Einführung wiederholt. Des Weiteren sollte der Leser Kenntnisse in den Grundlagen der algebraischen Zahlentheorie und der Darstellungstheorie endlicher Gruppen besitzen. Für das letzte Kapitel sind darüberhinaus Kenntnisse in der Iwasawa-Theorie erforderlich.

Der erste Teil beschäftigt sich mit den ganzen algebraischen Zahlen in einer endlichen zahmen galoisschen Erweiterung algebraischer Zahlkörper. Diese bilden einen endlich erzeugten projektiven Modul über dem ganzzahligen Gruppenring der zugehörigen Galoisgruppe, und es stellt sich die Frage, ob es sich dabei sogar um einen freien Modul handelt, also eine Ganzheitsbasis existiert. Eine damit verwandte Fragestellung lässt sich nun mit Hilfe der Klassengruppe formulieren. Die ganzen algebraischen Zahlen in einer zahmen Erweiterung definieren nämlich ein Element in der Klassengruppe, und eine Ganzheitsbasis existiert nur, wenn dieses Element trivial ist. In etlichen Fällen kann man sogar umgekehrt auf die Existenz schließen. Deshalb suchen wir einen geeigneten darstellenden Homomorphismus, der dieses Element in der Klassengruppe beschreibt. Dieser Homomorphismus gibt dann in etlichen Fällen Aufschluss über die Existenz einer Ganzheitsbasis und liefert sogar noch weitere wichtige Resultate.

Der zweite Teil der Arbeit löst sich dann von der Voraussetzung „zahm“ und beschreibt eine auf T. Chinburg zurückgehende Invariante einer endlichen galoisschen Körpererweiterung. Diese liegt bereits in der Klassengruppe und stimmt im zahmen Fall mit dem von den ganzen algebraischen Zahlen definierten Element überein. Es werden einige Vermutungen angesprochen, die sich zu einem großen Teil aus den vorher gemachten Beobachtungen ergeben. Insbesondere wird ein Weg von K.W. Gruenberg, J. Ritter und A. Weiss vorgestellt, wie man die Wurzelzahl-Vermutung von T. Chinburg unter Voraussetzung der Vermutung von Stark liften und lokalisieren kann. Schließlich wird noch ein Zusammenhang dieser lokalen Wurzelzahl-Vermutung mit einer äquivarianten

Form der Iwasawa-Theorie hergestellt.

Dank gilt allen Dozenten, bei denen ich im Laufe meines Studiums Vorlesungen und Seminare besuchen durfte, insbesondere Herrn Prof. Dr. J. Ritter und Herrn Priv.-Doz. Dr. W. Bley, bei denen ich dank ihres Engagements an besonders vielen Veranstaltungen teilnehmen konnte. Ich bedanke mich bei meiner Kommilitonin Simone Schuierer für die gute Zusammenarbeit während unseres Studiums. Außerdem danke ich natürlich meinen Eltern, die mich mein gesamtes Studium hindurch sowohl mental als auch finanziell unterstützt haben.

Augsburg, September 2004
Andreas Nickel

Kapitel 1

Einführung

In diesem ersten kurzen Kapitel wollen wir die nötige Notation bereitstellen und einige Resultate aus der Arbeit von S. Schuierer (vgl. [13]) nochmals in Erinnerung rufen.

Sei N/K ein galoissche Erweiterung algebraischer Zahlkörper mit endlicher Galoisgruppe G und den ganzen algebraischen Zahlen $\mathfrak{O}$ von N und $\mathfrak{o}$ von K. $R(G)$ sei die Gruppe der virtuellen Charaktere von G mit Werten in $\mathbb{Q}^c$ und $\operatorname{Irr} G$ die Menge aller irreduziblen Charaktere von G. Wir wählen einen algebraischen Zahlkörper $E \supset N$, so dass alle Darstellungen von G über E realisiert werden können. Wir können stets annehmen, dass E galoissch über $\mathbb{Q}$ ist, und bezeichnen die Galoisgruppe mit Γ.

Ist $\mathfrak{p}$ eine Primstelle von K und $\mathfrak{P}$ eine Primstelle von N über $\mathfrak{p}$, so schreiben wir $N_{\mathfrak{P}}$ bzw. $K_{\mathfrak{p}}$ für die Komplettierungen. Die Erweiterung $N_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}$ ist wieder galoissch und ihre Galoisgruppe ist isomorph zur Zerlegungsgruppe $G_{\mathfrak{P}}$. Analog ist für jede endliche Primstelle $\wp$ von E mit $\wp \cap \mathbb{Z} = (p)$ die Komplettierung $E_\wp$ galoissch über $\mathbb{Q}_p$ mit Gruppe $\Gamma_\wp$. Entsprechend besitzt $E_\wp/\mathbb{R}$ für unendliche $\wp$ die Galoisgruppe $\Gamma_\wp$, welche für reelles $E_\wp$ trivial und für komplexes $E_\wp$ zyklisch von der Ordnung 2 ist.

Weiter bezeichnen wir die Idele von E mit $\mathcal{J}(E)$ und die Einheitenidele mit $\mathcal{U}(E)$. Analoge Bezeichnungen wählen wir für die Idele und Einheitenidele von anderen Körpern oder Ordnungen.
Wir erinnern an die Lokalisierungssequenz der K-Theorie

$$K_1(\mathbb{Z}G) \to K_1(\mathbb{Q}G) \xrightarrow{\partial} K_0T(\mathbb{Z}G) \xrightarrow{\lambda} K_0(\mathbb{Z}G) \to K_0(\mathbb{Q}G). \tag{1.1}$$

Dabei ist das Bild von λ gerade die lokal freie Klassengruppe $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}G)$. Wenn wir $\mathbb{Z}$ durch $\mathbb{Z}_p$ ersetzen, so erhalten wir für jede rationale Primzahl p die Sequenz

$$K_1(\mathbb{Z}_pG) \to K_1(\mathbb{Q}_pG) \xrightarrow{\partial_p} K_0T(\mathbb{Z}_pG) \to 0. \tag{1.2}$$

Lokale Komplettierung liefert einen Isomorphismus

$$K_0T(\mathbb{Z}G) \simeq \bigoplus_{p\nmid\infty} K_0T(\mathbb{Z}_pG).$$

Beschreiben wir die Elemente in $K_1(\mathbb{Q}_pG)$ durch Klassen $[X,g]$, wobei X ein projektiver $\mathbb{Q}_pG$-Modul und g ein Automorphismus auf X ist, so haben wir des Weiteren Isomorphismen

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{Det}: & K_1(\mathbb{Q}_pG) & \simeq & \mathrm{Hom}_{\Gamma_\wp}(R(G), E_\wp^\times) \\ & [X,g] & \mapsto & [\chi \mapsto \det(g|\mathrm{Hom}_{E_\wp G}(V_\chi, E_\wp \otimes_{\mathbb{Q}_p} X))] \end{array} \tag{1.3}$$

und

$$K_0T(\mathbb{Z}_pG) \simeq \frac{\mathrm{Hom}_{\Gamma_\wp}(R(G), E_\wp^\times)}{\mathrm{Det}\,(\mathbb{Z}_pG^\times)}. \tag{1.4}$$

Dabei bezeichne $\wp$ eine über p gelegene Primstelle von E und V_χ einen $E_\wp G$-Modul, der χ realisiert. Global haben wir

$$K_0T(\mathbb{Z}G) \simeq \frac{\mathrm{Hom}_\Gamma^+(R(G), \mathcal{J}(E))}{\mathrm{Det}\,\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)}. \tag{1.5}$$

Das Pluszeichen steht hier dafür, dass für symplektische Charaktere an den unendlichen Stellen stets nur reelle positive Werte angenommen werden. Für die Klassengruppe gilt:

$$\mathrm{Cl}\,(\mathbb{Z}G) \simeq \frac{\mathrm{Hom}_\Gamma(R(G), \mathcal{J}(E))}{\mathrm{Det}\,\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)\mathrm{Hom}_\Gamma(R(G), E^\times)}. \tag{1.6}$$

Bemerkung: Bezeichnet $\mathbb{Q}^c$ den algebraischen Abschluss von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$, so gilt mit $\Omega = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^c/\mathbb{Q})$ offensichtlich

$$\mathrm{Hom}_\Gamma^+(R(G), \mathcal{J}(E)) = \mathrm{Hom}_\Omega^+(R(G), \mathcal{J}(\mathbb{Q}^c))$$

und entsprechende Gleichheiten für die anderen Hom-Gruppen, so dass wir stets E durch $\mathbb{Q}^c$ und Γ durch Ω ersetzen können.

Ist nun Λ eine Maximalordnung von $\mathbb{Q}G$, die $\mathbb{Z}G$ enthält und $D(\mathbb{Z}G)$ der Kern der surjektiven Abbildung $\mathrm{Cl}\,(\mathbb{Z}G) \to \mathrm{Cl}\,(\Lambda)$, so gilt

$$D(\mathbb{Z}G) \simeq \frac{\mathrm{Hom}_\Gamma^+(R(G), \mathcal{U}(E))}{\mathrm{Det}\,\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)\mathrm{Hom}_\Gamma^+(R(G), \mathfrak{o}_E^\times)}. \tag{1.7}$$

Allgemeiner gilt für einen beliebigen algebraischen Zahlkörper $M \subset E$ mit Ganzheitsring $\mathfrak{o}_M$

$$\mathrm{Cl}\,(\mathfrak{o}_M G) \simeq \frac{\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(E/M)}(R(G), \mathcal{J}(E))}{\mathrm{Det}\,\mathcal{U}(\mathfrak{o}_M G)\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(E/M)}(R(G), E^\times)} \tag{1.8}$$

und entsprechend für $D(\mathfrak{o}_M G)$. Hier steht das Pluszeichen dafür, dass für symplektische Charaktere an allen unendlichen Stellen von E, die über einer reellen Stelle von M liegen, nur reelle positive Werte angenommen werden. Auch hier können wir wieder E durch $\mathbb{Q}^c$ und $\mathrm{Gal}(E/M)$ durch $\Omega_M = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^c/M)$ ersetzen.

Bemerkung: Für einen lokal freien $\mathfrak{o}_M G$-Modul X vom Rang 1 mit $X_\mathfrak{p} = ((\mathfrak{o}_M)_\mathfrak{p} G)\alpha_\mathfrak{p}$ für jede Primstelle $\mathfrak{p}$ von M und $MX = MGv$ definieren wir $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(E/M)}(R(G), \mathcal{J}(E))$ auf den irreduziblen Charakteren durch

$$(f(\chi))_\mathfrak{p} = \mathrm{Det}_\chi \lambda_\mathfrak{p} \in E_\mathfrak{p}^\times = \prod_{\wp | \mathfrak{p}} E_\wp^\times,$$

wobei $\lambda_\mathfrak{p} \in M_\mathfrak{p} G^\times$ mit $\alpha_\mathfrak{p} = v\lambda_\mathfrak{p}$. Dann geht die Klasse von X in $\mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_M G)$ unter obigem Isomorphismus auf die Klasse des darstellenden Homomorphismus f.

Sei H eine Untergruppe von G und F ein Unterkörper von M. Dann kommutieren die beiden Diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(E/M)}(R(G), \mathcal{J}(E)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{res}"'] & \mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_M G) \arrow[d, "\mathrm{res}"'] \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(E/M)}(R(H), \mathcal{J}(E)) \arrow[r] & \mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_M H) \end{tikzcd} \tag{1.9}$$

und

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(E/M)}(R(G), \mathcal{J}(E)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{N}_{M/F}"'] & \mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_M G) \arrow[d, "r_{M/F}"'] \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(E/F)}(R(G), \mathcal{J}(E)) \arrow[r] & \mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_F G) \end{tikzcd} \tag{1.10}$$

Fassen wir die Klassengruppe als Kern der Rangabbildung auf, so wird der Homomorphismus $r_{M/F}$ induziert, indem man jeden $\mathfrak{o}_M G$-Modul nur noch als $\mathfrak{o}_F G$-Modul betrachtet. Für $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(E/M)}(R(G), \mathcal{J}(E))$ und $\chi \in R(G)$ ist

$$(\mathcal{N}_{M/F}(f))(\chi) = \prod_\sigma f(\chi^{\sigma^{-1}})^\sigma,$$

wobei $\{\sigma\}$ ein Rechtsrepräsentantensystem von $\mathrm{Gal}(E/M)$ in $\mathrm{Gal}(E/F)$ durchläuft.

Ist Λ eine Maximalordnung in $\mathbb{Q}G$, die $\mathbb{Z}G$ enthält, so gilt für endliche Primstellen p von $\mathbb{Q}$

$$\mathrm{Det}(\Lambda_p^\times) = \mathrm{Hom}_\Gamma(R(G), (\mathfrak{o}_E)_p^\times) \tag{1.11}$$

und

$$\mathrm{Det}\,(\mathbb{R}G^\times) = \mathrm{Hom}_\Gamma^+(R(G), (E \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R})^\times), \tag{1.12}$$

also insgesamt

$$\mathrm{Det}\,(\mathcal{U}(\Lambda)) = \mathrm{Hom}_\Gamma^+(R(G), \mathcal{U}(E)). \tag{1.13}$$

Kapitel 2

Ein Element der Klassengruppe

In diesem Abschnitt wollen wir ein konkretes Element in der Klassengruppe näher betrachten. Sei also N/K eine Galoiserweiterung algebraischer Zahlkörper mit Gruppe G. $\mathfrak{O}$ bzw. $\mathfrak{o}$ seien die Ganzheitsringe von N bzw. K. Falls N/K zahm verzweigt ist, definieren die ganzen algebraischen Zahlen $\mathfrak{O}$ von N auf Grund des folgenden Satzes von E. Noether ein Element in $\mathrm{Cl}\,(\mathfrak{o}G)$:

Satz 2.0.1 *Ist N/K eine Erweiterung algebraischer Zahlkörper, dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(i) *N/K ist zahm verzweigt.*

(ii) *$\mathfrak{O}$ ist lokal frei über $\mathfrak{o}G$.*

(iii) $\mathrm{Tr}_{N/K}(\mathfrak{O}) = \mathfrak{o}$.

Unser hauptsächliches Interesse gilt der Klasse von $\mathfrak{O}$ in $\mathrm{Cl}\,(\mathbb{Z}G)$ und wir bezeichnen diese mit

$$U_{N/K} = (\mathfrak{O})_{\mathbb{Z}G}.$$

Ziel des folgenden Paragraphen ist es, ein darstellendes Element von $U_{N/K}$ in $\mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbb{Q}}}(R(G), \mathcal{J}(\mathbb{Q}^c))$ zu finden.

2.1 Resolventen

Wir benötigen zunächst die folgende

Proposition 2.1.1 *(i) Ist a ein freier Erzeugender von N über KG, dann ist $\sum_{g\in G} a^g g^{-1} \in (NG)^\times$.*

(ii) Ist $\mathfrak{p}$ eine in N unverzweigte Primstelle von K und a ein freier Erzeugender von $\mathfrak{O}_\mathfrak{p} = \mathfrak{O} \otimes_\mathfrak{o} \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ über $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$, dann ist $\sum_{g\in G} a^g g^{-1} \in (\mathfrak{O}_\mathfrak{p} G)^\times$.

Beweis. Wir haben in beiden Fällen die Gleichung

$$(\sum_{g\in G} a^g g^{-1})(\sum_{h\in G} c_h h) = 1$$

zu lösen, wobei die c_h in N bzw. $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ liegen sollen. Im ersten Fall ist dies wegen $\mathrm{Det}\,(a^{gh^{-1}})_{g,h\in G} \in N^\times$ möglich. Im zweiten Fall liegt $\mathrm{Det}\,(a^{gh^{-1}})$ sogar in $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}^\times$, da $\mathfrak{p}$ unverzweigt ist in N. □

Definition 2.1.2 *Sei $a \in N$ beliebig und $\chi \in R(G)$ ein virtueller Charakter von G. Dann heißt das Element*

$$(a|\chi) = (a|\chi)_{N/K} = \mathrm{Det}\,_\chi(\sum_{g\in G} a^g g^{-1}) \in \mathbb{Q}^c$$

die Resolvente von a.

Erzeugt nun a eine Normalbasis von N/K, so erhalten wir also wegen Proposition 2.1.1 eine Abbildung $\chi \mapsto (a|\chi)$ in $\mathrm{Hom}_{\Omega_N}(R(G), (\mathbb{Q}^c)^\times)$.

Analog definiert man für einen freien Erzeuger $a_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ über $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}G$ das Element $(a|\chi) \in (\mathbb{Q}_\mathfrak{p}^c)^\times$. D.h. $(a|\chi) \in E_\mathfrak{p}^\times$, falls E hinreichend groß ist.

Wir fassen nun einige Rechenregeln für Resolventen in der folgenden Proposition zusammen. Die Beweise können bei [5] nachgelesen werden. Wir bezeichnen dabei mit $\det_\chi$ den abelschen Charakter von G, der durch Einschränkung von $\mathrm{Det}\,_\chi$ auf G entsteht. Über die kanonische Surjektion $\Omega_K \twoheadrightarrow G$ können wir $\det_\chi$ auch als abelschen Charakter von Ω_K auffassen.

Proposition 2.1.3 *(i) Sei $a \in N$ und $\lambda \in KG$. Dann gilt:*

$$\sum_{g\in G} a^{\lambda g} g^{-1} = (\sum_{g\in G} a^g g^{-1})\lambda.$$

(ii) Ist $\lambda \in (KG)^\times$ und erzeugt a eine Normalbasis von N/K , dann erzeugt auch a^λ eine Normalbasis von N/K und es gilt

$$(a^\lambda|\chi) = (a|\chi)\mathrm{Det}\,_\chi(\lambda)$$

für alle $\chi \in R(G)$.

(iii) Für $\omega \in \Omega_K$ ist

$$(a|\chi^{\omega^{-1}})^\omega = (a|\chi)\det_\chi(\omega).$$

(iv) Sei $K_0 \subset K$ ein Unterkörper von K und seien $\{\omega_i\}$ bzw. $\{\sigma_j\}$ Rechtstransversale von Ω_K in Ω_{K_0}. Dann gibt es ein $g \in G$, unabhängig von χ, mit

$$\prod_i (a|\chi^{\omega_i^{-1}})^{\omega_i} = \prod_j (a|\chi^{\sigma_j^{-1}})^{\sigma_j} \det_\chi(g).$$

Entsprechende Aussagen gelten, wenn $a_\mathfrak{p}$ ein freier Erzeuger von $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ über $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}G$ ist.

Das Element g in (iv) findet man so: Jedes σ_j ist von der Form $\delta(j)\omega_i$ für ein geeignetes i und ein $\delta(j) \in \Omega_K$. Nach (iii) unterscheiden sich die Produkte $\prod_i (a|\chi^{\omega_i^{-1}})^{\omega_i}$ und $\prod_j (a|\chi^{\sigma_j^{-1}})^{\sigma_j}$ um den Faktor $\prod_j \det_\chi(\delta(j))$, also wählen wir g als die Einschränkung von $\prod_j \delta(j)$ auf N.

Das gesuchte darstellende Element in $\mathrm{Hom}_{\Omega_K}(R(G), \mathcal{J}(\mathbb{Q}^c))$ liefert nun der folgende

Satz 2.1.4 *Sei N/K zahm verzweigt. Für jede Primstelle $\mathfrak{p}$ von K sei $a_\mathfrak{p}$ ein freier Erzeugender von $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ über $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}G$. Weiterhin erzeuge b eine Normalbasis von N/K. Dann ist die Abbildung $f = (f_\mathfrak{p}) \in \mathrm{Hom}_{\Omega_K}(R(G), \mathcal{J}(\mathbb{Q}^c))$ mit*

$$f_\mathfrak{p}(\chi) = (a_\mathfrak{p}|\chi)(b|\chi)^{-1}, \ \chi \in R(G)$$

ein darstellendes Element für die Klasse von $\mathfrak{O}$ in $\mathrm{Cl}\,(\mathfrak{o}G)$.

Beweis. Für jede Primstelle $\mathfrak{p}$ von K gibt es ein $\lambda_\mathfrak{p} \in (K_\mathfrak{p}G)^\times$ mit

$$a_\mathfrak{p} = b^{\lambda_\mathfrak{p}}$$

und $(\mathfrak{O})_{\mathfrak{o}G}$ ist wegen der Bemerkung nach 1.8 dargestellt von h mit

$$h_\mathfrak{p}(\chi) = \mathrm{Det}\,_\chi(\lambda_\mathfrak{p}).$$

Aber nach Proposition 2.1.3 ist

$$\mathrm{Det}\,_\chi(\lambda_\mathfrak{p}) = (a_\mathfrak{p}|\chi)(b|\chi)^{-1}.$$

□

Der Beweis zeigt auch, dass das Element $(a|\chi) \in \prod_\mathfrak{p} (\mathbb{Q}_\mathfrak{p}^c)^\times$ mit lokalen Komponenten

$$(a|\chi)_\mathfrak{p} = (a_\mathfrak{p}|\chi) \tag{2.1}$$

tatsächlich ein Idel ist.Wir schreiben die Abbildung f mit dieser Notation also auch als

$$\chi \mapsto (a|\chi)(b|\chi)^{-1}.$$

Über das Diagramm 1.10 erhalten wir mit $\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}}f$ einen darstellenden Homomorphismus von $U_{N/K}$. Setzen wir noch

$$\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}}(b|\chi) = \prod_\sigma (b|\chi^{\sigma^{-1}})^\sigma,$$

wobei $\{\sigma\}$ ein Rechtsrepräsentantensystem von Ω_K in $\Omega_\mathbb{Q}$ durchläuft, und analog mit a anstelle von b, so erhalten wir die

Folgerung 2.1.5 *Die Abbildung*

$$\chi \mapsto \mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}}(a|\chi)\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}}(b|\chi)^{-1}$$

repräsentiert das Element $U_{N/K}$ in $\mathrm{Hom}_{\Omega_\mathbb{Q}}(R(G), \mathcal{J}(\mathbb{Q}^c))$.

Bemerkung: Man beachte, dass die Definition von $\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}}$ von der Wahl des Repräsentantensystems abhängt. Aber nach Proposition 2.1.3 unterscheidet sich das Ergebnis höchstens um eine Einheitswurzel, so dass die Abbildung in obiger Folgerung ein eindeutiges Element in der Klassengruppe bestimmt. Um tiefer liegende Resultate zu erhalten, muss man jedoch diese Abbildung noch abändern.

2.2 Ein repräsentierendes Element für $U_{N/K}$

In dem darstellenden Element, welches wir für $U_{N/K}$ angeben wollen, treten in natürlicher Weise Strukturen aus der Theorie der L-Reihen auf. Wir geben deshalb zunächst einen kurzen Überblick über die von uns benötigten Resultate. Auf Beweise wird gänzlich verzichtet. Vergleiche dazu z.B. [8].

2.2.1 Artinsche L-Reihen

Wir starten wieder mit einer galoisschen Erweiterung N/K mit Gruppe G. Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von K wählen wir ein über $\mathfrak{p}$ gelegenes Primideal $\mathfrak{P}$ von N. Wie üblich bezeichnen wir mit $G_{\mathfrak{P}}$ die Zerlegungsgruppe und mit $I_{\mathfrak{P}}$ die Trägheitsgruppe von $\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{p}$. Weiter sei $\phi_{\mathfrak{P}}$ das erzeugende Element von $G_{\mathfrak{P}}/I_{\mathfrak{P}}$, welches auf den Restklassenkörpern die Abbildung $x \mapsto x^q$ mit $q = N(\mathfrak{p})$ induziert, wobei $N(\mathfrak{p}) = |\mathfrak{o}/\mathfrak{p}|$ die Absolutnorm des Ideals $\mathfrak{p}$ bezeichne. Jede Hochhebung von $\phi_{\mathfrak{P}}$ auf $G_{\mathfrak{P}}$ und damit auf G bezeichnen wir als Frobenius-Automorphismus und notieren diese wieder mit $\phi_{\mathfrak{P}}$.

Ist nun χ ein Charakter der Gruppe G, der von einem G-Modul $V = V_\chi$ realisiert wird, so ist $\phi_{\mathfrak{P}}$ ein Endomorphismus des Fixmoduls $V^{I_{\mathfrak{P}}}$, unabhängig von der gewählten Hochhebung. Wir kommen nun zu der

Definition 2.2.1 *Sei N/K eine galoissche Erweiterung mit Gruppe G, χ ein Charakter von G. Dann ist die Artinsche L-Reihe definiert als*

$$L(N/K, \chi, s) = \prod_{\mathfrak{p} \nmid \infty} \det(1 - \phi_{\mathfrak{P}} N(\mathfrak{p})^{-s}; V^{I_{\mathfrak{P}}})^{-1}.$$

Die artinschen L-Reihen sind in der Halbebene $Re(s) > 1$ analytische Funktionen und weisen das folgende Verhalten auf:

Satz 2.2.2 *(i) Für den trivialen Charakter 1_G gilt*

$$L(N/K, 1_G, s) = \zeta_K(s).$$

(ii) Sind χ und χ' zwei Charaktere von G, so ist

$$L(N/K, \chi + \chi', s) = L(N/K, \chi, s)L(N/K, \chi', s).$$

(iii) Ist N'/K eine galoissche Erweiterung mit $N' \supset N$ und χ ein Charakter von G, so ist
$$L(N'/K, \chi, s) = L(N/K, \chi, s).$$

(iv) Ist N' ein Zwischenkörper, $N \supset N' \supset K$ und χ ein Charakter von $H = \mathrm{Gal}(N/N')$, so gilt
$$L(N/N', \chi, s) = L(N/K, \mathrm{ind}_H^G \chi, s).$$

Ein weiteres wichtiges Objekt dieser Theorie ist der *Artin-Führer* eines Charakters χ. Er wird im Folgenden mit $\mathfrak{f}(\chi) = \mathfrak{f}(N/K, \chi)$ bezeichnet und ist konkret durch
$$\mathfrak{f}(\chi) = \prod_{\mathfrak{p} \nmid \infty} \mathfrak{p}^{f_{\mathfrak{p}}(\chi)} \tag{2.2}$$
gegeben, wobei die
$$f_{\mathfrak{p}}(\chi) = \sum_{i \geq 0} \frac{g_i}{g_0} \mathrm{codim}\, V^{G_i} \tag{2.3}$$
ganze, nicht negative Zahlen sind. g_i ist dabei die Ordnung der i-ten Verzweigungsgruppe G_i von $N_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}$ und V wie oben der zu χ gehörende G-Modul. Das Ideal
$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(\chi) = \mathfrak{p}^{f_{\mathfrak{p}}(\chi)} \tag{2.4}$$
wird auch als *lokaler Artin-Führer* bezeichnet.

Bemerkung: Ist N/K zahm, so ist bereits $g_1 = 1$, also $\mathrm{codim}\, V^{G_i} = 0$ für $i \geq 1$. Somit vereinfacht sich der obige Ausdruck 2.3 zu $f_{\mathfrak{p}}(\chi) = \mathrm{codim}\, V^{G_0} = \mathrm{codim}\, V^{I_{\mathfrak{P}}}$. Insbesondere ist für alle unverzweigten Primideale $f_{\mathfrak{p}}(\chi) = 0$.

Der Artin-Führer weist ein ähnliches funktorielles Verhalten auf wie die Artinschen L-Reihen:

Satz 2.2.3 *(i) $\mathfrak{f}(\chi + \chi') = \mathfrak{f}(\chi)\mathfrak{f}(\chi')$, also insbesondere $\mathfrak{f}(1_G) = (1)$.*

(ii) Ist N'/K eine galoissche Erweiterung mit $N' \supset N$ und χ ein Charakter von G, so ist
$$\mathfrak{f}(N'/K, \chi) = \mathfrak{f}(N/K, \chi).$$

(iii) Ist N' ein Zwischenkörper, $N \supset N' \supset K$ und χ ein Charakter von $H = \mathrm{Gal}(N/N')$, so gilt
$$\mathfrak{f}(N/K, \mathrm{ind}_H^G \chi) = \mathfrak{d}_{N'/K}^{\chi(1)} \mathfrak{N}_{N'/K}(\mathfrak{f}(N/N', \chi)),$$
wobei $\mathfrak{d}_{N'/K}$ die Diskriminante und $\mathfrak{N}_{N'/K}$ die Idealnorm[1] der Erweiterung N'/K bezeichne.

[1]Ist $\mathfrak{P}'$ ein Primideal von N' und $\mathfrak{p}$ das Primideal von K unter $\mathfrak{P}'$, so gilt $\mathfrak{N}_{N'/K}(\mathfrak{P}') = \mathfrak{p}^f$ mit $f = [\mathfrak{O}_{N'}/\mathfrak{P}' : \mathfrak{o}_K/\mathfrak{p}]$. Für beliebige Ideale wird die Idealnorm multiplikativ fortgesetzt.

Zwischen der Diskriminante einer galoisschen Körpererweiterung und den Artin-Führern besteht der folgende wichtige Zusammenhang:

Satz 2.2.4 (Führer-Diskriminanten-Formel) *Sei N/K eine galoissche Erweiterung globaler Körper mit Gruppe G.Dann gilt:*

$$\mathfrak{d}_{N/K} = \prod_{\chi \in \operatorname{Irr} G} \mathfrak{f}(\chi)^{\chi(1)}.$$

Die Artinsche L-Reihe besteht aus einem Produkt über die endlichen Primstellen von K. Wir wollen diese nun um Faktoren an den unendlichen Stellen erweitern. Dazu setzen wir

$$L_{\mathfrak{p}}(N/K, \chi, s) = \begin{cases} (2(2\pi)^{-s}\Gamma(s))^{\chi(1)} & \mathfrak{p} \text{ komplex} \\ (\pi^{-s/2}\Gamma(s/2))^{n_+}(\pi^{-(s+1)/2}\Gamma((s+1)/2))^{n_-} & \mathfrak{p} \text{ reell} \end{cases}$$

mit $n_+ = \frac{1}{2}(\chi(1) + \chi(\phi_{\mathfrak{P}}))$ und $n_- = \frac{1}{2}(\chi(1) - \chi(\phi_{\mathfrak{P}}))$. Dabei bezeichnet $\phi_{\mathfrak{P}}$ wieder das erzeugende Element von $\operatorname{Gal}(N_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}})$. Die Zahlen n_+ bzw. n_- ergeben sich aus den Dimensionen der beiden Eigenräume

$$V^+ = \{m \in V | \phi_{\mathfrak{P}} x = x\} \text{ bzw. } V^- = \{m \in V | \phi_{\mathfrak{P}} x = -x\}. \tag{2.5}$$

Außerdem setzen wir noch

$$A(N/K, \chi) = |d_K|^{\chi(1)} N(\mathfrak{f}(N/K, \chi)) \in \mathbb{R}^+$$

und

$$L_\infty(N/K, \chi, s) = \prod_{\mathfrak{p}|\infty} L_{\mathfrak{p}}(N/K, \chi, s).$$

Die Zahlen $A(N/K, \chi)$ weisen das gleiche funktorielle Verhalten auf wie die L-Reihen in Satz 2.2.2 (ii) - (iv).

Wir kommen nun zu der

Definition 2.2.5 *Ist N/K eine galoissche Erweiterung mit Gruppe G und χ ein Charakter von G, so heißt*

$$\Lambda(N/K, \chi, s) = A(N/K, \chi)^{s/2} L_\infty(N/K, \chi, s) L(N/K, \chi, s)$$

die vollständige Artinsche L-Reihe von χ.

Über sie gilt der wichtige

Satz 2.2.6 *Die Artinsche L-Reihe $\Lambda(N/K, \chi, s)$ besitzt eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ und genügt der Funktionalgleichung*

$$\Lambda(N/K, \chi, s) = W(N/K, \chi)\Lambda(N/K, \overline{\chi}, 1 - s)$$

mit einer Konstanten $W(N/K, \chi)$ vom Betrag 1.

$W(N/K,\chi)$ heißt die *Artinsche Wurzelzahl*. Wir spalten von dieser nun einen unendlichen Teil ab, indem wir zu jeder unendlichen Primstelle $\mathfrak{p}$ den zu χ gehörenden G-Modul V wie in 2.5 in seine beiden Eigenräume aufspalten:

$$V = V^+ \oplus V^-$$

Entsprechend zerlegt sich χ als $\chi = \chi_+ + \chi_-$ und wir setzen

$$W(N_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}},\chi) = i^{-\chi_-(1)} \tag{2.6}$$

und

$$W_\infty(N/K,\chi) = \prod_{\mathfrak{p}|\infty} W(N_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}},\chi). \tag{2.7}$$

Über die formale Gleichung

$$W(N/K,\chi) = \tau(N/K,\overline{\chi})W_\infty(N/K,\chi)/N(\mathfrak{f}(N/K,\chi))^{1/2}$$

werden komplexe Zahlen $\tau(N/K,\chi)$ definiert, die *globalen Gaußschen Summen*. Über sie haben wir den

Satz 2.2.7 *(i)* $|\tau(N/K,\chi)| = N(\mathfrak{f}(N/K,\chi))^{1/2}$

(ii) $\tau(N/K,\chi+\chi') = \tau(N/K,\chi)\tau(N/K,\chi')$

(iii) Ist N' ein Zwischenkörper, $N \supset N' \supset K$ und χ ein Charakter von $H = \mathrm{Gal}(N/N')$, so gilt

$$\tau(N/N',\chi) = \tau(N/K,\mathrm{ind}_H^G\,\chi),$$

falls $\deg(\chi) = 0$.

2.2.2 Der Homomorphismus u

Wir haben nun alle nötigen Hilfsmittel bereit gestellt, um ein anderes geeignetes Element in $\mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbb{Q}}}(R(G),\mathcal{J}(\mathbb{Q}^c))$ zu definieren, welches die Klasse $U_{N/K}$ repräsentiert. Bezeichne dazu wieder $(a|\chi) \in \mathcal{J}(\mathbb{Q}^c)$ das Element mit lokalen Komponenten

$$(a|\chi)_{\mathfrak{p}} = (a_{\mathfrak{p}}|\chi),\ \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}} = a_{\mathfrak{p}}\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}G.$$

Wir setzen nun

Definition 2.2.8

$$u(\chi) = \mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}}(a|\chi)\tau(N/K,\chi)^{-1}W'(N/K,\chi),$$

wobei $W'(N/K,\chi)$ auf irreduziblen Charakteren gegeben ist durch

$$W'(N/K,\chi) = \begin{cases} 1, & \chi \textit{ nicht symplektisch} \\ W(N/K,\chi) & \chi \textit{ symplektisch.} \end{cases}$$

Zunächst definiert u nur einen Homomorphismus $R(G) \to \mathcal{J}(\mathbb{Q}^c)$. Es ist an dieser Stelle jedoch noch nicht klar, ob $u(\chi)$ tatsächlich mit der Galoiswirkung verträglich ist, in der Klassengruppe das Element $U_{N/K}$ repräsentiert und ob es eine Verbesserung gegenüber dem Homomorphismus aus Folgerung 2.1.5 darstellt. Bevor wir uns diesen Problemen widmen, bemerken wir noch, dass $W'(N/K,\chi)$ nur die Werte ± 1 annimmt. Dies liegt an der folgenden

Proposition 2.2.9 *Ist χ ein reell-wertiger Charakter von G, so gilt:*

$$W(N/K,\chi) = \pm 1.$$

Beweis. Aus der Funktionalgleichung der Artinschen L-Reihen 2.2.6 erhält man: $W(N/K,\overline{\chi}) = \overline{W(N/K,\chi)}$, d.h. für reell-wertiges χ ist auch $W(N/K,\chi)$ reell. Da aber $|W(N/K,\chi)| = 1$, folgt die Behauptung. □

Damit u überhaupt ein Element in $\mathrm{Cl}\,(\mathbb{Z}G)$ definiert, müssen wir den folgenden Satz beweisen:

Satz 2.2.10 $u \in \mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbb{Q}}}(R(G), \mathcal{J}(\mathbb{Q}^c))$.

Bemerkung: Wie sich gleich zeigen wird, liegt die Verträglichkeit mit der Galoiswirkung keineswegs auf der Hand. In der Tat bereitet sie auch in anderen Fällen große Probleme, so ist z.B. die Vermutung von Stark, die wir an späterer Stelle noch einführen und benutzen werden (vgl. 3.3.6), nach wie vor nur in einigen speziellen Situationen bewiesen.

Mit Satz 2.2.10 erhalten wir dann als

Folgerung 2.2.11 *u ist ein repräsentierender Homomorphismus für $U_{N/K}$.*

Beweis. Nach Folgerung 2.1.5 wird $U_{N/K}$ repräsentiert von $f(\chi) = u(\chi)h(\chi)$ mit

$$h(\chi) = \tau(N/K,\chi)W'(N/K,\chi)\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}}(b|\chi)^{-1}.$$

Da f und u (nach Satz 2.2.10) mit der Wirkung von $\Omega_{\mathbb{Q}}$ verträglich sind, und die Werte von h in $(\mathbb{Q}^c)^\times$ liegen, folgt

$$h \in \mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbb{Q}}}(R(G), (\mathbb{Q}^c)^\times).$$

Also ist mit f auch u ein darstellendes Element für $U_{N/K}$. □

Wir werden den Beweis des Satzes nur skizzieren und verweisen bei den Details auf [5] Kapitel III. Der Kern des Beweises liegt in der Theorie der lokalen Gaußschen Summen, die wir zunächst einführen müssen.

Wir betrachten dazu einen nicht-archimedischen lokalen Körper F von endlichem Grad über $\mathbb{Q}_p$, sowie einen multiplikativen Charakter [2] θ von F. $\mathfrak{p}$ sei

[2]Das ist ein stetiger Homomorphismus $\theta : F^\times \to \mathbb{C}^\times$ von endlicher Ordnung.

das maximale Ideal von $\mathfrak{o}_F$, $U(F) = U^0(F) = \mathfrak{o}_F^\times$ und $U^m(F) = 1 + \mathfrak{p}^m$ für $m > 0$. Wir definieren den *Führer* von θ als das Ideal

$$\mathfrak{f}(\theta) = \mathfrak{p}^m,$$

wobei wir m minimal wählen, so dass $U^m(F) \subset \ker(\theta)$. Falls $m = 0$, so nennen wir θ *unverzweigt*, sonst *verzweigt*. Wir definieren nun den additiven Charakter $\psi_F : F \to \mathbb{C}^\times$ durch $\psi_F = \psi_p \circ \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}_p}$, wobei der Homomorphismus $\psi_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}^\times$ gegeben ist durch

$$\psi_p(\mathbb{Z}_p) = 1,\ \psi_p(\frac{1}{p^r}) = e^{2\pi i/p^r}.$$

Schließlich bezeichne $\mathfrak{D}_F$ die Differente von $F/\mathbb{Q}_p$. Wir kommen nun zu der

Definition 2.2.12 *Sei θ ein multiplikativer Charakter von F mit Führer $\mathfrak{f}(\theta)$. Dann wird die lokale Gaußsche Summe $\tau(\theta)$ wie folgt definiert:*
Ist θ unverzweigt, so ist $\tau(\theta) = \theta(\mathfrak{D}_F)^{-1}$.
Ist θ verzweigt, so wähle ein $c \in F^\times$ mit $(c) = \mathfrak{f}(\theta)\mathfrak{D}_F$ und setze

$$\tau(\theta) = \sum_{u \in U(F) \bmod 1+\mathfrak{f}(\theta)} \theta(uc^{-1})\psi_F(uc^{-1}).$$

Das ist unabhängig von der Wahl von c und den Repräsentanten u.
Wir setzten auch im Lokalen wieder

$$W(\theta) = \tau(\overline{\theta})/N(\mathfrak{f}(\theta))^{1/2}.$$

$W(\theta)$ heißt *Wurzelzahl* und hat den Betrag 1.

Wir haben bei den obigen Definitionen multiplikative Charaktere von F betrachtet. In unserem ursprünglichen Problem kommen aber Charaktere der Galoisgruppe vor. Der Zusammenhang ergibt sich wie folgt:
Sei L/F eine Erweiterung lokaler Körper mit Galoisgruppe G und χ ein abelscher Charakter von G. Dann kann man χ also auch als Charakter von G^{ab} auffassen. Bezeichnen wir jetzt noch mit $A_{L/F} : F^\times \to G^{\mathrm{ab}}$ die Artin-Abbildung, so erhalten wir mit $\theta_\chi(a) = \chi(A_{L/F}(a))$ einen multiplikativen Charakter θ_χ. Analog kann man im Globalen einen Idelklassencharakter konstruieren.

Wir bezeichnen im Folgenden mit $R_t(F)$ die Gruppe der virtuellen Charaktere der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(F^t/F)$ mit offenem Kern und Werten in $\mathbb{Q}^c$. F^t ist dabei die maximal zahm verzweigte Erweiterung von F. Für jede endliche zahme Erweiterung L/F mit Gruppe G liefert die Inflation insbesondere eine Einbettung $R(G) \subset R_t(F)$. [3] Analoge Bezeichnungen wählen wir im Globalen.

[3]Es gilt: $R_t(F) = \varinjlim_L R(\mathrm{Gal}(L/F))$, wobei L alle endlichen galoisschen zahmen Erweiterungen von F durchläuft.

Es gilt nun der folgende

Satz 2.2.13 *Sei F ein nicht-archimedischer lokaler Körper. Dann existieren für alle endlichen zahmen Erweiterungen L/F Homomorphismen $\chi \mapsto \tau(L,\chi)$ von $R_t(L)$ nach $(\mathbb{Q}^c)^\times$, so dass*

(i) Für alle abelschen $\chi \in R_t(L)$ ist $\tau(L,\chi) = \tau(\theta_\chi)$.

(ii) Für $F^t \supset L \supset L' \supset K$ gilt

$$\tau(L,\chi) = \tau(L', \operatorname{ind}\chi)$$

für alle $\chi \in R_t(L)$ mit $\deg(\chi) = 0$.

Ein analoges Resultat gilt für die lokalen Wurzelzahlen.

Folgerung 2.2.14 *(i)* $\tau(L,1) = 1$

(ii) $\tau(L', \operatorname{ind}\chi) = \tau(L,\chi)\tau(L', \operatorname{ind} 1)^{\chi(1)}$ *für alle* $\chi \in R_t(L)$.

Ist K ein globaler Körper, so induzieren die Einbettungen $G_{\mathfrak{P}} \rightarrowtail G$ eine Injektion $\mathrm{Gal}(K_\mathfrak{p}^t/K_\mathfrak{p}) \rightarrowtail \mathrm{Gal}(K^t/K)$ für jede Primstelle $\mathfrak{p}$. Diese wiederum induziert einen Homomorphismus $R_t(K) \to R_t(K_\mathfrak{p})$, $\chi \mapsto \chi_\mathfrak{p}$.

Folgerung 2.2.15 *Sei $\chi \in R_t(K)$. Dann gilt:*

$$\tau(K,\chi) = \prod_{\mathfrak{p}\nmid\infty} \tau(K_\mathfrak{p}, \chi_\mathfrak{p})$$

$$W(K,\chi) = \prod_{\mathfrak{p}} W(K_\mathfrak{p}, \chi_\mathfrak{p}),$$

wobei hier das Produkt über alle Primstellen genommen wird.

Bemerkung: Ist $\chi \in R(G)$, wobei G die Galoisgruppe einer endlichen zahmen Erweiterung N/K ist, dann ist $\tau(K,\chi) = \tau(N/K,\chi)$, sowie $W(K,\chi) = W(N/K,\chi)$.

Beweisskizze. Wie gerade bemerkt kann man $\chi \in R(G)$ annehmen, wobei G die Galoisgruppe einer endlichen zahmen Erweiterung von K ist. Da fast alle Primstellen unverzweigt sind, ist auch $\chi_\mathfrak{p}$ unverzweigt und somit abelsch, also $\tau(K_\mathfrak{p}, \chi_\mathfrak{p}) = 1$, da auch $\mathfrak{D}_{K_\mathfrak{p}} = 1$. Es handelt sich also um endliche Produkte. Da beide Seiten auf abelschen Charakteren übereinstimmen und auf Charakteren von Grad 0 induktiv sind, folgt die Gleichheit aus der folgenden stärkeren Version des Satzes von Brauer:
Ist χ ein virtueller Charakter einer endlichen Gruppe G, dann gibt es Untergruppen H_i von G und abelsche Charaktere ψ_i von H_i, sowie ganze Zahlen $n_i \in \mathbb{Z}$, so dass

$$\chi - \deg(\chi)1_G = \sum_i n_i \operatorname{ind}_{H_i}^G(\psi_i - 1_{H_i}) \tag{2.8}$$

□

Wir sind nun soweit, den eigentlichen Beweis von Satz 2.2.10 zu skizzieren. Wir müssen also für alle $\omega \in \Omega_{\mathbb{Q}}$ zeigen, dass

$$u(\chi^{\omega^{-1}})^{\omega} = u(\chi),$$

wobei u definiert war als (vgl. 2.2.8)

$$u(\chi) = \mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}}(a|\chi)\tau(N/K,\chi)^{-1}W'(N/K,\chi).$$

Wir werden jeden Faktor von u einzeln behandeln. Wir wollen dabei im Folgenden stets annehmen, dass χ ein echter Charakter mit einer Darstellung $T : G \to GL_m(\mathbb{Q}^c)$ für ein $m \in \mathbb{N}$ ist. Für eine Körpererweiterung K/K_0 induziert die Verlagerung $\Omega_{K_0}^{ab} \to \Omega_K^{ab}$ einen Homomorphismus abelscher Charaktere, den wir mit v_{K/K_0} bezeichnen.

Wir wenden uns nun dem ersten Faktor $\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}}(a|\chi)$ zu. Ist $\mathfrak{p}$ eine beliebige Primstelle von K, so liegt $\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}}(a_\mathfrak{p}|\chi^{\omega^{-1}})^{\omega}/\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}}(a_\mathfrak{p}|\chi)$ nach Proposition 2.1.3 in $(\mathbb{Q}^c \otimes_K K_\mathfrak{p})^\times$. Dieser Quotient ergibt sich als das Bild von $(v_{K/\mathbb{Q}} \det_\chi)(\omega)$ in $(\mathbb{Q}^c \otimes_K K_\mathfrak{p})^\times$. Wesentlich geht dabei ein, dass $a_\mathfrak{p}$ ein freier Erzeugender von $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ über $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}G$ ist. Wir erhalten also

$$(\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}}(a|\chi^{\omega^{-1}})^{\omega}/\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}}(a|\chi))_\mathfrak{p} = (v_{K/\mathbb{Q}} \det_\chi)(\omega)_\mathfrak{p}$$

und damit das

Lemma 2.2.16 $\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}}(a|\chi^{\omega^{-1}})^{\omega} = \mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}}(a|\chi)(v_{K/\mathbb{Q}} \det_\chi)(\omega)$.

Um das Verhalten des zweiten Faktors - der Gaußschen Summe - zu studieren, definieren wir für jede rationale Primzahl p einen Homomorphismus

$$u_p : \Omega_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Z}_p^\times,$$

der jedem $\omega \in \Omega_{\mathbb{Q}}$ die p-adische Einheit $u_p(\omega)$ zuordnet, so dass $\zeta^{\omega u_p(\omega)} = \zeta$ für jede p^n-te Einheitswurzel in $\mathbb{Q}^c$, $n \geq 0$. Für die Gaußsche Summe gilt nun der folgende

Satz 2.2.17 *(i) Ist F ein nicht-archimedischer lokaler Körper, $\chi \in R_t(F)$ und $\omega \in \Omega_{\mathbb{Q}}$, so gilt*

$$\tau(\chi^{\omega^{-1}})^{\omega} = \tau(\chi)\theta_{\det_\chi}(u_p(\omega)).$$

(ii) Ist K ein globaler Körper $\chi \in R_t(K)$ und $\omega \in \Omega_{\mathbb{Q}}$, so gilt

$$\tau(\chi^{\omega^{-1}})^{\omega} = \tau(\chi)(v_{K/\mathbb{Q}} \det_\chi)(\omega).$$

Beweisskizze. Wir verwenden einige Resultate der Klassenkörpertheorie, wie sie z.B. in [8] gefunden werden können.

(i) Sei χ zunächst ein abelscher Charakter. Ist χ unverzweigt, so auch θ_χ, da unter der Artin-Abbildung genau die Einheiten auf die Trägheitsgruppe gehen. Unter Benutzung von $\theta_\chi(u_p(\omega)) = 1$ rechnen wir:

$$\tau(\chi)\theta_{\det_\chi}(u_p(\omega)) = \theta_\chi(\mathfrak{D}_F)^{-1} = (\theta_{\chi^{\omega^{-1}}}(\mathfrak{D}_F)^{-1})^\omega = \tau(\chi^{\omega^{-1}})^\omega.$$

Ist χ verzweigt, so ist für $x \in F$ und $\omega \in \Omega_\mathbb{Q}$

$$\psi_F(u_p(\omega)^{-1}x) = (e^{2\pi i m/p^r})^{u_p(\omega)^{-1}} = (e^{2\pi i m/p^r})^\omega = \psi_F(x)^\omega,$$

wobei $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}_p}(x) \equiv m/p^r \bmod \mathbb{Z}_p$. Damit erhält man die Behauptung direkt aus der Definition von τ. Sind jetzt noch beide Seiten induktiv für Charaktere von Grad 0, so folgt die Gleichheit wieder wie in Folgerung 2.2.15. Für die Gaußschen Summen wissen wir das schon und die Gleichung

$$\mathrm{res}\,_F^L\theta_\chi = \theta_{v_{L/F}\chi} \tag{2.9}$$

der lokalen Klassenkörpertheorie liefert die Induktivität von $\theta_{\det_\chi}(u_p(\omega))$.

(ii) Die Homomorphismen u_p geben Anlass zu einem Homomorphismus

$$u = \prod_{p\nmid\infty} u_p : \Omega_\mathbb{Q} \to \prod_{p\nmid\infty} \mathbb{Z}_p^\times,$$

so dass die Komposition mit der Artin-Abbildung die kanonische Surjektion $\Omega_\mathbb{Q} \to \Omega_\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ ergibt. Mit Folgerung 2.2.15 kann man nun (ii) auf (i) zurückführen, wobei das globale Analogon von 2.9 einfließt. □

Als letztes haben wir noch die Galoisinvarianz der Wurzelzahlen für symplektische Charaktere zu verifizieren. Wie bezeichnen dazu mit $R_t^s(K)$ das Erzeugnis aller symplektischen Charaktere in $R_t(K)$. Ist nun $\chi \in R_t^s(K)$, so schreiben wir $W(\chi) = W(N/K, \chi)$, wenn χ bereits ein Charakter von $G = \mathrm{Gal}(N/K)$ ist, und entsprechend mit W'. Wir zeigen nun also das

Lemma 2.2.18 *$W'(\chi^{\omega^{-1}})^\omega = W'(\chi)$ für $\omega \in \Omega_\mathbb{Q}$ und $\chi \in R_t^s(K)$.*

Beweisskizze. Wegen Folgerung 2.2.15 können wir K als lokalen Körper annehmen. An den unendlichen Stellen ist der einzige nicht-triviale Fall $K = \mathbb{R}$ und $G =< \sigma >$ zyklisch von der Ordnung 2. Dann gibt es zwei irreduzible Charaktere, nämlich 1_G und χ_0 mit $\chi_0(\sigma) = -1$. Diese sind beide über $\mathbb{R}$ realisierbar und damit alle symplektischen Charaktere von der Form $\chi = 2\psi$ für einen Charakter ψ mit Werten in $\mathbb{Z}$. Die Behauptung folgt nun direkt aus der Definition 2.6 der Wurzelzahlen an unendlichen Stellen.

Sei nun also K ein nicht-archimedischer lokaler Körper mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}$. Wir können wieder annehmen, dass χ ein echter symplektischer Charakter ist. Für solche Charaktere ist der lokale Artin-Führer $\mathfrak{f}(\chi) = \mathfrak{f}_\mathfrak{p}(\chi)$ (vgl. 2.4) ein Quadrat. Der Grund hierfür besteht im Wesentlichen in der Tatsache, dass χ

reell-wertig und $\det_\chi$ der triviale Charakter ist. Für einen virtuellen Charakter gilt dann immer noch $N(\mathfrak{f}(\chi))^{1/2} \in \mathbb{Q}^\times$, also für $\omega \in \Omega_\mathbb{Q}$

$$(N(\mathfrak{f}(\chi^{\omega^{-1}}))^{1/2})^\omega = N(\mathfrak{f}(\chi))^{1/2} \tag{2.10}$$

Da $\det_\chi$ trivial ist, folgt nach Satz 2.2.17 auch

$$\tau(\chi^{\omega^{-1}})^\omega = \tau(\chi) \tag{2.11}$$

und da $W(\chi) = \tau(\overline{\chi})/N(\mathfrak{f}(\chi))^{1/2}$ und $\chi = \overline{\chi}$ folgt die Behauptung aus 2.10 und 2.11. □

Satz 2.2.10 folgt nun aus 2.2.16, 2.2.17 und 2.2.18.

2.2.3 Die Vorteile von u

Bislang haben wir nur ein neues Element $u \in \mathrm{Hom}_{\Omega_\mathbb{Q}}(R(G), \mathcal{J}(\mathbb{Q}^c))$ gefunden, das $U_{N/K}$ repräsentiert. Die Vorteile von u werden deutlich an dem tief liegenden

Satz 2.2.19 $u \in \mathrm{Hom}^+_{\Omega_\mathbb{Q}}(R(G), \mathcal{U}(\mathbb{Q}^c))$

Dieser Satz hat wegen 1.7 als direkte Folgerung den

Satz 2.2.20 $U_{N/K} \in D(\mathbb{Z}G)$.

Folgerung 2.2.21 *Das Element* $v \in \mathrm{Hom}^+_{\Omega_\mathbb{Q}}(R(G), \mathcal{U}(\mathbb{Q}^c))$ *mit lokalen Komponenten*

$$v(\chi)_p = \begin{cases} \mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}}(a_p|\chi)\tau(N/K,\chi)_p^{-1}W'(N/K,\chi)_p & \text{, falls } p \mid |G| \\ 1 & \text{, sonst} \end{cases}$$

wobei $a_p \in N_p$ *Elemente mit* $\mathfrak{O}_p = a_p(\mathfrak{o}_p G)$ *sind, ist ebenfalls ein darstellender Homomorphismus für* $U_{N/K}$.

Beweis. Für $p \mid |G|$ und $\mathfrak{p} \mid p$ sind die Komponenten $a_{p,\mathfrak{p}}$ von a_p freie Erzeuger von $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ über $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}G$. Andererseits sind für $p \nmid |G|$ die Gruppenringe $\mathbb{Z}_pG$ Maximalordnungen oder $\mathbb{R}G$, so dass nach 1.11 bzw. 1.12 $u_p \in \mathrm{Det}\,(\mathbb{Z}_pG^\times)$ bzw. $u_p \in \mathrm{Det}\,(\mathbb{R}G^\times)$, und wir können u durch $v = u\prod_{p\nmid|G|} u_p^{-1}$ ersetzen. □

Um ein Gefühl für Satz 2.2.19 zu geben, wollen wir zunächst kurz skizzieren, weshalb $u(\chi)_\mathfrak{p} > 0$ für alle, also auch komplexe, unendliche Primstellen $\mathfrak{p}$ und symplektische Charaktere χ gilt. Wir wählen dazu einen hinreichend großen Körper E, so dass $N \subset E$, $E/\mathbb{Q}$ galoissch mit Gruppe Γ und jede Darstellung eines Charakters von G bereits über E realisiert werden kann. Dann liegt u also in $\mathrm{Hom}_\Gamma(R(G), \mathcal{J}(E))$. Wir fixieren eine unendliche Primstelle $\mathfrak{p}$ von K und eine - nicht notwendig über $\mathfrak{p}$ liegende - unendliche Primstelle $\wp$ von E.

Für ein Idel $\alpha \in \mathcal{J}(E)$ bezeichne $\operatorname{sign}_{\wp}(\alpha)$ das Signum des Eintrags $\alpha_{\wp}$ von α, sofern dieser reell ist.

Wir wählen nun einen freien Erzeugenden $a_{\mathfrak{p}}$ von $N_{\mathfrak{p}}$ über $K_{\mathfrak{p}}G$ und denken uns das Element $(a_{\mathfrak{p}}|\chi)$ über einen Isomorphismus $(E \otimes_K K_{\mathfrak{p}})^{\times} \simeq \prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} E_{\mathfrak{P}}^{\times}$ in $\mathcal{J}(E)$ eingebettet. Wir machen Gebrauch von dem folgenden

Satz 2.2.22 *Sei $\chi \in R^s(G)$. Dann gilt mit den obigen Bezeichnungen: $(\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}}((a_{\mathfrak{p}}|\chi)))_{\wp} \in \mathbb{R}$ und*

$$\operatorname{sign}_{\wp}(\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}}((a_{\mathfrak{p}}|\chi))) = W(\chi_{\mathfrak{p}}).$$

Insbesondere ist die linke Seite damit unabhängig von der Wahl von $a_{\mathfrak{p}}$ und $\wp$.

Zum Beweis verweisen wir auf Theorem 22 in [5].
Betrachten wir nun wieder die Faktoren von $u(\chi)$ einzeln, so erhalten wir für symplektische Charaktere und eine beliebige unendliche Primstelle $\wp$ von E einerseits

$$\operatorname{sign}_{\wp}(\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}}(a|\chi)) = \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \operatorname{sign}_{\wp}(\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}}(a_{\mathfrak{p}}|\chi)) = \prod_{\mathfrak{p}|\infty} W(\chi_{\mathfrak{p}}) = W_{\infty}(\chi). \quad (2.12)$$

Andererseits erhalten wir aus der Gleichung

$$\tau(\chi) = W(\chi)W_{\infty}(\chi)N\mathfrak{f}(\chi)^{1/2}$$

wegen $W(\chi)W_{\infty}(\chi) = \pm 1$ und $N\mathfrak{f}(\chi)^{1/2} > 0$

$$\operatorname{sign}_{\wp}(\tau(\chi)) = W(\chi)W_{\infty}(\chi) \quad (2.13)$$

Aus 2.12 und 2.13 folgt nun $u(\chi)_{\mathfrak{p}} > 0$ direkt aus der Definition (vgl. 2.2.8). □

Die meiste Arbeit für das obige Resultat 2.2.19 muss man in die Tatsache stecken, dass $u(\chi)$ wirklich in den Einheitenidelen $\mathcal{U}(\mathbb{Q}^c)$ landet. Wir wollen das Problem auf lokale Resultate und diese wiederum auf rein verzweigte Erweiterungen reduzieren, so dass wir uns vorerst mit dem Verhalten von Charakteren unter der Restriktion beschäftigen.

Dazu sei F ein nicht-archimedischer lokaler Körper über $\mathbb{Q}_p$, L eine galoissche zahme Erweiterung von F mit Gruppe G und H eine Untergruppe von G mit Fixkörper M. Der besseren Übersicht wegen schreiben wir für die Ganzheitsringe $\mathfrak{o}_L$, $\mathfrak{o}_M$ bzw. $\mathfrak{o}_F$. Für die virtuellen Charaktere mit Werten in $\mathbb{Q}_p^c$ schreiben wir $R_p(G)$ bzw. $R_{t,p}(F)$. Für einen virtuellen Charakter χ von G sei stets $\operatorname{res}\chi = \operatorname{res}_H^G \chi$. Wir beginnen mit dem

Satz 2.2.23 *(i)*

$$\mathfrak{f}(\operatorname{res}\chi) = \mathfrak{f}(\chi)$$

und

$$\tau(\operatorname{res}\chi) = \tau(\chi)^{[M:F]}\zeta(\chi)$$

mit einer Einheitswurzel $\zeta(\chi)$.

(ii) Sei a bzw. b ein freier Erzeugender von $\mathfrak{o}_L$ über $\mathfrak{o}_F G$ bzw. $\mathfrak{o}_M H$. Dann existiert ein $\lambda \in (\mathfrak{o}_M G)^\times$, so dass für alle $\chi \in R_p(G)$ gilt:

$$(b|\operatorname{res}\chi)_{L/M} = (a|\chi)_{L/F}\operatorname{Det}_\chi(\lambda).$$

Die Behauptung für die lokalen Artin-Führer ist offensichtlich und das Analogon zu Satz 2.2.3 (ii). Für die Gaußschen Summen verwendet man die Gleichung

$$\operatorname{ind}(\operatorname{res}\chi) = (\operatorname{ind} 1_H)\chi,$$

die Induktions-Formel 2.2.14 sowie die bekannte Tatsache, dass für virtuelle Charaktere χ und abelsche unverzweigte Charaktere α von Ω_F gilt:

$$\tau(\alpha\chi) = \tau(\chi)\zeta(\chi,\alpha)$$

mit einer Einheitswurzel $\zeta(\chi,\alpha)$. Für Details und den sehr technischen zweiten Teil des Satzes vergleiche Theorem 25 bei [5]. □

Folgerung 2.2.24 *Mit den obigen Bezeichnungen gilt:*

$$\mathcal{N}_{M/\mathbb{Q}_p}(b|\operatorname{res}\chi)_{L/M} = \mathcal{N}_{F/\mathbb{Q}_p}(a|\chi)_{L/F}^{[M:F]} v(\chi)$$

mit einer Einheit $v(\chi)$.

Beweis. Bezeichnen wir mit $\equiv$ Kongruenzen modulo Einheiten, so folgt die Behauptung mit der folgenden Rechnung aus 2.2.23 (ii) und Proposition 2.1.3 (iii). Seien dazu $\{\sigma\}$ bzw. $\{\gamma\}$ Rechtsrepräsentantensysteme von Ω_F in $\Omega_{\mathbb{Q}_p}$ bzw. von Ω_M in Ω_F. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{M/\mathbb{Q}_p}(b|\operatorname{res}\chi)_{L/M} &= \prod_{\gamma,\sigma}(b|\operatorname{res}\chi^{\sigma^{-1}\gamma^{-1}})^{\gamma\sigma} \\
&\equiv \prod_{\gamma,\sigma}(a|\chi^{\sigma^{-1}\gamma^{-1}})^{\gamma\sigma} \\
&\equiv \prod_{\sigma}(a|\chi^{\sigma^{-1}})^{\sigma[M:F]} \\
&= \mathcal{N}_{F/\mathbb{Q}_p}(a|\chi)_{L/F}^{[M:F]}
\end{aligned}$$

□

Wir wollen die Aussagen von Satz 2.2.23 noch in ein anderes Licht rücken. Für zwei freie Erzeuger a_1 und a_2 von $\mathfrak{o}_L$ über $\mathfrak{o}_F G$ unterscheiden sich die Resolventen $(a_1|\chi)$ und $(a_2|\chi)$ nach Proposition 2.1.3 nur um eine Einheit, so dass die Resolvente $(a_1|\chi)$ unabhängig vom gewählten Erzeuger ein gebrochenes Ideal[4] definiert. Wir erhalten also für jede Erweiterung L/F Homomorphismen

$$P(L/F,\cdot) : R(Gal(L/F)) \to \mathcal{I}(\mathbb{Q}_p^c). \tag{2.14}$$

[4] Für einen Körper K bezeichnen wir die Gruppe der gebrochenen Ideale von K mit $\mathcal{I}(K)$.

Außerdem setzen wir

$$\mathcal{N}_{F/\mathbb{Q}_p} P(L/F, \chi) = \prod_\sigma P(L/F, \chi^{\sigma^{-1}})^\sigma, \tag{2.15}$$

wobei $\{\sigma\}$ ein Rechtsrepräsentantensystem von Ω_F in $\Omega_{\mathbb{Q}_p}$ durchläuft. Dieses gebrochene Ideal wird erzeugt von $\mathcal{N}_{F/\mathbb{Q}_p}(a_1|\chi)$ mit einem beliebigen freien Erzeuger a_1.

Die Familien $P(L/F, \cdot)$ und $\mathcal{N}_{F/\mathbb{Q}_p} P(L/F, \cdot)$ sind inflations-invariant für zahme Erweiterungen und zahme Charaktere. Wir schreiben ab sofort verkürzend nur $P(\chi)$ und $\mathcal{N}_{F/\mathbb{Q}_p} P(\chi)$.

Der Vollständigkeit halber geben wir an dieser Stelle auch gleich die entsprechende Konstruktion im Globalen an. Ist also N/K eine zahme Erweiterung globaler Körper mit Gruppe G, $\chi \in R(G)$, dann definiert die Resolvente $(a_\mathfrak{p}|\chi)$ eines freien Erzeugers $a_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{o}_{N,\mathfrak{p}}$ über $\mathfrak{o}_{K,\mathfrak{p}} G$ ein gebrochenes Ideal $P_\mathfrak{p}(N/K, \chi) \in \mathcal{I}(\mathbb{Q}^c)$, unabhängig von der Wahl von $a_\mathfrak{p}$. Wegen Proposition 2.1.1 (ii) sind diese fast alle 1 und wir können

$$P(N/K, \chi) = \prod_{\mathfrak{p} \nmid \infty} P_\mathfrak{p}(N/K, \chi) \tag{2.16}$$

setzen. Des Weiteren sei

$$\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}} P(N/K, \chi) = \prod_\sigma P(N/K, \chi^{\sigma^{-1}})^\sigma \tag{2.17}$$

und

$$\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}} P_\mathfrak{p}(N/K, \chi) = \prod_\sigma P_\mathfrak{p}(N/K, \chi^{\sigma^{-1}})^\sigma, \tag{2.18}$$

wobei $\{\sigma\}$ ein Rechtsrepräsentantensystem von Ω_K in $\Omega_\mathbb{Q}$ durchläuft. Auch diese beiden Familien sind wieder inflations-invariant für zahme Erweiterungen und zahme Charaktere. Mit diesen Bezeichnungen - zurück im Lokalen - ergeben sich aus Satz 2.2.23

Folgerung 2.2.25 *(i) Für $\chi \in R(G)$ haben wir die Idealgleichung*

$$(\tau(\operatorname{res} \chi)) = (\tau(\chi))^{[M:F]}.$$

(ii) Für $\chi \in R_p(G)$ gilt

$$P(\operatorname{res} \chi) = P(\chi),$$
$$\mathcal{N}_{M/\mathbb{Q}_p} P(\operatorname{res} \chi) = \mathcal{N}_{F/\mathbb{Q}_p} P(\chi)^{[M:F]}.$$

Folgerung 2.2.26 *I sei die Trägheitsgruppe von G.*

(i) Sind χ, $\chi' \in R(G)$ mit $\operatorname{res}^G_I \chi = \operatorname{res}^G_I \chi'$, dann gilt

$$\mathfrak{f}(\chi) = \mathfrak{f}(\chi'),$$

$$(\tau(\chi)) = (\tau(\chi')).$$

(ii) Sind $\chi, \chi' \in R_p(G)$ *mit* $\operatorname{res}_I^G \chi = \operatorname{res}_I^G \chi'$, *dann gilt*

$$P(\chi) = P(\chi'),$$
$$\mathcal{N}_{F/\mathbb{Q}_p} P(\chi) = \mathcal{N}_{F/\mathbb{Q}_p} P(\chi').$$

Wir kommen nun zu dem entscheidenden Satz in unserem Beweis:
Sei $\chi \in R_t(F)$, F nach wie vor ein nicht-archimedischer lokaler Körper über $\mathbb{Q}_p$, und $j : \mathbb{Q}^c \to \mathbb{Q}_p^c$ eine Einbettung, dann ist einerseits χ^j ein Charakter mit Werten in $\mathbb{Q}_p^c$ und wir können das Ideal $\mathcal{N}_{F/\mathbb{Q}_p} P(\chi^j)$ bilden. Andererseits existiert die lokale Gaußsche Summe $\tau(\chi) \in (\mathbb{Q}^c)^\times$, die wir via j in $\mathbb{Q}_p^c$ lesen können. Dann gilt:

Satz 2.2.27 $\mathcal{N}_{F/\mathbb{Q}_p} P(\chi^j) = (\tau(\chi)^j)$.

Beweisskizze. Nach den Folgerungen aus Satz 2.2.23 können wir annehmen, dass χ der Charakter einer Galoisgruppe G ist, die zu einer zahmen, total verzweigten Erweiterung L/F gehört. G ist zyklisch mit zu p teilerfremder Ordnung, so dass wir χ als abelschen Charakter annehmen dürfen.

Wir führen nun eine Variante der lokalen Gaußschen Summe ein. Sei $\zeta = \zeta_p$ eine primitive p-te Einheitswurzel in $\mathbb{Q}_p^c$. Für eine Zahl $z \in \mathbb{F}_p$, sei $\zeta^z = \zeta^y$, wenn $y \in \mathbb{Z}_p$ irgendeine Hochhebung von z ist. Wir definieren dann einen nicht-trivialen Homomorphismus

$$\psi_* : \mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F \to (\mathbb{Q}_p^c)^\times$$

durch $\psi_*(x) = \zeta^{\operatorname{Tr}(x)}$, wobei Tr die Spur von $\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F$ nach $\mathbb{F}_p$ bezeichne. Für jeden Homomorphismus $\eta : (\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F)^\times \to (\mathbb{Q}_p^c)^\times$ setzen wir

$$G(\eta) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \eta = 1 \\ \sum_{x \in (\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F)^\times} \eta(x)\psi_*(x) & \text{falls } \eta \neq 1 \end{cases} \tag{2.19}$$

Wählen wir für η die Einschränkung von θ_χ^j auf $\mathfrak{o}_F^\times$, so gilt [5]

$$(\tau(\chi)^j) = (G(\eta)). \tag{2.20}$$

Zum Beweis von 2.20 unterscheiden wir zwei Fälle. Ist χ unverzweigt, so ist $\tau(\chi)^j = \tau(\theta_\chi)^j$ eine Einheitswurzel und $\eta = 1$ und wir erhalten 2.20 in diesem Fall. Ist χ hingegen verzweigt, also $\mathfrak{f}(\chi) = \mathfrak{p}_F$ und $\eta \neq 1$, so definiert die Abbildung

$$\psi' : \mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F \to (\mathbb{Q}_p^c)^\times,\ x \mapsto \psi_F(c^{-1}x)^j$$

mit $c \in F^\times$, $(c) = \mathfrak{p}_F \mathfrak{D}_F$ und ψ_F wie in 2.2.12 einen nicht-trivialen Homomorphismus. Also existiert ein $a \in (\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F)^\times$ mit $\psi'(x) = \psi_*(ax)$. Wir erhalten

$$\tau(\chi)^j = \sum_{x \in (\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F)^\times} \eta(x)\psi_*(ax)\theta_\chi^j(c^{-1}) = G(\eta)\eta(a^{-1})\theta_\chi^j(c^{-1})$$

[5] Dies macht Sinn, da $1 + \mathfrak{p}_F \subset \ker(\eta)$ und η somit einen Homomorphismus auf $(\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F)^\times$ induziert.

und damit wieder 2.20.

Um den Beweis abzuschließen, sind wir noch an der Gleichung

$$\mathcal{N}_{F/\mathbb{Q}_p} P(\chi^j) = (G(\eta))$$

interessiert. Für den Beweis machen wir zunächst die folgende Beobachtung:

Sei $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ eine Funktion der Periode $q-1$, $q = p^f$ eine p-Potenz. Dann gibt es genau eine solche Funktion g, die den folgenden Bedingungen genügt:

(i) $g(0) = 0$

(ii) $g(1) = 1$

(iii) $g(h + h') \leq g(h) + g(h')$ für alle $0 \leq h, h' < q - 1$

(iv) $g(p^i h) = g(h)$ für alle $0 \leq h < q - 1$

(v) $g(h) + g(-h) = (p - 1)f$ für alle $0 < h < q - 1$

Eine (und damit die einzige) Funktion, die diesen Bedingungen genügt, ist

$$t(h) = \sum_{j=0}^{f-1} h_j, \text{ falls } h = \sum_{j=0}^{f-1} h_j p^j,\ 0 \leq h_j < p.$$

Es gilt $t(h) = (p - 1)r(h)$ mit

$$r(h) = \sum_{j=0}^{f-1} \left\{ \frac{p^j h}{q - 1} \right\},$$

wobei für $a \in \mathbb{Q}$ der Wert $\{a\} \in \mathbb{Q}$ festgelegt wird durch $\{a\} \equiv a \bmod \mathbb{Z}$ und $0 \leq \{a\} < 1$.

Wir wollen uns nun überlegen, dass man einerseits $\mathcal{N}_{F/\mathbb{Q}_p} P(\chi^j) = (p)^{r_1(h)}$ und andererseits $(G(\eta)) = (p)^{r_2(h)}$ mit einem $h = h(\eta)$ schreiben kann, so dass sowohl $(p - 1)r_1(h)$ also auch $(p - 1)r_2(h)$ den obigen Bedingungen genügt. Wir wählen dabei $q = N(\mathfrak{p}_F) = p^f$.

Da η die Einschränkung von θ_χ^j auf $\mathfrak{o}_F^\times$ ist, induziert η wegen $1 + \mathfrak{p}_F \subset \ker \eta$ einen Homomorphismus

$$\eta : (\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F)^\times \to \mu_F,$$

wobei μ_F die Gruppe der $(N\mathfrak{p}_F - 1)$-ten Einheitswurzeln bezeichnet, welche in F liegen. Schalten wir hinter diesen noch die kanonische Abbildung $\mathfrak{o}_F \to \mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F$, so erhalten wir einen Endomorphismus der Gruppe $(\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F)^\times$. Es existiert daher ein eindeutiges $s = s(\eta) = s(\chi) \in \mathbb{Q}^\times$ mit $0 \leq s < 1$ und

$$\eta(x) \equiv x^{-s(N\mathfrak{p}_F - 1)} (\bmod \mathfrak{p}_F) \tag{2.21}$$

für alle $x \in \mathfrak{o}_F^\times$. Mit diesem s gilt dann $P(\chi^j) = \mathfrak{p}_F^s$ wegen

Satz 2.2.28 *Ist $\psi \in R_{t,p}(F)$ und η die Restriktion von θ_ψ auf $\mathfrak{o}_F^\times$, dann gilt mit $s = s(\eta)$ wie in 2.21:*

$$P(\psi) = \mathfrak{p}_F^s$$

Wir wählen dann $h = h(\eta) = s(\eta)(q-1)$.

Beweisskizze. Sei $m = \operatorname{ord}(\psi)$. Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, dass F die m-ten Einheitswurzeln enthält. Wir schreiben $P(\psi) = \mathfrak{p}_F^t$ und zeigen, dass t die obigen Eigenschaften erfüllt. Es gilt:

Lemma 2.2.29 *Enthält F die m-ten Einheitswurzeln, $m = \operatorname{ord}(\psi)$, dann ist das Ideal $P(\psi)$ erzeugt von $U_\psi \cap \mathbb{Z}_p^c$, wobei*

$$U_\psi = \{x \in \mathbb{Q}_p^c | x^\omega = x\psi(\omega)\, \forall \omega \in \Omega_F\}.$$

Stellen wir den Beweis des Lemmas zunächst zurück und wählen einen Erzeuger x von $P(\psi)$ und ein $\pi \in F^\times$ mit $(\pi) = \mathfrak{p}_F$. Schreiben wir $x^m = \pi^r w$ mit einem $r \in \mathbb{Z}$ und einem $w \in \mathfrak{o}_F^\times$, dann gilt $t = r/m$. Bezeichnet nun $A : F^\times \to \Omega_F^{\text{ab}}$ die Artin-Abbildung und $(\ ,\ ) : F^\times/(F^\times)^m \times F^\times/(F^\times)^m \to \mu_m$ das Hilbert-Symbol, so gilt für $u \in \mathfrak{o}_F^\times$, $y = \sqrt[m]{u}$:

$$\begin{aligned} \eta(u) &= \theta_\psi(u) = x\psi(A(u))x^{-1} = x^{A(u)}x^{-1} = (\pi^r w, u) \\ &= (\pi, u)^r (w, u) = (\pi, u)^r = (u, \pi)^{-r} \\ &= (y^{A(\pi)-1})^{-r} \equiv y^{-r(N\mathfrak{p}_F - 1)} (\bmod \mathfrak{p}_F) \\ &\equiv u^{-t(N\mathfrak{p}_F - 1)} (\bmod \mathfrak{p}_F) \end{aligned}$$

Also folgt $t = s$. □

Für den Beweis des Lemmas wählen wir ein $0 \neq x \in U_\psi$ und setzen $E = F(x)$. Dann ist $U_\psi \subset E$ und E/F eine zahme Erweiterung mit zyklischer Galoisgruppe H. Ein Erzeuger ist gegeben durch ein $\omega \in \Omega_F$, so dass $\psi(\omega)$ die Ordnung m hat. Sei $\mathfrak{a}_\psi$ das Ideal, das von $U_\psi \cap \mathbb{Z}_p^c = U_\psi \cap \mathfrak{o}_E$ erzeugt wird und a ein freier Erzeuger von $\mathfrak{o}_E$ über $\mathfrak{o}_F H$. Man überprüft $(a|\psi) \in \mathfrak{a}_\psi$, also $P(\psi) \subset \mathfrak{a}_\psi$.

Für die umgekehrte Inklusion sei Y_ψ das Urbild von $\mathfrak{a}_\psi$ unter dem Isomorphismus $\mathfrak{o}_F H \simeq \mathfrak{o}_E, \lambda \mapsto a^\lambda$, also das Ideal von $\mathfrak{o}_F H$, das von allen y mit $yh = y\psi(h)$ für alle $h \in H$ erzeugt wird. Y_ψ wird über $\mathfrak{o}_F$ erzeugt von $\sum_{h\in H} \psi(h)h^{-1}$, also hat jedes Element von $\mathfrak{a}_\psi$ die Form $c(a|\psi)$ für ein $c \in \mathfrak{o}_F$, also gilt auch $\mathfrak{a}_\psi \subset P(\psi)$. □

Wie angekündigt zeigen wir nun $\mathcal{N}_{F/\mathbb{Q}_p} P(\chi^j) = (p)^{r(h)}$. Sei $\psi = \chi^j$, M der maximal unverzweigte Teilkörper von F und $\{\sigma\}$ ein Rechtsrepräsentantensystem von Ω_F in Ω_M. Wir ergänzen dieses zu einem Rechtsrepräsentantensystem in $\Omega_{\mathbb{Q}_p}$ durch $\{\sigma\omega^{-i}\}$, $i = 0, \ldots, f-1$, wobei ω auf M wie der Frobenius-Automorphimus über $\mathbb{Q}_p$ wirkt. Wegen $\eta^{\omega^i\sigma^{-1}} = \eta^{p^i}$ unterscheiden sich ψ^{p^i} und $\psi^{\omega^i\sigma^{-1}}$ um einen unverzweigten Charakter und es folgt

$$P(\psi^{\omega^i\sigma^{-1}}) = P(\psi^{p^i}) = \mathfrak{p}_F^{\{p^i h/q-1\}}$$

nach Satz 2.2.28. Mit $e = [F : M]$ gilt weiter

$$\prod_{\sigma} P(\psi^{\omega^i \sigma^{-1}})^{\sigma\omega^{-i}} = \mathfrak{p}_F^{\{p^i h/q-1\}e}$$

und wegen $\mathfrak{p}_F^e = (p)$ folgt schließlich

$$\mathcal{N}_{F/\mathbb{Q}_p} P(\chi^j) = \mathcal{N}_{F/\mathbb{Q}_p} P(\psi) = \prod_{i,\sigma} P(\psi^{\omega^i \sigma^{-1}})^{\sigma\omega^{-i}} = (p)^{r(h)}.$$

Das entsprechende Resultat für das Ideal $(G(\eta))$ findet sich z.B. in [5] Th. 27 Teil D oder auch in [17] Ch. 6.2. □

Schließlich machen wir noch Gebrauch von dem

Satz 2.2.30 *Ist N/K eine galoissche zahme Erweiterung globaler Körper mit Gruppe G, $\chi \in R(G)$ und $\mathfrak{p}$ eine endliche Primstelle von K über der rationalen Primzahl p, dann gilt mit den Definitionen 2.14 bis 2.18:*

$$(\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}} P_{\mathfrak{p}}(N/K, \chi))_{\wp} = \begin{cases} 1 & \textit{falls } p \nmid \wp \\ \wp^m & \textit{falls } p \mid \wp \textit{ und } \mathcal{N}_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_p} P(N_{\mathfrak{q}}/K_{\mathfrak{p}}, \chi_{\mathfrak{p}}^j) = \mathfrak{P}^m. \end{cases}$$

Dabei ist $\mathfrak{q}$ eine Primstelle von N über $\mathfrak{p}$ und $\wp$ eine Primstelle von E, wobei E wieder hinreichend groß gewählt wird, so dass alle Darstellungen über E realisiert werden können und zusätzlich $N \subset E$ und $E/\mathbb{Q}$ galoissch. Die Einbettung j ist so gewählt, dass $j : E \rightarrowtail E_{\mathfrak{P}}$ für ein $\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{q}$ auch $N \rightarrowtail N_{\mathfrak{q}}$ und $K \rightarrowtail K_{\mathfrak{p}}$ induziert.

Vergleiche dazu das Korollar zu Theorem 19 in [5]

Mit dem Satz 2.2.27 steht uns nun das wichtigste Hilfsmittel zur Verfügung, um unsere Beweisskizze von Satz 2.2.19 zu vervollständigen. Wir verwenden die Bezeichnungen aus obigem Satz 2.2.30. Nach Lemma 2.2.16 und Satz 2.2.17 liegt die Resolvente $(a|\chi)$ in $\mathcal{J}(E)$ und die Gaußsche Summe $\tau(\chi)$ in E. Wir haben uns also zu überlegen, dass für jede endliche Primstelle $\wp$ von E

$$(\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}} P(\chi))_{\wp} = (\tau(\chi))_{\wp}. \tag{2.22}$$

Nach der Definition von $\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}} P$ und Folgerung 2.2.15 lokalisiert sich das Problem zu der Gleichheit

$$(\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}} P_{\mathfrak{p}}(\chi))_{\wp} = (\tau(\chi_{\mathfrak{p}}))_{\wp} \tag{2.23}$$

für alle endlichen Primstellen $\mathfrak{p}$ von K und $\wp$ von E.
Die linke Seite kennen wir nach Satz 2.2.30. Ist also p die rationale Primzahl unter $\mathfrak{p}$, so haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

(i) $p \nmid \wp$
Wir müssen zeigen, dass $(\tau(\chi_{\mathfrak{p}}))_\wp = 1$. Sei dazu χ zunächst abelsch, also $\tau(\chi_{\mathfrak{p}}) = \tau(\theta)$ mit $\theta = \theta_{\chi_{\mathfrak{p}}}$. Dann folgt die Behauptung aus der Gleichung $\tau(\theta)\overline{\tau(\theta)} = N\mathfrak{f}(\theta)$, da $N\mathfrak{f}(\theta)$ eine p-Potenz ist. Der allgemeine Fall folgt dann aus dem Satz von Brauer und dem additiven und induktiven Verhalten der Gaußschen Summe.

(ii) $p \mid \wp$
Es gibt eine Einbettung $j : E \rightarrowtail E_\wp$ wie in Satz 2.2.30, so dass

$$(\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}} P_{\mathfrak{p}}(\chi))_\wp = \mathcal{N}_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_p} P(N_{\mathfrak{q}}/K_{\mathfrak{p}}, \chi_{\mathfrak{p}}^j).$$

Außerdem ist $(\tau(\chi_{\mathfrak{p}}))_\wp = (\tau(\chi_{\mathfrak{p}})^j)$, so dass die Behauptung nun aus Satz 2.2.27 folgt.

Damit sind wir am Ende unserer Beweisskizze von Satz 2.2.19 angelangt.

2.3 Weitere Resultate über $U_{N/K}$

In diesem Abschnitt wollen wir noch weitere interessante Elemente in der Klassengruppe betrachten, die Aufschluss über $U_{N/K}$ geben können, und repräsentierende Homomorphismen dafür angeben. Wir betrachten wieder eine galoissche Erweiterung N/K globaler Körper mit Gruppe G und deren Ganzheitsringe $\mathfrak{o} \subset K$ bzw. $\mathfrak{O} \subset N$. Außerdem fixieren wir einen Körper E, so dass alle Darstellungen von G über E realisiert werden können und $N \subset E$, sowie $E/\mathbb{Q}$ galoissch.

Definition 2.3.1 *Sei R ein kommutativer Ring und M ein RG-Modul. Dann heißt der RG-Modul*

$$\check{M} = \mathrm{Hom}_R(M, R) \simeq \mathrm{Hom}_{RG}(M, RG)$$

das Dual *von M.*

Gehört der Charakter $\chi \in R(G)$ zu einem EG-Modul M, so gehört der konjugierte Charakter $\overline{\chi} = \chi^{-1}$ zu dem Dual $\check{M}$.
Ist M ein lokal freier $\mathfrak{o}G$-Modul und wird von einem Homomorphismus f in $\mathrm{Cl}\,(\mathfrak{o}G)$ repräsentiert, so ist $\check{M}$ ebenfalls lokal frei mit repräsentierendem Element $\overline{f}^{\,-1}$, wobei $\overline{f}(\chi) = f(\overline{\chi})$.

Für globales N/K bezeichne $(a|\chi) \in \mathcal{J}(E) \subset \mathcal{J}(\mathbb{Q}^c)$ wieder das Element wie in 2.1. Dann haben wir den

Satz 2.3.2 *Sei N/K zahm. Dann ist die Abbildung*

$$\chi \mapsto (a|\chi)(a|\overline{\chi}) \in \mathrm{Hom}_{\Omega_K}(R(G), \mathcal{J}(\mathbb{Q}^c))$$

ein repräsentierendes Element für die Klasse $((\mathfrak{O})(\check{\mathfrak{O}})^{-1})_{\mathfrak{o}G}$ in $\mathrm{Cl}\,(\mathfrak{o}G)$.

Bemerkung: Da jeder Homomorphismus $f \in \mathrm{Hom}_K(N, K)$ gegeben ist durch $f(x) = \mathrm{Tr}_{N/K}(ax)$ für ein geeignetes $a \in N$, identifizieren wir das Dual $\check{\mathfrak{O}}$ auch mit der inversen Differente

$$\mathfrak{D}^{-1}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}) = \mathfrak{D}^{-1}(N/K) = \{a \in N : \mathrm{Tr}_{N/K}(a\mathfrak{O}) \subset \mathfrak{o}\}.$$

Beweis. Nach Satz 2.1.4 und den obigen Beobachtungen ist ein repräsentierendes Element gegeben durch die Abbildung

$$\chi \mapsto (a|\chi)(a|\overline{\chi})(b|\chi)^{-1}(b|\overline{\chi})^{-1}$$

mit einem freien Erzeuger b von N über KG. Es gilt aber

$$(b|\overline{\chi}) = \mathrm{Det}_{\chi}(\sum_{g \in G} b^g g)$$

und

$$(\sum_g b^g g) \cdot (\sum_g b^g g^{-1}) = \sum_g \mathrm{Tr}_{N/K}(b \cdot b^g) g,$$

so dass

$$\left[\chi \mapsto (b|\chi)(b|\overline{\chi}) = \mathrm{Det}_{\chi}(\sum_g \mathrm{Tr}_{N/K}(b \cdot b^g) g)\right] \in \mathrm{Det}\,(KG^{\times})$$

und wir sind wegen $\mathrm{Det}\,(KG^{\times}) \subset \mathrm{Hom}_{\Omega_K}(R(G), (\mathbb{Q}^c)^{\times})$ fertig. □

Wir kommen nun zu einem der entscheidenden Sätze :

Satz 2.3.3 *Sei F ein nicht-archimedischer lokaler Körper und $\chi \in R_{t,p}(F)$ ein zahmer Charakter. Dann gilt:*

$$P(\chi)P(\overline{\chi}) = \mathfrak{f}(\chi).$$

Beweisskizze. Wir können wie in Satz 2.2.27 nach den Folgerungen aus Satz 2.2.23 annehmen, dass χ ein abelscher Charakter einer Galoisgruppe G ist, die zu einer zahmen, total verzweigten Erweiterung L/F gehört. Für solche kennt man das gebrochene Ideal $P(\chi)$ nach Satz 2.2.28 und wir schreiben $P(\chi) = \mathfrak{p}_F^s$ mit einem $s = s(\eta)$ wie in 2.21. Es gibt nun zwei Fälle:
Entweder ist χ unverzweigt, also $\mathfrak{f}(\chi) = 1$. Dann ist auch θ_χ unverzweigt, also $\eta = 1$ und $s(\eta) = s(\chi) = 0$. Mit χ ist auch $\overline{\chi}$ unverzweigt also auch $s(\overline{\chi}) = 0$ und somit

$$P(\chi)P(\overline{\chi}) = 1.$$

Oder aber χ ist verzweigt, also $\mathfrak{f}(\chi) = \mathfrak{p}_F$, da χ abelsch und zahm ist. Dann ist auch θ_χ verzweigt und $\eta \neq 1$. Man überprüft $s(\overline{\chi}) = 1 - s(\chi)$ und erhält

$$P(\chi)P(\overline{\chi}) = \mathfrak{p}_F.$$

□

Dieses Resultat kann auf die globale Situation hochgehoben werden:

Satz 2.3.4 *Sei N/K eine zahme Erweiterung globaler Körper und $(a|\chi)$ wie in 2.1. Dann gilt die Idealgleichung*

$$((a|\chi)(a|\overline{\chi})) = \mathfrak{f}(N/K, \chi).$$

Die Gleichung kann etwa in $\mathcal{I}(E)$ gelesen werden und wir haben die

Folgerung 2.3.5 *Ist $\mathfrak{f}(N/K, \chi)$ kein Hauptideal, so ist $(\mathfrak{O})_{\mathfrak{o}G} \neq 1$.*

Beweis. Andernfalls wäre auch $(\check{\mathfrak{O}})_{\mathfrak{o}G} = 1$ und $\mathfrak{f}(N/K, \chi)$ nach den Sätzen 2.3.4 und 2.3.2 ein Hauptideal. □

Wir wollen unser Augenmerk wieder auf das Element $U_{N/K}$ richten und dafür ein weit reichendes Resultat angeben.
Wir bezeichnen im Folgenden mit $S(G)$ die Untergruppe von $R(G)$, die von den irreduziblen symplektischen Charakteren erzeugt wird. Wir weisen darauf hin, dass im Allgemeinen nicht jeder symplektische Charakter als Summe irreduzibler symplektischer Charaktere geschrieben werden kann, also $S(G) \neq R^s(G)$ möglich ist. Wir erhalten einen Homomorphismus

$$t : \mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbb{Q}}}(S(G), \pm 1) \to D(\mathbb{Z}G),$$

indem wir für $f \in \mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbb{Q}}}(S(G), \pm 1)$ das Element $t(f)$ auf den irreduziblen Charakteren χ und den Primstellen $\wp$ von E definieren als

$$(t(f)(\chi))_{\wp} = \begin{cases} f(\chi) & \chi \text{ symplektisch und } \wp \text{ endlich} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach 2.2.18 definiert die Abbildung

$$S(G) \to \pm 1, \; \chi \mapsto W(N/K, \chi)$$

ein Element $W_{N/K} \in \mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbb{Q}}}(S(G), \pm 1)$. M. Taylor hat nun in [16] folgende Vermutung von A. Fröhlich bewiesen:

Satz 2.3.6 (Taylor) *Ist N/K zahm, so gilt*

$$t(W_{N/K}) = U_{N/K}.$$

Bemerkung: Diese Aussage findet sich zusammen mit einer Beweisskizze in [13], Satz (3.4.2).

Wir erhalten aus Satz 2.3.6 die folgenden Konsequenzen:

Folgerung 2.3.7 *Hat G keine irreduziblen symplektischen Charaktere, dann ist $U_{N/K} = 1$ und $\mathfrak{O}$ sogar ein freier $\mathbb{Z}G$-Modul.*

BEWEIS. Die zweite Behauptung folgt, da $\mathbb{Q}G$ für solche Gruppen die Eichler-Bedingung [6] erfüllt, und für $\mathbb{Z}G$-Moduln in diesem Fall „stabil isomorph" äquivalent zu „isomorph" ist (vgl. [4], § 51). □

Bemerkung: Dies trifft u.a. auf alle abelschen Gruppen sowie alle Gruppen ungerader Ordnung zu.

Folgerung 2.3.8 $U^2_{N/K} = 1$.

Folgerung 2.3.9 $U_{N/K}\check{U}_{N/K} = 1$, *wobei* $\check{U}_{N/K} = (\check{\mathfrak{H}})_{\mathbb{Z}G}$.

2.4 Die Swan-Untergruppe

Man sieht an den letzten beiden Folgerungen des vorigen Paragraphen auch, dass

Satz 2.4.1 $U_{N/K} = \check{U}_{N/K}$.

Dieser Sachverhalt war bereits vor Satz 2.3.6 bekannt. Der Beweis benützt die Theorie der Swan-Moduln, die einen wichtigen Baustein in der Theorie der Klassengruppen darstellt. Aus diesem Grund wollen wir die nötigen Methoden zusammenstellen und damit einen Beweis für Satz 2.4.1 führen. Wir folgen im Wesentlichen den Ausführungen in [4] Ch. 53.

Definition 2.4.2 *Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n, r eine ganze Zahl relativ prim zu n und $\sigma = \sigma_G = \sum_{g\in G} g \in \mathbb{Z}G$. Dann heißt das zweiseitige Ideal*

$$\langle r, \sigma\rangle = \mathbb{Z}Gr + \mathbb{Z}G\sigma = \mathbb{Z}Gr + \mathbb{Z}\sigma$$

ein Swan-Modul.

Für jeden Primteiler p von n gilt $\langle r, \sigma\rangle_p = \mathbb{Z}_pG$, so dass $\langle r, \sigma\rangle$ ein lokal freier $\mathbb{Z}G$-Modul vom Rang 1 ist (vgl. [3] Prop. (31.2)). Damit bestimmt $\langle r, \sigma\rangle$ eine Klasse $(r, \sigma) \in \mathrm{Cl}\,(\mathbb{Z}G)$. Es gilt sogar der

Satz 2.4.3 *Die Klassen (r, σ) mit $(r, n) = 1$ bilden eine Untergruppe $T(G)$ der Kerngruppe $D(\mathbb{Z}G)$.*

[6] Jede einfache endlich dimensionale K-Algebra A erfüllt die *Eichler-Bedingung*, außer $A_\mathfrak{p}$ ist eine direkte Summe von nicht-kommutativen Schiefkörpern für alle unendlichen Primstellen $\mathfrak{p}$ von K. Ist A halbeinfach mit Wedderburn-Komponenten $A_1, \dots, A_m$, so erfüllt A die Eichler-Bedingung, falls jede Komponente A_i sie erfüllt.

Beweisskizze. Wir betrachten das Faserprodukt

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}G & \xrightarrow{f} & \Gamma = \mathbb{Z}G/\sigma \\ \text{aug} \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \end{array}$$

wobei aug die Augmentation bezeichnet. Jedes solche Faserprodukt gibt Anlass zu einer exakten „ Mayer-Vietoris“ - Sequenz (vgl. [4] Th. (49.39))

$$K_1(\mathbb{Z}) \times K_1(\Gamma) \xrightarrow{h} K_1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} D(\mathbb{Z}G) \twoheadrightarrow D(\Gamma),$$

die sich hier vereinfacht zu

$$\mathbb{Z}^\times \times K_1(\Gamma) \xrightarrow{h} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\partial} D(\mathbb{Z}G) \twoheadrightarrow D(\Gamma).$$

Dabei ist die Abbildung ∂ gegeben durch

$$r \bmod n \mapsto (M), \text{ wobei } M = \{(z,\gamma) \in \mathbb{Z} \oplus \Gamma : z \equiv r\gamma \bmod n\}.$$

Aus dem Faserprodukt erhalten wir $\mathbb{Z}G \simeq \{(z,\gamma) \in \mathbb{Z} \oplus \Gamma : z \equiv \gamma \bmod n\}$. Unter diesem Isomorphismus entspricht das Element $r \in \mathbb{Z}G$ dem Element $(r,r) \in \mathbb{Z} \oplus \Gamma$ und das Element $\sigma \in \mathbb{Z}G$ dem Element $(n,0) \in \mathbb{Z} \oplus \Gamma$.
Die Abbildung $M \to \mathbb{Z}G$, $(z,\gamma) \mapsto (z, r\gamma)$ ist injektiv und hat als Bild in $\mathbb{Z}G$ genau $\langle r, \sigma \rangle$. Wir erhalten also

$$\partial(r \bmod n) = (r, \sigma) \in D(\mathbb{Z}G)$$

und eine exakte Sequenz

$$\mathbb{Z}^\times \times K_1(\Gamma) \xrightarrow{h} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \overset{\partial}{\twoheadrightarrow} T(G). \tag{2.24}$$

□

Aus der Sequenz 2.24 und der Gruppenstruktur von $\mathrm{Cl}(\mathbb{Z}G)$ ziehen wir noch die

Folgerung 2.4.4 *Sind r und s zwei zu n teilerfremde Zahlen, so gilt:*

(i) $\langle r, \sigma \rangle \oplus \langle s, \sigma \rangle \simeq \mathbb{Z}G \oplus \langle rs, \sigma \rangle$.

(ii) $\langle r, \sigma \rangle \simeq \langle s, \sigma \rangle \iff s \equiv \gamma r \bmod n$ *für ein* $\gamma \in \Gamma^\times$.

Zu (ii) vgl. [4] Th. (42.11). Wir wollen einige einfache, aber wichtige Eigenschaften der Swan-Untergruppe $T(G)$ zusammenfassen. Wir bezeichnen dabei mit ϕ die Eulersche ϕ-Funktion $\phi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$.

Proposition 2.4.5 *(i) Hat G die Ordnung n, so ist $T(G)$ ein homomorphes Bild von $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times)/\{\pm 1\}$. $|T(G)|$ teilt insbesondere $\phi(n)/2$ für $n > 2$.*

(ii) $T(G)$ *ist zyklisch für jede* p*-Gruppe* G*.*

(iii) $T(G) = 0$ *für zyklisches* G*.*

BEWEIS.

(i) Klar aus der Sequenz 2.24 und $\langle r, \sigma\rangle = \langle -r, \sigma\rangle$.

(ii) Für $n = p^k$ ist $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ entweder zyklisch oder isomorph zu $\{\pm 1\} \times C$ mit einer zyklischen Gruppe C der Ordnung $\phi(n)/2$, so dass (ii) aus (i) folgt.

(iii) Sei $G = \langle g\rangle$ mit einem Element g der Ordnung n. Wir zeigen, dass die Abbildung h in der Sequenz 2.24 surjektiv ist. Sei dazu $r \in \mathbb{Z}$ mit $(r, n) = 1$ gegeben. Dann ist das Element $u = (g^r - 1)/(g - 1) \in \Gamma^\times$ und $h(1, u) = r \bmod n$. □

Sei nun wieder E ein hinreichend großer Körper, so dass alle Darstellungen von G über E realisiert werden können und $E/\mathbb{Q}$ galoissch ist mit Gruppe Γ. Wir wollen für das Element $(r, \sigma) \in T(G)$ einen darstellenden Homomorphismus $f \in \mathrm{Hom}_\Gamma(R(G), \mathcal{J}(E))$ angeben.
Sei dazu $e = \sigma/n$ und $u = (1 - e) + re$. e ist ein zentrales Idempotentes in der Gruppenalgebra $\mathbb{Q}G$, u ist ebenfalls zentral und es gilt $u\sigma = r\sigma$. Es folgt:

$$\langle r, \sigma\rangle \simeq \frac{u}{r}\langle r, \sigma\rangle = \langle u, \frac{u\sigma}{r}\rangle = \langle u, \sigma\rangle.$$

Für $p \nmid n$ ist $e \in \langle u, \sigma\rangle_p$, also $\langle u, \sigma\rangle_p = \mathbb{Z}_pG$. Für $p \mid n$ ist $\sigma = u\frac{\sigma}{r} \in u\mathbb{Z}_pG$, also $\langle u, \sigma\rangle_p = u\mathbb{Z}_pG$. Insgesamt erhalten wir

$$\langle r, \sigma\rangle_p = \langle u, \sigma\rangle_p = \beta_p\mathbb{Z}_pG, \text{ wobei } \beta_p = \begin{cases} 1 & \text{falls } p \nmid n \\ u & \text{falls } p \mid n \end{cases} \tag{2.25}$$

Wegen der Bemerkung nach 1.8 wird also (r, σ) repräsentiert von $f \in \mathrm{Hom}_\Gamma(R(G), \mathcal{J}(E))$, der lokal auf irreduziblen Charakteren $\chi \in \mathrm{Irr}\, G$ definiert ist als $f_p(\chi) = \det_\chi(\beta_p)$, also wegen 2.25

$$f_p(\chi) = \begin{cases} 1 & \text{falls } p \nmid n \text{ oder } \chi \neq 1_G \\ r & \text{falls } p \mid n \text{ und } \chi = 1_G \end{cases} \tag{2.26}$$

Wir benutzen diese Darstellung, um den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 2.4.6 *Sei* H *eine Untergruppe von* G *und* $\mathrm{res} = \mathrm{res}^G_H$*. Dann gilt:*

$$\mathrm{res}\,(r, \sigma_G) = (r, \sigma_H)$$

BEWEIS. Nach dem Diagramm 1.9 wird $\mathrm{res}\,(r, \sigma_G)$ dargestellt von $g = \mathrm{res}\,(f)$ mit

$$g(\chi) = f(\mathrm{ind}\,\chi) \text{ für } \chi \in \mathrm{Irr}\, H.$$

Wegen $(1_G, \operatorname{ind}\chi)_G = (1_H, \chi)_H$ gilt also

$$g(\chi) = \begin{cases} 1 & \chi \neq 1_H \\ f(1_G) & \chi = 1_H \end{cases}$$

Sei $g' \in \operatorname{Hom}_\Gamma(R(H), \mathcal{J}(E))$ das repräsentierende Element für (r, σ_H), das auf irreduziblen Charakteren gegeben ist durch

$$g'_p(\chi) = \begin{cases} 1 & \text{falls } p \nmid n \text{ oder } \chi \neq 1_H \\ r & \text{falls } p \mid n \text{ und } \chi = 1_H \end{cases}$$

Also unterscheiden sich g und g' nur an Primstellen q, die $|G|$ teilen, aber nicht $|H|$. Für solche q schreiben wir $\mathbb{Z}_q H = \mathbb{Z}_q \oplus \Delta$ mit einer Maximalordnung Δ in $\mathbb{Q}H/\mathbb{Q}\sigma_H$. Dann ist $\xi = (r, 1) \in (\mathbb{Z}_q H)^\times$ und $g = g' \cdot \operatorname{Det}\xi$ und somit $\operatorname{res}(r, \sigma_G) = (r, \sigma_H)$. □

Wir werden diesen Satz nicht benötigen, aber der Beweis verdeutlicht schön die Vorteile der Beschreibung der Klassengruppe durch Homomorphismen.

Wir wenden nun die Swan-Moduln an, um Satz 2.4.1 zu beweisen (vgl. [4] Th. 53.20).
Sei dazu N/K zahm mit Gruppe G und den Ganzheitsringen $\mathfrak{O} \supset \mathfrak{o}$. Wir betrachten den $\mathfrak{o}G$-Torsionsmodul

$$T = \mathfrak{D}^{-1}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o})/\mathfrak{O}$$

der projektiven Dimension 1. T definiert also ein Element in $K_0T(\mathfrak{o}G)$ und besitzt unter der Surjektion $K_0T(\mathfrak{o}G) \twoheadrightarrow \operatorname{Cl}(\mathfrak{o}G)$ das Bild $(\mathfrak{D}^{-1}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o})) - (\mathfrak{O})$. Wir müssen zeigen, dass dieses Bild trivial wird in $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}G)$. Die Zerlegung $T = \bigoplus_\mathfrak{p} T_\mathfrak{p}$ von T in die $\mathfrak{p}$-adischen Komplettierungen induziert einen Isomorphismus

$$K_0T(\mathfrak{o}G) \simeq \bigoplus_\mathfrak{p} K_0T(\mathfrak{o}_\mathfrak{p}G),$$

so dass es genügt zu zeigen, dass

$$T_\mathfrak{p} = \mathfrak{D}^{-1}(\mathfrak{O}_\mathfrak{p}/\mathfrak{o}_\mathfrak{p})/\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$$

triviales Bild in $\operatorname{Cl}(\mathbb{Z}G)$ hat. Sei p die Charakteristik von $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$. Dann zerlegt sich

$$\mathfrak{p}\mathfrak{O} = (\mathfrak{P}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{P}_g)^e$$

mit $p \nmid e$. Dementsprechend ist

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{O}_\mathfrak{p}/\mathfrak{o}_\mathfrak{p}) = (\mathfrak{P}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{P}_g)^{e-1}$$

und damit

$$T_\mathfrak{p} \simeq \bigoplus_{i=1}^{g} \mathfrak{P}_i^{-(e-1)}/\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}_i} \simeq \mathfrak{o}_\mathfrak{p}G \otimes_{\mathfrak{o}_\mathfrak{p}G_{\mathfrak{P}_1}} (\mathfrak{P}_1^{-(e-1)}/\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}_1}).$$

Es genügt somit zu zeigen, dass $\mathfrak{P}_1^{-(e-1)}/\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}_1}$ triviales Bild in $\mathrm{Cl}\,(\mathbb{Z}G_{\mathfrak{P}_1})$ besitzt. Wir können also annehmen, dass $\mathfrak{p}\mathfrak{O} = \mathfrak{P}^e$ und $T = \mathfrak{P}^{-(e-1)}/\mathfrak{O}$. Sei $I = I_{\mathfrak{P}}$ die Trägheitsgruppe von $\mathfrak{P}/\mathfrak{p}$ und N_0 der Fixkörper von I mit Ganzheitsring $\mathfrak{O}_0$. I ist zyklisch von der Ordnung e und wir erhalten

$$T = \mathfrak{P}^{-(e-1)}/\mathfrak{O} \simeq \mathfrak{P}/\mathfrak{p}\mathfrak{O} \simeq (\mathfrak{P} + \mathfrak{O}_0)/(\mathfrak{p}\mathfrak{O} + \mathfrak{O}_0) \simeq \mathfrak{O}/(\mathfrak{p}\mathfrak{O} + \mathfrak{O}_0),$$

die letzte Isomorphie wegen $\mathfrak{O}/\mathfrak{P} \simeq \mathfrak{O}_0/\mathfrak{p}\mathfrak{O}_0$.

Wegen $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}} \simeq \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}G$ und $(\mathfrak{o}G)^I = (\mathfrak{o}G)\sigma_0$ mit $\sigma_0 = \sum_{x \in I} x$ erhalten wir schließlich

$$T \simeq \mathfrak{o}G/(\mathfrak{p}\mathfrak{o}G + \mathfrak{o}G\sigma_0) \simeq \mathfrak{o}G \otimes_{\mathfrak{o}I} W,$$

$$W = \mathfrak{o}I/(\mathfrak{p}\mathfrak{o}I + \mathfrak{o}\sigma_0) \simeq \kappa I/\kappa\sigma_0,$$

wobei $\kappa = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ den Restklassenkörper bezeichne. Wir müssen noch zeigen, dass das Bild von W in $\mathrm{Cl}\,(\mathbb{Z}I)$ trivial ist. Da aber $\kappa \simeq \mathbb{F}_p^f$ für ein $f \in \mathbb{N}$, folgt

$$W \simeq (\mathbb{Z}I/\langle p, \sigma_0\rangle)^f$$

als $\mathbb{Z}I$-Modul. Wegen $p \nmid e = |I|$ ist $\langle p, \sigma_0\rangle$ ein Swan-Modul, also das Bild von W in $\mathrm{Cl}\,(\mathbb{Z}I)$ tatsächlich trivial nach Proposition 2.4.5 (iii). $\square$

Kapitel 3

Wild verzweigte Erweiterungen

Bislang haben wir nur zahm verzweigte Erweiterungen N/K studiert, da nur in diesem Fall die ganzen Zahlen $\mathfrak{O}$ von N ein Element in der Klassengruppe definieren. Es stellt sich die Frage, ob man auch für beliebig verzweigte Erweiterungen eine Invariante in $\mathrm{Cl}(\mathbb{Z}G)$ definieren kann, die im zahmen Fall mit $U_{N/K}$ übereinstimmt. In der Tat hat T. Chinburg in [1] eine solche Invariante definiert und wir wollen seine Ergebnisse hier zusammentragen. Im folgenden Paragraphen stellen wir sein wichtigstes Hilfsmittel zur Verfügung.

3.1 Tate-Sequenzen

Sei N/K eine galoissche Erweiterung globaler Körper mit Gruppe G. Wir fixieren eine endliche Primstellenmenge S_K von K, die alle unendlichen Stellen von K enthält, sowie die Primstellenmenge S_N von N, die aus allen Fortsetzungen der Primstellen aus S_K auf N besteht. Weiter sei $Y = \mathbb{Z}S_N$ die freie abelsche Gruppe über S_N und $X = \Delta S_N$ der Kern der Augmentation $\mathrm{aug} : Y \to \mathbb{Z}$, $\sum_{\mathfrak{P}\in S_N} n_{\mathfrak{P}}\mathfrak{P} \mapsto \sum_{\mathfrak{P}\in S_N} n_{\mathfrak{P}}$. G operiert auf S_N und wir haben eine exakte Sequenz von G-Moduln

$$(\underline{X}) : 0 \to X \to Y \stackrel{\mathrm{aug}}{\to} \mathbb{Z} \to 0. \tag{3.1}$$

Wir bezeichnen die S_N-Einheiten von N mit

$$U = U_{N,S_N} = (\mathfrak{O}_{S_N})^\times,$$

wobei

$$\mathfrak{O}_{S_N} = \{x \in N : x \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}\,\forall\,\mathfrak{P} \notin S_N\}.$$

Für sie gilt der (vgl. [8] Kap. I (11.7))

Satz 3.1.1 (Dirichletscher S-Einheitensatz) *Sei $\mu(N)$ die Gruppe der Einheitswurzeln von N. Dann gilt mit den obigen Bezeichnungen:*

$$U \simeq \mu(N) \oplus \mathbb{Z}^{\#S_N - 1}.$$

Das Hauptresultat ist nun

Satz 3.1.2 (Tate-Sequenz) *Enthält S_K alle in N verzweigten Primstellen von K und ist die S_N-Klassenzahl* [1] $h_{N,S_N} = 1$, *dann existieren ein kohomologisch trivialer G-Modul A und ein projektiver G-Modul B sowie eine exakte Sequenz*

$$0 \to U \to A \to B \to X \to 0.$$

Bemerkung: Da die G-Moduln U und X nach Satz 3.1.1 den gleichen Rang über $\mathbb{Z}$ besitzen, liegt das Element $\Omega = (A) - (B) \in K_0(\mathbb{Z}G)$ sogar in der Klassengruppe $\mathrm{Cl}\,(\mathbb{Z}G)$.

Beweisskizze. Wir folgen dem Beweis, wie er in [14] oder in [15] geführt wird. Dies ist erforderlich, da in T. Chinburgs Ausführungen Ideen aus diesem Beweis eingehen. Wir werden einige Resultate der kohomologischen Seite der Klassenkörpertheorie verwenden, wie sie z.B. in [9] zu finden sind.

Sei $S = S_N$, $\mathcal{J}_S = \prod_{\mathfrak{P}\in S_N} N_{\mathfrak{P}}^\times \times \prod_{\mathfrak{P}\notin S_N} \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}^\times$ die Gruppe der S-Idele von N und $\mathcal{C}_N$ die Idelklassengruppe von N. Wegen $h_{N,S} = 1$ haben wir eine exakte Sequenz

$$(\underline{U}) : 0 \to U \to \mathcal{J}_S \xrightarrow{a} \mathcal{C}_N \to 0. \tag{3.2}$$

Sei nun α_1 die Fundamentalklasse der zyklischen Gruppe $H^2(G, \mathcal{C}_N)$. Dann induziert das Cupprodukt mit α_1 für jedes $r \in \mathbb{Z}$ einen Isomorphismus

$$H^r(G, \mathbb{Z}) \overset{\cup\alpha_1}{\to} H^{r+2}(G, \mathcal{C}_N).$$

Entsprechend sei im Lokalen $\alpha_{2,\mathfrak{P}}$ für jede Primstelle $\mathfrak{P}$ von N der fundamentale Erzeuger von $H^2(G_{\mathfrak{P}}, N_{\mathfrak{P}}^\times)$, so dass das Cupprodukt mit $\alpha_{2,\mathfrak{P}}$ für jedes $r \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen

$$H^r(G_{\mathfrak{P}}, \mathbb{Z}) \overset{\cup\alpha_{2,\mathfrak{P}}}{\to} H^{r+2}(G_{\mathfrak{P}}, N_{\mathfrak{P}}^\times)$$

induziert. Wegen

$$Y = \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S_K} \mathrm{ind}\,_{G_{\mathfrak{P}}}^{G}\, \mathbb{Z}$$

konstruiert man mit Hilfe von Shapiros Lemma ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^r(G, Y) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\cup\alpha_2"'] & \prod_{\mathfrak{p}\in S_K} H^r(G_{\mathfrak{P}}, \mathbb{Z}) \arrow[d, "\cup\prod_{\mathfrak{p}\in S_K}\alpha_{2,\mathfrak{P}}"'] \\
H^{r+2}(G, \mathcal{J}_S) \arrow[r, "\sim"] & \prod_{\mathfrak{p}\in S_K} H^{r+2}(G_{\mathfrak{P}}, N_{\mathfrak{P}}^\times)
\end{tikzcd}$$

[1] Das ist die Ordnung der Idealklassengruppe des Rings $\mathfrak{O}_{S_N}$, d.h. die Bedingung $h_{N,S_N} = 1$ ist äquivalent dazu, dass die endlichen Primstellen $\mathfrak{P} \in S_N$ die Klassengruppe Cl_N von N erzeugen.

mit einem $\alpha_2 \in H^2(G, \mathrm{Hom}(Y, \mathcal{J}_S)) \simeq \prod_{\mathfrak{p} \in S_K} H^2(G_{\mathfrak{P}}, \mathcal{J}_S)$, dessen Projektionen auf die lokale Komponenten $H^2(G_{\mathfrak{P}}, \mathcal{J}_S)$ genau die Fundamentalklassen $\alpha_{2,\mathfrak{P}}$ sind. Dies lässt sich erreichen, da $H^2(G_{\mathfrak{P}}, N_{\mathfrak{P}}^{\times})$ ein direkter Faktor von $H^2(G_{\mathfrak{P}}, \mathcal{J}_S)$ ist. $\mathfrak{P}$ bezeichnet dabei stets eine beliebige über $\mathfrak{p}$ gelegene Primstelle von N. Man beachte, dass die untere Isomorphie des Diagramms nur deshalb gilt, weil S_K alle verzweigten Primstellen enthält.

Sei nun $\mathrm{Hom}((\underline{X}), (\underline{U}))$ der G-Modul bestehend aus allen Tripeln (f_3, f_2, f_1) von G-Homomorphismen, so dass

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & X & \to & Y & \stackrel{\mathrm{aug}}{\to} & \mathbb{Z} & \to & 0 \\ & & f_3 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_1 \downarrow & & \\ 0 & \to & U & \to & \mathcal{J}_S & \stackrel{a}{\to} & \mathcal{C}_N & \to & 0 \end{array}$$

kommutiert. Da Y ein $\mathbb{Z}$-freier Modul ist, erhält man eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathrm{Hom}((\underline{X}), (\underline{U})) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathcal{C}_N) \times \mathrm{Hom}(Y, \mathcal{J}_S) \stackrel{a-\mathrm{aug}}{\to} \mathrm{Hom}(Y, \mathcal{C}_N) \to 0.$$

und daraus wegen $H^1(G, \mathrm{Hom}(Y, \mathcal{C}_N)) = 0$ eine exakte Kohomologie-Sequenz

$$0 \to H^2(G, \mathrm{Hom}((\underline{X}), (\underline{U}))) \to H^2(G, \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathcal{C}_N)) \times H^2(G, \mathrm{Hom}(Y, \mathcal{J}_S))$$

$$\stackrel{a-\mathrm{aug}}{\to} H^2(G, \mathrm{Hom}(Y, \mathcal{C}_N)).$$

Dabei gilt $a(\alpha_1) = \mathrm{aug}\,(\alpha_2)$, wobei die von a bzw. von der Augmentation induzierten Abbildungen wieder mit a bzw. aug bezeichnet werden. Es gibt also ein Element $(\alpha) = (\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1) \in H^2(G, \mathrm{Hom}((\underline{X}), (\underline{U})))$, so dass

$$\begin{array}{ccccccccccc} \ldots & \to & H^r(G, X) & \to & H^r(G, Y) & \to & H^r(G, \mathbb{Z}) & \to & H^{r+1}(G, X) & \to & \ldots \\ & & \cup\alpha_3 \downarrow & & \cup\alpha_2 \downarrow & & \cup\alpha_1 \downarrow & & \cup\alpha_3 \downarrow & & \\ \ldots & \to & H^{r+2}(G, U) & \to & H^{r+2}(G, \mathcal{J}_S) & \to & H^{r+2}(G, \mathcal{C}_N) & \to & H^{r+3}(G, U) & \to & \ldots \end{array} \qquad (3.3)$$

kommutiert. Mit $\cup\alpha_2$ und $\cup\alpha_1$ sind auch die Abbildungen $\cup\alpha_3$ für alle $r \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen.

Definition 3.1.3 *Das Element* $(\alpha) \in H^2(G, \mathrm{Hom}((\underline{X}), (\underline{U})))$*, welches das kommutative Diagramm 3.3 induziert, heißt die kanonische Tate-Klasse.*

Wir wählen $\mathbb{Z}G$-freie Moduln B und B', so dass

$$0 \to X' \to B' \to B \to X \to 0$$

exakt wird. Da die auftretenden Moduln dieser Sequenz alle $\mathbb{Z}$-frei sind, ist auch

$$0 \to \mathrm{Hom}(X, U) \to \mathrm{Hom}(B, U) \to \mathrm{Hom}(B', U) \to \mathrm{Hom}(X', U) \to 0$$

exakt und wir erhalten Isomorphismen

$$H^r(G, \mathrm{Hom}(X', U)) \simeq H^{r+2}(G, \mathrm{Hom}(X, U)),\ r \in \mathbb{Z},$$

da $\mathrm{Hom}(B,U)$ und $\mathrm{Hom}(B',U)$ als induzierte Moduln kohomologisch trivial sind. Ist $\alpha_3' \in \mathrm{Hom}_G(X',U)$ nun im Fall $r=0$ ein repräsentierendes Element des Urbilds von $\alpha_3 \in H^2(G, \mathrm{Hom}(X,U))$, dann induziert $\cup\alpha_3'$ Isomorphismen

$$H^r(G,X') \simeq H^r(G,U) \, \forall \, r \in \mathbb{Z}. \tag{3.4}$$

Wir können annehmen, dass α_3' surjektiv ist, indem wir gegebenenfalls X' und B' durch $X' \oplus L$ und $B' \oplus L$ mit einem freien $\mathbb{Z}G$-Modul L ersetzen. Wegen 3.4 ist $\ker(\alpha_3')$ kohomologisch trivial und wir erhalten mit $A = B'/\ker(\alpha_3')$ die gewünschte exakte Sequenz. □

Wegen der Wichtigkeit der Tate-Sequenz wollen wir noch eine weitere Konstruktion skizzieren, wie sie in [18] Ch. 5 durchgeführt wird. Die Beweise zu den Sätzen in Kapitel 3.3 und 3.4 verwenden diese Art der Herleitung.

Sei dazu $S = S_N$ eine hinreichend große Stellenmenge, $\alpha = \alpha_1$ wieder die Fundamentalklasse von $H^2(G, \mathcal{C}_N)$, und für alle $\mathfrak{P} \in S$ entsprechend $\alpha_{\mathfrak{P}} = \alpha_{2,\mathfrak{P}}$ die Fundamentalklasse von $H^2(G_{\mathfrak{P}}, N_{\mathfrak{P}}^\times)$. α entspricht einer Gruppenerweiterung

$$0 \to \mathcal{C}_N \to \mathfrak{F} \to G \to 0$$

mit einem G-Modul $\mathfrak{F}$, und die $\alpha_{\mathfrak{P}}$ entsprechen Gruppenerweiterungen

$$0 \to N_{\mathfrak{P}}^\times \to \mathfrak{F}_{\mathfrak{P}} \to G_{\mathfrak{P}} \to 0$$

mit $G_{\mathfrak{P}}$-Moduln $\mathfrak{F}_{\mathfrak{P}}$. Wir haben die Inklusion $G_{\mathfrak{P}} \to G$ und kanonische Abbildungen $N_{\mathfrak{P}}^\times \to \mathcal{C}_N$, die Abbildungen $i_{\mathfrak{P}} : H^2(G_{\mathfrak{P}}, N_{\mathfrak{P}}^\times) \to H^2(G_{\mathfrak{P}}, \mathcal{C}_N)$ induzieren. Wegen $\mathrm{res}\,^G_{G_{\mathfrak{P}}} \alpha = i_{\mathfrak{P}}(\alpha_{\mathfrak{P}})$ existieren dann kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & N_{\mathfrak{P}}^\times & \to & \mathfrak{F}_{\mathfrak{P}} & \to & G_{\mathfrak{P}} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{C}_N & \to & \mathfrak{F} & \to & G & \to & 0 \end{array}$$

(vgl. Lemma 3 in [18]). Über die kurze exakte Sequenz

$$0 \to \Delta G \to \mathbb{Z}G \stackrel{\mathrm{aug}}{\to} \mathbb{Z} \to 0$$

erhalten wir einen Isomorphismus $H^2(G, \mathcal{C}_N) \simeq \mathrm{Ext}^1_G(\Delta G, \mathcal{C}_N)$, und analog $H^2(G_{\mathfrak{P}}, N_{\mathfrak{P}}^\times) \simeq \mathrm{Ext}^1_{G_{\mathfrak{P}}}(\Delta G_{\mathfrak{P}}, N_{\mathfrak{P}}^\times)$. Obiges Diagramm übersetzt sich dann via einem Translationsfunktor (vgl. [18] Prop. 1) in das kommutative $G_{\mathfrak{P}}$-Modul-Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & N_{\mathfrak{P}}^\times & \to & V_{\mathfrak{P}} & \to & \Delta G_{\mathfrak{P}} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \theta_{\mathfrak{P}} \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{C}_N & \to & \mathfrak{V} & \to & \Delta G & \to & 0, \end{array} \tag{3.5}$$

wobei die senkrechten Pfeile links und rechts wieder die kanonischen Abbildungen sind. Wir wählen ein Vertretersystem S_0 für die G-Bahnen in S und konstruieren das Diagramm 3.5 für jedes $\mathfrak{P} \in S_0$. Mit den Bezeichnungen

$\mathcal{J} = \mathcal{J}_S$, $V_0 = (\bigoplus_{\mathfrak{P}\in S_0} \operatorname{ind}_{G_\mathfrak{P}}^G V_\mathfrak{P}) \oplus \prod_{\mathfrak{P}\notin S} \mathfrak{O}_\mathfrak{P}^\times$ und $\Delta_0 = \bigoplus_{\mathfrak{P}\in S_0} \operatorname{ind}_{G_\mathfrak{P}}^G \Delta G_\mathfrak{P}$ fügen wir diese zu dem G-Modul-Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{J} & \to & V_0 & \to & \Delta_0 & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \theta_0 \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{C}_N & \to & \mathfrak{V} & \to & \Delta G & \to & 0, \end{array} \tag{3.6}$$

zusammen.

Wir definieren nun einen G-Homomorphismus $c : \Delta_0 \to \Delta G \otimes \mathbb{Z}S$, indem wir die Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{ind}_{G_\mathfrak{P}}^G \Delta G_\mathfrak{P} & \to & \Delta G \otimes \mathbb{Z}S \\ g \otimes x & \mapsto & gx \otimes g\mathfrak{P} \end{array}$$

für $\mathfrak{P} \in S_0$ kombinieren. Es gilt (vgl. [18] Prop. 4b):

Lemma 3.1.4 *Der G-Homomorphismus $c : \Delta_0 \to \Delta G \otimes \mathbb{Z}S$ ist injektiv mit freiem Kokern.*

c induziert also einen Isomorphismus $\operatorname{Ext}^1_G(\Delta_0, \mathcal{J}) \simeq \operatorname{Ext}^1_G(\Delta G \otimes \mathbb{Z}S, \mathcal{J})$, so dass die Erweiterungsklasse der oberen Sequenz in 3.6 eine eindeutige Klasse in $\operatorname{Ext}^1_G(\Delta G \otimes \mathbb{Z}S, \mathcal{J})$ bestimmt. Damit erhalten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{J} & \to & V_0 & \to & \Delta_0 & \to & 0 \\ & & || & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{J} & \to & V & \to & \Delta G \otimes \mathbb{Z}S & \to & 0 \end{array} \tag{3.7}$$

mit einem G-Modul V.

Lemma 3.1.5 *(i) $\mathfrak{V}$ und V sind kohomologisch triviale G-Moduln.*

(ii) Die Erweiterungsklasse der unteren Sequenz in 3.7 ist unabhängig von der Wahl des Vertretersystems S_0.

Für den Beweis vergleiche Prop. 4 in [18].

Die Abbildung $\Delta_0 \to \Delta G$ aus Diagramm 3.6 ist gerade die Komposition der Abbildungen $c : \Delta_0 \to \Delta G \otimes \mathbb{Z}S$ und $1 \otimes \operatorname{aug} : \Delta G \otimes \mathbb{Z}S \to \Delta G \otimes \mathbb{Z} = \Delta G$. Wir erhalten deshalb mit Hilfe von Lemma 3.1.4 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{J} & \to & V & \to & \Delta G \otimes \mathbb{Z}S & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \theta \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{C}_N & \to & \mathfrak{V} & \to & \Delta G & \to & 0. \end{array} \tag{3.8}$$

Alle vertikalen Abbildungen sind surjektiv, und die Kerne liefern eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to U \to A \to \Delta G \otimes \Delta S \to 0$$

mit einem wegen Lemma 3.1.5 kohomologisch trivialen G-Modul A. Wir verquicken diese nun noch mit der Sequenz

$$0 \to \Delta G \otimes \Delta S \to \mathbb{Z}G \otimes \Delta S \to \Delta S \to 0,$$

welche mit dem Schlangenlemma aus dem Diagramm

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \Delta G \otimes \mathbb{Z}S & \to & \mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}S & \to & \mathbb{Z}S & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \Delta G & \to & \mathbb{Z}G & \stackrel{\text{aug}}{\to} & \mathbb{Z} & \to & 0
\end{array}
\tag{3.9}
$$

entsteht, und erhalten die Sequenz

$$0 \to U \to A \to B \to X \to 0$$

mit $B = \mathbb{Z}G \otimes \Delta S$. □

Bemerkung: Ein Vorteil dieser Konstruktion ist, dass sie auch auf kleinere Stellenmengen S übertragen werden kann. Es genügt zu fordern, dass S alle unendlichen Stellen enthält und stabil unter G-Wirkung ist. Es existiert dann immer noch eine Sequenz

$$0 \to U \to A \to B \to \mathfrak{x} \to 0$$

mit einem kohomologisch trivialen G-Modul A, einem stabil freien G-Modul B und einem geeigneten G-Modul $\mathfrak{x}$, dessen $\mathbb{Z}$-Torsions-Untermodul isomorph zur S-Klassengruppe Cl_S von N ist (vgl. dazu Ch. 14 in [18]).

3.2 Die Invarianten von Chinburg

Wir wollen in diesem Paragraphen Invarianten einer beliebigen endlichen galoisschen Körpererweiterung N/K mit Gruppe G konstruieren, wie sie T. Chinburg in [1] einführt. Dazu sei $S = S_N$ eine endliche, hinreichend große Primstellenmenge von N. Was unter „hinreichend groß" zu verstehen ist, wird sich im Laufe der Konstruktion zeigen. Zunächst fordern wir von S die folgenden Eigenschaften:

- S enthalte die Menge S_∞ aller unendlichen Stellen von N.
- S enthalte alle in N/K verzweigten Primstellen.
- Die S-Klassenzahl aller Zwischenkörper von N/K sei 1. [2]
- S ist abgeschlossen unter der Wirkung von G, d.h. für $\mathfrak{P} \in S$ ist auch $\mathfrak{P}^g \in S$ für alle $g \in G$.
- Die Menge S_f aller endlichen Stellen von S ist nicht leer.

[2] Damit ist genauer Folgendes gemeint: Ist L ein Zwischenkörper von N/K und $\overline{S}$ die Menge aller unter S gelegenen Stellen von L, dann ist die $\overline{S}$-Klassenzahl von L gleich 1.

Proposition 3.2.1 *Für jede Untergruppe H von G gilt:*

$$H^1(H, U) = 1.$$

Beweis. Da die S-Klassengruppe von N nach unseren Bedingungen an S trivial ist, haben wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to U \to N^\times \to \mathcal{I}_S(N) \to 0,$$

wobei $\mathcal{I}_S(N)$ die Gruppe der gebrochenen Ideale prim zu S bezeichne. Nehmen wir nun H-Invarianten, so erhalten wir nach Hilberts Satz 90

$$0 \to U^H \to L^\times \to \mathcal{I}_S(N)^H \to H^1(H, U) \to 0$$

mit dem Fixkörper L von H. Sei $\overline{S}$ die Menge aller Primstellen von L unterhalb S. Da S auch alle verzweigten Primstellen enthält, folgt $\mathcal{I}_S(N)^H = \mathcal{I}_{\overline{S}}(L)$ und somit $H^1(H, U) = 1$, weil die $\overline{S}$-Klassengruppe von L ebenfalls trivial ist. $\square$

Genauer zeigt der Beweis sogar die Äquivalenz:

$$\mathrm{Cl}_{\overline{S}}(L) = 1 \iff H^1(H, U) = 1. \tag{3.10}$$

Unser erstes Ziel ist es nun, die Sequenz

$$(\underline{U}) : 0 \to U \to \mathcal{J}_S \xrightarrow{a} \mathcal{C}_N \to 0.$$

aus 3.2 so durch kurze exakte Sequenzen zu approximieren, dass diese noch die gleiche Kohomologie wie $(\underline{U})$ haben, aber sich besser für eine Verallgemeinerung der Ergebnisse aus Kapitel 2 eignen.

Für jedes $\mathfrak{P} \in S_f$ ist $\exp_{\mathfrak{P}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! \in N_{\mathfrak{P}}^\times$ für alle $0 \neq x \in N_{\mathfrak{P}}$, die bezüglich der $\mathfrak{P}$-adischen Topologie nahe genug an Null liegen, d.h. $x \in \mathfrak{P}^e$ für e groß genug. Da S_f nicht leer und endlich ist, gibt es ein $m \in \mathfrak{o}$, so dass die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \exp: & m\mathfrak{O} & \longrightarrow & \bigoplus_{\mathfrak{P} \in S_f} N_{\mathfrak{P}}^\times \\ & x & \mapsto & (\ldots, \exp_{\mathfrak{P}}(x), \ldots) \end{array} \tag{3.11}$$

eine wohldefinierte Injektion ist. Wir wählen nun einen $\mathbb{Z}G$-freien Untermodul $P \subset m\mathfrak{O}$ von endlichem Index in $\mathfrak{O}$. Dann gibt es ein $z \in \mathfrak{o}$, so dass $z\mathfrak{O} \subset P$, und wir können annehmen, dass z und m außerhalb von S Einheiten sind, indem wir S gegebenenfalls vergrößern. $\overline{\exp(P)}$ bezeichne den Abschluss von $\exp(P)$ in $\oplus_{\mathfrak{P}} N_{\mathfrak{P}}^\times$. Wir benötigen das folgende

Lemma 3.2.2 *Sei $\mathfrak{P}_\infty$ eine unendliche Primstelle von N. $\mathcal{M}$ bezeichne die Menge aller endlich erzeugten $G_{\mathfrak{P}_\infty}$-Untermoduln W von $N_{\mathfrak{P}_\infty}^\times$ mit*

(i) $U = U_{N,S} \subset W$ und W/U ist torsionsfrei.

(ii) Die Inklusion $W \rightarrowtail N_{\mathfrak{P}_\infty}^\times$ induziert Isomorphismen auf der $G_{\mathfrak{P}_\infty}$-Kohomologie.

Dann existiert ein $W_{\mathfrak{P}_\infty} \in \mathcal{M}$ mit der folgenden zusätzlichen Eigenschaft:

Für alle $W \in \mathcal{M}$ existiert ein $G_{\mathfrak{P}_\infty}$-Homomorphismus $f : W_{\mathfrak{P}_\infty} \to W$, der auf U die Identität und auf der Kohomologie von $W_{\mathfrak{P}_\infty}$ und W Isomorphismen induziert.

Beweisskizze. Wir geben nur die Konstruktion des Moduls W an. Im Fall $G_{\mathfrak{P}_\infty} = 1$ wählen wir einfach $W = U$ und für die Abbildungen f stets die Inklusion. Sei also im Folgenden $G_{\mathfrak{P}_\infty} = \langle g \rangle$ mit einem Element g der Ordnung 2. Da $G_{\mathfrak{P}_\infty}$ zyklisch ist, erhalten wir $H^{-1}(G_{\mathfrak{P}_\infty}, U) = H^1(G_{\mathfrak{P}_\infty}, U) = 1$ nach Proposition 3.2.1. Bezeichnen wir mit U_{tor} die Torsions-Untergruppe von U und setzen $U_0 = U/U_{\mathrm{tor}}$, so haben wir eine exakte Sequenz

$$0 \to H^{-1}(G_{\mathfrak{P}_\infty}, U_0) \to H^0(G_{\mathfrak{P}_\infty}, U_{\mathrm{tor}}) \to H^0(G_{\mathfrak{P}_\infty}, U).$$

Die Gruppe $H^0(G_{\mathfrak{P}_\infty}, U_{\mathrm{tor}})$ hat Ordnung 2 und wird erzeugt von $-1 \in U_{\mathrm{tor}}$. Da aber $-1 \notin (1+g)U$, ist auch $H^{-1}(G_{\mathfrak{P}_\infty}, U_0) = 1$. Die Isomorphieklassen der torsionsfreien unzerlegbaren $\mathbb{Z}G_{\mathfrak{P}_\infty}$-Moduln sind gegeben durch $\mathbb{Z}G_{\mathfrak{P}_\infty}$ sowie $\mathbb{Z}$ mit trivialer und nicht-trivialer $G_{\mathfrak{P}_\infty}$-Wirkung. Da bei nicht-trivialer Wirkung $H^{-1}(G_{\mathfrak{P}_\infty}, \mathbb{Z}) \neq 1$, folgt

$$U_0 \simeq \mathbb{Z}^a \oplus \mathbb{Z}G_{\mathfrak{P}_\infty}^b$$

für ganze Zahlen a und b. Da

$$\mathrm{Ext}^1_{G_{\mathfrak{P}_\infty}}(\mathbb{Z}, U_{\mathrm{tor}}) = H^1(G_{\mathfrak{P}_\infty}, U_{\mathrm{tor}}) = H^{-1}(G_{\mathfrak{P}_\infty}, U_{\mathrm{tor}}) = \mathbb{Z}/2,$$

gibt es bis auf Isomorphie genau eine nicht-triviale Erweiterung von $\mathbb{Z}$ durch U_{tor}, also einen $G_{\mathfrak{P}_\infty}$-Modul $\mathcal{E}$ mit $0 \to U_{\mathrm{tor}} \to \mathcal{E} \to \mathbb{Z} \to 0$. Dann ist die Erweiterung

$$0 \to U_{\mathrm{tor}} \to \mathcal{E} \oplus \mathbb{Z}^{a-1} \oplus \mathbb{Z}G_{\mathfrak{P}_\infty}^b \to \mathbb{Z}^a \oplus \mathbb{Z}G_{\mathfrak{P}_\infty}^b = U_0 \to 0$$

ebenso nicht-trivial wie

$$0 \to U_{\mathrm{tor}} \to U \to U_0 \to 0$$

wegen $H^{-1}(G_{\mathfrak{P}_\infty}, U) = 1 \neq H^{-1}(G_{\mathfrak{P}_\infty}, U_{\mathrm{tor}} \oplus U_0)$. Die $G_{\mathfrak{P}_\infty}$-Automorphismengruppe von U_0 operiert transitiv auf den nicht-trivialen Elementen von $\mathrm{Ext}^1_{G_{\mathfrak{P}_\infty}}(U_0, U_{\mathrm{tor}})$ und deshalb existiert ein Isomorphismus

$$U \simeq \mathcal{E} \oplus \mathbb{Z}^{a-1} \oplus \mathbb{Z}G_{\mathfrak{P}_\infty}^b.$$

Wählen wir nun eine Basis $u_1, \ldots, u_{a-1}$ des Summanden $\mathbb{Z}^{a-1}$ von U mit bei $\mathfrak{P}_\infty$ positiven u_i, so existieren komplexe Zahlen $\lambda_i \in N_{\mathfrak{P}_\infty}^\times$ mit $\lambda_i^{1+g} = u_i$ in $N_{\mathfrak{P}_\infty}$. Indem man die λ_i noch mit geeigneten Elementen des Einheitskreises von

$N_{\mathfrak{P}_\infty}$ multipliziert, kann man erreichen, dass aus $\prod_i \lambda_i^{(a_i+b_i g)} \in U$ mit ganzen Zahlen a_i und b_i folgt, dass $a_i = b_i$ für alle i. Wir setzen schließlich

$$W_{\mathfrak{P}_\infty} = \mathcal{E} \oplus \bigoplus_{i=1}^{a-1} \mathbb{Z}G_{\mathfrak{P}_\infty}\lambda_i \oplus \mathbb{Z}G^b_{\mathfrak{P}_\infty}.$$

$W_{\mathfrak{P}_\infty}$ hat nun die gewünschten Eigenschaften (vgl. dazu [1] Lemma 2.1). □

Wir wählen mit $S_{\infty,0}$ ein Vertretersystem für die G-Bahnen von S_∞. Für jedes $\mathfrak{P}_\infty \in S_{\infty,0}$ sei $W_{\mathfrak{P}_\infty}$ der Modul aus Lemma 3.2.2. Wir setzen

$$\mathcal{J}_0 = (\bigoplus_{\mathfrak{P}\in S_f} N_{\mathfrak{P}}^\times)/\overline{\exp(P)}, \tag{3.12}$$

$$\mathcal{J}_f = \mathcal{J}_0 \oplus \bigoplus_{\mathfrak{P}_\infty \in S_{\infty,0}} \operatorname{ind}^G_{G_{\mathfrak{P}_\infty}} W_{\mathfrak{P}_\infty}, \tag{3.13}$$

$$\mathcal{J}_q = \mathcal{J}_0 \oplus \bigoplus_{\mathfrak{P}_\infty \in S_\infty} N^\times_{\mathfrak{P}_\infty}. \tag{3.14}$$

Wegen $U \subset W_{\mathfrak{P}_\infty}$ für $\mathfrak{P}_\infty \in S_{\infty,0}$ existieren Injektionen $U \rightarrowtail \mathcal{J}_f$ und $U \rightarrowtail \mathcal{J}_q$ und wir definieren $\mathcal{C}_f = \mathcal{J}_f/U$ und $\mathcal{C}_q = \mathcal{J}_q/U$. Dann gilt

Proposition 3.2.3 *Es gibt ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{lccccccccc}
(\underline{U})_f: & 0 & \to & U & \to & \mathcal{J}_f & \to & \mathcal{C}_f & \to & 0 \\
 & & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
(\underline{U})_q: & 0 & \to & U & \to & \mathcal{J}_q & \to & \mathcal{C}_q & \to & 0 \\
 & & & \| & & \uparrow & & \uparrow & & \\
(\underline{U}): & 0 & \to & U & \to & \mathcal{J}_S & \to & \mathcal{C}_N & \to & 0
\end{array}$$

mit exakten Zeilen, dessen vertikale Abbildungen Isomorphismen in der Kohomologie induzieren. Die Moduln der Sequenz $(\underline{U})_f$ sind endlich erzeugt.

Bemerkung: Wir sagen, dass die Sequenz $(\underline{U})_f$ die Sequenz $(\underline{U})$ approximiert.

Beweisskizze. Die Abbildung $\mathcal{J}_S \twoheadrightarrow \mathcal{J}_q$ ist die kanonische Surjektion, und da für $\mathfrak{P} \notin S$ die $G_{\mathfrak{P}}$-Moduln $U_{\mathfrak{P}}$ kohomologisch trivial sind, induziert sie Isomorphien in der Kohomologie.

$\bigoplus_{\mathfrak{P}_\infty \in S_\infty} N^\times_{\mathfrak{P}_\infty} = \bigoplus_{\mathfrak{P}_\infty \in S_{\infty,0}} \operatorname{ind}^G_{G_{\mathfrak{P}_\infty}} N^\times_{\mathfrak{P}_\infty}$ induziert eine Injektion $\mathcal{J}_f \rightarrowtail \mathcal{J}_q$, die nach Lemma 3.2.2 Isomorphismen in der Kohomologie induziert.

Die Abbildungen $\mathcal{C}_f \to \mathcal{C}_q$ bzw. $\mathcal{C}_N \to \mathcal{C}_q$ werden von $\mathcal{J}_f \to \mathcal{J}_q$ bzw. $\mathcal{J}_S \to \mathcal{J}_q$ induziert und werden nach dem 5-Lemma in der Kohomologie ebenfalls zu Isomorphismen. Für die letzte Behauptung vergleiche [1] Proposition 2.1. □

Die kanonische Tate-Klasse $(\alpha) \in H^2(G, \mathrm{Hom}((\underline{X}), (\underline{U})))$ (vgl. 3.1.3) definiert nun mit Hilfe des Diagramms aus Proposition 3.2.3 eine eindeutige Klasse $(\alpha)_f \in H^2(G, \mathrm{Hom}((\underline{X}), (\underline{U})_f))$. Analog zum Vorgehen des Beweises der Tate-Sequenz 3.1.2 konstruiert man daraus ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & U & \to & A_3 & \to & B_3 & \to & X & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{J}_f & \to & A_2 & \to & B_2 & \to & Y & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{C}_f & \to & A_1 & \to & B_1 & \to & \mathbb{Z} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array} \tag{3.15}$$

mit exakten Zeilen und Spalten und den folgenden Eigenschaften:

Die linke und rechte Spalte sind die Sequenzen $(\underline{U})_f$ bzw. $(\underline{X})$. Die G-Moduln A_i und B_i sind alle endlich erzeugt und kohomologisch trivial. Außerdem sind die Erweiterungsklassen der drei Zeilen die natürlichen Projektionen von $(\alpha)_f$ auf $H^2(G, \mathrm{Hom}(X, U))$, $H^2(G, \mathrm{Hom}(Y, \mathcal{J}_f))$ und $H^2(G, \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathcal{C}_f))$.

Für einen endlich erzeugten, kohomologisch trivialen Modul A bezeichne $\mathrm{rk}(A)$ den $\mathbb{Z}G$-Rang von A. Wir setzen $r_i = \mathrm{rk}(A_i) - \mathrm{rk}(B_i)$ für $i = 1, 2, 3$. Insbesondere ist $r_3 = 0$ nach Satz 3.1.1.

Definition 3.2.4 *Für $i = 1, 2, 3$ sei $\Omega(N/K, i)$ die Klasse von $(A_i) - (B_i) - r_i(\mathbb{Z}G)$ in $K_0(\mathbb{Z}G)$.*

Da die Klassengruppe der Kern der Rangabbildung ist, gilt offensichtlich

$$\Omega(N/K, i) \in \mathrm{Cl}\,(\mathbb{Z}G) \ \text{ für } i = 1, 2, 3.$$

Außerdem liefert das Diagramm 3.15 die Gleichung

$$\Omega(N/K, 2) = \Omega(N/K, 1)\Omega(N/K, 3). \tag{3.16}$$

Wichtig ist nun zunächst der folgende

Satz 3.2.5 *Die Klassen $\Omega(N/K, i)$ für $i = 1, 2, 3$ sind Invarianten der Erweiterung N/K.*

Bemerkung: Damit ist gemeint, dass diese Klassen von keiner der Wahlen abhängt, die wir in der Konstruktion getroffen haben. Dazu gehören u.a. die Stellenmenge S, der freie Modul P, das Vertretersystem $S_{\infty,0}$, die Moduln $W_{\mathfrak{P}_\infty}$ sowie das Diagramm 3.15. Für den Beweis vergleiche [1] Th. 3.1.

Wir wollen für das Element $\Omega = \Omega(N/K, 3)$ die Unabhängigkeit von den getroffenen Wahlen wenigstens kurz motivieren (vgl. [18] Lemma 7). Dazu betrachten wir das Bild von Ω unter der Cartan-Abbildung $K_0(\mathbb{Z}G) \to G_0(\mathbb{Z}G)$, d.h. wir betrachten Ω in der Grothendieckgruppe aller endlich erzeugten $\mathbb{Z}G$-Moduln. Die Sequenz $0 \to \mathbb{Z}S_\infty \to \mathbb{Z}S \to \mathbb{Z}S_f \to 0$ induziert eine exakte Sequenz

$$0 \to \Delta S_\infty \to \Delta S = X \to \mathbb{Z}S_f \to 0$$

und die Abbildung $U \to \mathbb{Z}S_f, u \mapsto \sum_{\mathfrak{P}\in S_f} v_\mathfrak{P}(u)\mathfrak{P}$ liefert

$$0 \to \mathfrak{O}^\times \to U \to \mathbb{Z}S_f \to \mathrm{Cl}_N \to 0,$$

da die Primideale in S die Klassengruppe erzeugen. Außerdem übernehmen wir aus dem Diagramm 3.15 die Sequenz

$$0 \to U \to A_3 \to B_3 \to X \to 0.$$

Mit diesen drei exakten Sequenzen rechnen wir

$$\begin{aligned} \Omega &= (A_3) - (B_3) = (U) - (X) = (\mathfrak{O}^\times) + (\mathbb{Z}S_f) - (\mathrm{Cl}_N) - (X) \\ &= (\mathfrak{O}^\times) - (\mathrm{Cl}_N) - (\Delta S_\infty) \end{aligned}$$

in $G_0(\mathbb{Z}G)$. Das Ergebnis ist offensichtlich unabhängig von allen getroffenen Wahlen.

Wir haben angekündigt, dass die definierten Invarianten von N/K eine Verallgemeinerung der Betrachtungen aus Kapitel 2 darstellen. Dies rechtfertigt nun der

Satz 3.2.6 *Ist N/K zahm verzweigt, dann gilt:*

$$\Omega(N/K, 2) = U_{N/K}.$$

Bemerkung: Man beachte, dass bei der Definition von $\Omega(N/K, 2)$ die Klassengruppe als Kern der Rangabbildung aufgefasst wurde. Bei dieser Sichtweise ist das Element $U_{N/K} \in \mathrm{Cl}(\mathbb{Z}G)$ gegeben durch $(\mathfrak{O}) - [K : \mathbb{Q}](\mathbb{Z}G)$.

Für den Beweis des Satzes vergleiche wieder [1] Th. 3.2.

Der Satz von Taylor 2.3.6 wirft nun die folgende Frage auf:

$$\text{Ist } \Omega(N/K, 2) = t(W_{N/K}) \text{ für alle } N/K\ ?$$

Bemerkung: Wir haben die Wurzelzahlklasse $t(W_{N/K})$ bislang nur für zahme Erweiterungen definiert. Da die Verträglichkeit der Wurzelzahl mit der Galoiswirkung im wilden Fall verloren geht (vgl. dazu [6]), muss man tatsächlich anders vorgehen: Ist E wie immer ein hinreichend großer Zahlkörper, galoissch über $\mathbb{Q}$ mit Gruppe Γ, so fixieren wir eine feste Einbettung $E \rightarrowtail \mathbb{C}$ und bezeichnen die zugehörige Primstelle mit $\wp_\infty$. Wir definieren dann $W_{N/K} \in \mathrm{Hom}_\Gamma(R(G), \mathcal{J}(E))$ auf irreduziblen Charakteren durch

$$(W_{N/K}(\chi))_{\wp} = \begin{cases} W(\chi^{\gamma^{-1}}) & \chi \text{ symplektisch und } \wp = \wp_\infty^\gamma \text{ unendlich} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$t(W_{N/K})$ bezeichnet dann die Klasse von $W_{N/K}$ in $\mathrm{Cl}(\mathbb{Z}G)$. Diese stimmt im zahmen Fall wegen $W(\chi) = \pm 1$ und $W(\chi^{\gamma^{-1}}) = W(\chi)$ mit der alten Definition überein.

Eine Vermutung von T. Chinburg lautet

Vermutung 3.2.7 (Wurzelzahl-Vermutung) $\Omega(N/K, 3) = t(W_{N/K})$ *für alle* N/K.

In Verbindung mit obiger Frage und der Identität 3.16 stellt sich außerdem die Frage:

Ist $\Omega(N/K, 1) = 1$ für alle N/K ?

In [2] untersucht T. Chinburg das funktorielle Verhalten von $\Omega(N/K) = \Omega(N/K, 3)$ und der Wurzelzahlklasse $t(W_{N/K})$. Wir wollen seine Ergebnisse, die obige Vermutungen unterstützen, in folgendem Satz zusammenfassen:

Satz 3.2.8 *Sei* H *eine Untergruppe von* G *und* M *der Fixkörper von* H*. Dann gilt:*

(i) $\mathrm{res}\,_H^G \Omega(N/K) = \Omega(N/M)$, $\mathrm{res}\,_H^G t(W_{N/K}) = t(W_{N/M})$.

(ii) Ist H *ein Normalteiler von* G *und* $\overline{G} = G/H$*, so gilt:*

$$\mathrm{defl}\,_{\overline{G}}^G \Omega(N/K) = \Omega(M/K),\ \mathrm{defl}\,_{\overline{G}}^G t(W_{N/K}) = t(W_{M/K}).$$

3.3 Die geliftete Wurzelzahl-Vermutung

Chinburgs Invariante $\Omega = \Omega(N/K, 3)$ definiert ein Element in der Klassengruppe $\mathrm{Cl}(\mathbb{Z}G)$, das wegen der Exaktheit der Sequenz

$$K_1(\mathbb{Z}G) \to K_1(\mathbb{Q}G) \xrightarrow{\partial} K_0T(\mathbb{Z}G) \to \mathrm{Cl}(\mathbb{Z}G) \to 0$$

ein Urbild in $K_0T(\mathbb{Z}G)$ besitzt. Ziel dieses Paragraphen ist es, solche Urbilder zu konstruieren und für diese eine geliftete Wurzelzahl-Vermutung zu formulieren, welche die Wurzelzahl-Vermutung 3.2.7 impliziert. Das Hochheben des Problems auf $K_0T(\mathbb{Z}G)$ bietet den Vorteil, dass wir wegen

$$K_0T(\mathbb{Z}G) \simeq \bigoplus_{p \nmid \infty} K_0T(\mathbb{Z}_pG)$$

lokalisieren können. Eine entsprechende Isomorphie für die Klassengruppe besteht nämlich nicht. Wir folgen den Ausführungen in [7].

Wir wählen eine Tate-Sequenz

$$0 \to U \to A \to B \to X \to 0$$

wie in 3.1.2 und einen $\mathbb{Z}G$-Monomorphismus $\phi : X \rightarrowtail U$. Solche Monomorphismen existieren, da die Dirichlet-Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \lambda : & U & \to & \mathbb{R}X \\ & u & \mapsto & -\sum_{\mathfrak{P}\in S} \log |u|_{\mathfrak{P}}\mathfrak{P} \end{array} \tag{3.17}$$

einen $\mathbb{R}G$-Ismomorphismus $\mathbb{R}U \simeq \mathbb{R}X$ liefert und damit nach dem Satz von Noether-Deuring ein $\mathbb{Q}G$-Ismomorphismus $\mathbb{Q}U \simeq \mathbb{Q}X$ existiert. Das Minuszeichen in der Definition von λ ist nicht üblich, wir werden aber später die Abbildung λ in dieser Form verwenden.

Wir spalten die Tate-Sequenz in zwei Teile auf:

$$0 \to U \to A \to L \to 0,\ 0 \to L \to B \to X \to 0$$

mit einem $\mathbb{Z}G$-Gitter L. Wir wählen zwei Monomorphismen $\alpha, \beta : L \rightarrowtail L$, die über einen projektiven $\mathbb{Z}G$-Modul faktorisieren und nennen α und β homotop zu 0 [3]. Eine geeignete Wahl für α und β ist z.B. $|G|1_L$. Wegen $\mathrm{Ext}^1_G(U, \alpha) = 0$ und $\mathrm{Ext}^1_G(\beta, X) = 0$ liefert der pull-back entlang α

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & U & \to & L \oplus U & \to & L & \to & 0 \\ & & || & & \tilde{\alpha}\downarrow & & \alpha\downarrow & & \\ 0 & \to & U & \to & A & \to & L & \to & 0 \end{array}$$

und das push-out entlang β

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & L & \to & B & \to & X & \to & 0 \\ & & \beta\downarrow & & \tilde{\beta}\downarrow & & || & & \\ 0 & \to & L & \to & L \oplus X & \to & X & \to & 0. \end{array}$$

Nach dem Schlangenlemma sind mit α und β auch $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ injektiv mit endlichem Kokern. Infolgedessen trifft dies auch auf die zusammengesetzte Abbildung

$$\tilde{\phi} : B \xrightarrow{\tilde{\beta}} L \oplus X \xrightarrow{1_L \oplus \phi} L \oplus U \xrightarrow{\tilde{\alpha}} A$$

zu, und der Kokern von $\tilde{\phi}$ definiert eine Element $(\mathrm{cok}\,\tilde{\phi}) \in K_0T(\mathbb{Z}G)$. Der Endomorphismus $\alpha\beta$ induziert einen Automorphismus auf $\mathbb{Q}L$ und somit ein Element $[\mathbb{Q}L, \alpha\beta] \in K_1(\mathbb{Q}G)$. Wir definieren

$$\Omega_\phi = (\mathrm{cok}\,\tilde{\phi}) - \partial[\mathbb{Q}L, \alpha\beta] \in K_0T(\mathbb{Z}G). \tag{3.18}$$

[3] Allgemeiner heißt jeder $\mathbb{Z}G$-Homomorphismus $f : L_1 \to L_2$, der über einen projektiven $\mathbb{Z}G$-Modul faktorisiert, homotop zu 0.

Satz 3.3.1 *Sei N/K eine endliche galoissche Erweiterung algebraischer Zahlkörper mit Gruppe G, S eine hinreichend große Stellenmenge von N und $\phi : X \to U$ ein $\mathbb{Z}G$-Monomorphismus. Dann definieren diese Daten ein eindeutiges Element $\Omega_\phi \in K_0T(\mathbb{Z}G)$.*

Insbesondere ist Ω_ϕ also unabhängig von den Wahlen von α, β, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ und der Wahl der Tate-Sequenz. Für den Beweis vergleiche [7] Lemma 1 und 2.

Ω_ϕ ist für jedes ϕ offensichtlich ein Urbild von Chinburgs Ω. Um ein Gefühl für Ω_ϕ zu bekommen, müssen wir sein Verhalten studieren, wenn wir die Daten aus Satz 3.3.1 ändern.

Satz 3.3.2 *(i) Sind $\phi, \phi' : X \to U$ zwei $\mathbb{Z}G$-Monomorphismen, so ist*

$$\Omega_{\phi'} - \Omega_\phi = \partial[\mathbb{Q}X, \gamma],$$

wobei $\gamma : \mathbb{Q}X \to \mathbb{Q}X$ ein $\mathbb{Q}G$-Automorphismus ist mit $(\mathbb{Q}\phi)\gamma = \mathbb{Q}\phi'$.

(ii) Sei $\mathfrak{P} \notin S$, $S' = S \cup G\mathfrak{P}$, $X' = \Delta S'$ und U' die S'-Einheiten von N. Sind dann $\phi : X \to U$ und $\phi' : X' \to U'$ zwei $\mathbb{Z}G$-Monomorphismen, so dass

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & X & \to & X' & \to & \mathbb{Z}[S' \setminus S] & \to & 0 \\ & & \phi \downarrow & & \phi' \downarrow & & n \downarrow & & \\ 0 & \to & U & \to & U' & \to & \mathbb{Z}[S' \setminus S] & \to & 0 \end{array}$$

mit einem $n \in \mathbb{Z}$ kommutiert, so gilt

$$\Omega_{\phi'} - \Omega_\phi = \partial[\mathbb{Q}G, \eta] + 2\partial[\operatorname{ind}{}^G_{G_\mathfrak{P}}\mathbb{Q}, |G|],$$

wobei $G_\mathfrak{P}$ wieder die Zerlegungsgruppe zu $\mathfrak{P}$ bezeichne und der $\mathbb{Q}G$-Automorphismus η definiert ist durch

$$\eta(1) = |G_\mathfrak{P}|^{-2}(|G_\mathfrak{P}| - \sigma_{G_\mathfrak{P}}) \sum_{i=0}^{|G_\mathfrak{P}|-1} i\phi_\mathfrak{P}^i + n|G|^{-2}\sigma_{G_\mathfrak{P}}.$$

Dabei ist $\phi_\mathfrak{P}$ der Frobenius-Automorphismus, der die Gruppe $G_\mathfrak{P}$ erzeugt, und $\sigma_{G_\mathfrak{P}} = \sum_{g \in G_\mathfrak{P}} g$.

(iii) Ist H ein Untergruppe von G, dann gilt:

$$\operatorname{res}{}^G_H \Omega_\phi = \Omega_{\operatorname{res}{}^G_H \phi}$$

(iv) Ist H ein Normalteiler von G, N' der Fixkörper von H, $\overline{S}$ die Menge aller Primstellen von N' unter S, $\overline{X} = \Delta\overline{S}$ und $\overline{U}$ die $\overline{S}$-Einheiten von N', dann existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & X_H & \xrightarrow{\simeq} & \overline{X} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi^H \sigma_H & & \downarrow \overline{\phi} \\ U & \xrightarrow{\sigma_H} & U^H & \xrightarrow{=} & \overline{U} \end{array}$$

mit einem $\mathbb{Z}[G/H]$-Monomorphismus $\overline{\phi}$ und es gilt

$$\operatorname{defl}\Omega_\phi = \Omega_{\overline{\phi}}.$$

Für die Beweise vergleiche [7] Prop. 1 bis 4.

Bemerkungen:

- Ist in (i) ψ ein $\mathbb{Q}G$-Automorphismus von $\mathbb{Q}U$ mit $\psi(\mathbb{Q}\phi) = \mathbb{Q}\phi'$, dann gilt: $\Omega_{\phi'} - \Omega_\phi = \partial[\mathbb{Q}U, \psi]$.
- Die Abbildung $U' \to \mathbb{Z}[S' \setminus S]$ in (ii) ist gegeben durch

  $$u \mapsto \sum_{\mathfrak{P} \in S' \setminus S} v_{\mathfrak{P}}(u)\mathfrak{P},$$

  wobei $v_{\mathfrak{P}}$ die $\mathfrak{P}$-Bewertung bezeichne.
- Ist in (ii) ϕ homotop zu 0 und n ein Vielfaches von $|G|$, so existiert ϕ'. Denn dann ist sowohl das push-out der oberen Erweiterung entlang ϕ als auch der pull-back der unteren Erweiterung entlang n isomorph zu $U \oplus \operatorname{ind}_{G_{\mathfrak{P}}}^G \mathbb{Z}$ und ϕ' ergibt sich als die Komposition der beiden dabei entstehenden Abbildungen.
- Damit $\Omega_{\overline{\phi}}$ in (iv) überhaupt definiert ist, muss man zusätzlich annehmen, dass auch $\overline{S}$ hinreichend groß ist, also insbesondere die $\overline{S}$-Klassengruppe der Erweiterung N'/K trivial ist. Dies ist nach 3.10 genau dann der Fall, wenn $H^1(H, U) = 1$ bzw. $H^{-1}(H, X) = 1$.
- Nach der letzten Bemerkung ist die Abbildung $\sigma_H : X_H \to X^H$ injektiv und somit auch $\phi^H \sigma_H$ und $\overline{\phi}$.
- Mit den Bezeichnungen aus (iv) ist die Abbildung $\sigma_H : (\mathbb{Z}S)_H \to (\mathbb{Z}S)^H$ wegen $H^{-1}(H, \mathbb{Z}S) = 1$ injektiv, also $\operatorname{rk}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}S)_H = \operatorname{rk}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}S)^H = \operatorname{rk}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}\overline{S}$. Deshalb ist die kanonische Surjektion $(\mathbb{Z}S)_H \twoheadrightarrow \mathbb{Z}\overline{S}$ sogar ein Isomorphismus, der den Isomorphismus $X_H \simeq \overline{X}$ des Diagramms induziert.

Wir wollen diese Resultate noch in die Hom-Sprache übersetzen und erinnern dazu an den Isomorphismus

$$K_0T(\mathbb{Z}G) \simeq \operatorname{Hom}_\Gamma^+(R(G), \mathcal{J}(E))/\operatorname{Det}\mathcal{U}(\mathbb{Z}G),$$

wobei $E/\mathbb{Q}$ eine endliche galoissche Erweiterung mit Gruppe Γ ist, so dass jede Darstellung von G über E realisiert werden kann.

Satz 3.3.3 *(i) Seien $\phi, \phi' : X \to U$ zwei $\mathbb{Z}G$-Monomorphismen und γ wie in Satz 3.3.2 (i). Für einen Charakter χ von G bezeichne V_χ einen EG-Modul, der χ realisiert. Dann ist der Homomorphismus*

$$\chi \mapsto \det(\gamma | \operatorname{Hom}_{EG}(V_\chi, EX))$$

ein darstellendes Element für $\Omega_{\phi'} - \Omega_\phi$.

(ii) Sei $\mathfrak{P} \notin S$ und $S' = S \cup G\mathfrak{P}$, dann gilt in der Situation und mit den Bezeichnungen von Satz 3.3.2 (ii):

$$\chi \mapsto (n|G_{\mathfrak{P}}|)^{\dim V_\chi^{G_{\mathfrak{P}}}} \det(\phi_{\mathfrak{P}} - 1|V_\chi/V_\chi^{G_{\mathfrak{P}}})^{-1}$$

ist ein darstellender Homomorphismus für $\Omega_{\phi'} - \Omega_\phi$, falls $n \neq 0$.

(iii) Sei $f : R(G) \to \mathcal{J}(E)$ ein darstellender Homomorphismus für Ω_ϕ und H eine Untergruppe von G. Dann ist

$$\begin{array}{ccc} R(H) & \to & \mathcal{J}(E) \\ \psi & \mapsto & f(\operatorname{ind}_H^G \psi) \end{array}$$

ein darstellendes Element für $\Omega_{\operatorname{res}_H^G \phi}$.

(iv) Sei $f : R(G) \to \mathcal{J}(E)$ ein darstellender Homomorphismus für Ω_ϕ, H ein Normalteiler von G und $\overline{G} = G/H$. Seien ϕ und $\overline{\phi}$ wie in Satz 3.3.2 (iv). Dann ist

$$\begin{array}{ccc} R(\overline{G}) & \to & \mathcal{J}(E) \\ \psi & \mapsto & f(\operatorname{infl}_{\overline{G}}^G \psi) \end{array}$$

ein darstellendes Element für $\Omega_{\overline{\phi}}$.

(i) folgt aus Satz 3.3.2 (i) und dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} K_1(\mathbb{Q}G) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\mathrm{Det}"'] & K_0T(\mathbb{Z}G) \arrow[d, "\simeq"] \\ \mathrm{Hom}_\Gamma^+(R(G), E^\times) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Gamma^+(R(G), \mathcal{J}(E))/\mathrm{Det}\,\mathcal{U}(\mathbb{Z}G) \end{tikzcd}$$

mit $\mathrm{Det}\,([M,g]) : \chi \mapsto \det(g|\operatorname{Hom}_{EG}(V_\chi, EM))$.
Für (ii) vergleiche [7] Th. 2 (b). (iii) und (iv) folgen direkt aus Satz 3.3.2 (iii) und (iv) und dem Verhalten der Hom-Gruppen unter Restriktion und Deflation.

Auf der Suche nach einem darstellenden Homomorphismus für Ω_ϕ kommt der vielversprechendste Kandidat aus der Starkschen Vermutung. Sei dazu λ die Dirichlet-Abbildung aus 3.17 und $\phi : X \to U$ ein $\mathbb{Z}G$-Monomorphismus, dann heißt

$$R_\phi : \chi \mapsto \det(\lambda\phi|\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(\check{V}_\chi, \mathbb{C}X))$$

der *Stark-Tate-Regulator*. Ist nun

$$L_S(N/K, \chi, s) = \prod_{\mathfrak{p} \notin S_K} \det(1 - \phi_{\mathfrak{P}} N(\mathfrak{p})^{-s}; V_\chi^{I_{\mathfrak{P}}})^{-1}$$

die Artinsche L-Funktion ohne die Eulerfaktoren an den Stellen $\mathfrak{p} \in S_K$ unterhalb S und $c_S(\chi)$ der führende Koeffizient der Taylorentwicklung in $s = 0$ von $L_S(N/K, \chi, s)$, dann definieren wir

$$\begin{array}{rrcl} A_\phi : & R(G) & \to & \mathbb{C}^\times \\ & \chi & \mapsto & R_\phi(\chi)/c_S(\chi). \end{array}$$

Der Homomorphismus A_ϕ hat analoge Eigenschaften wie Ω_ϕ in Satz 3.3.2 (vgl. z.B. [18] Prop. 8 und Lemma 13/14, wenn man beachtet, dass unsere Dirichlet-Abbildung mit einem Minuszeichen versehen wurde). Allerdings sind die Werte von A_ϕ an irreduziblen symplektischen Charakteren nicht notwendig reell positiv. Bezeichnet aber $W(\chi) = W(N/K, \chi)$ die Artinsche Wurzelzahl, so gilt (vgl. [18], Prop.7)

Proposition 3.3.4 *Ist χ irreduzibel und symplektisch, so gilt:*

$$A_\phi(\chi)W(\chi) \in \mathbb{R}^+.$$

Bemerkung: In dieser Proposition haben wir implizit ein feste Einbettung $E \rightarrowtail \mathbb{C}$ gewählt.

Beweisskizze. Wir skizzieren zunächst:

Lemma 3.3.5 *Für reell-wertige $\chi \in R(G)$ ist $c_S(\chi) \in \mathbb{R}$ und*

$$c_S(\chi)/(-1)^{\langle \chi, 1_G \rangle} W(\chi) > 0.$$

Sei dazu zunächst $S = S_\infty$. Aus der Funktionalgleichung 2.2.2 erhalten wir $\overline{c(\chi)} = c(\overline{\chi})$, also $c(\chi) \in \mathbb{R}$ für reell-wertiges χ. Nach dem Brauerschen Satz besitzt die Artinsche L-Funktion $L(N/K, \chi, s)$ für beliebiges $\chi \in R(G)$ bei $s = 1$ einen Pol der Ordnung $\langle \chi, 1_G \rangle$ und für reell-wertiges χ ist

$$\lim_{s \to 1} \frac{L(N/K, \chi, s)}{(s-1)^{\langle \chi, 1_G \rangle}} \in \mathbb{R}^+. \tag{3.19}$$

Dies folgt aus einer Betrachtung der Eigenwerte des Frobenius-Automorphimus $\phi_{\mathfrak{P}}$ auf $V_\chi^{I_{\mathfrak{P}}}$ (vgl. [18] Lemma 11). Schreiben wir nun die Funktionalgleichung als

$$\frac{\Lambda(N/K, \chi, s)}{s^{\langle \chi, 1_G \rangle}} = (-1)^{\langle \chi, 1_G \rangle} W(\chi) \frac{\Lambda(N/K, \chi, 1-s)}{((1-s)-1)^{\langle \chi, 1_G \rangle}},$$

so folgt Lemma 3.3.5 aus 3.19, wenn man beachtet, dass die unendlichen Gamma-Faktoren der vollständigen Artinschen L-Reihe $\Lambda(N/K, \chi, 1-s)$ an der Stelle $s = 0$ positive Werte annehmen. Für beliebiges S folgt Lemma 3.3.5 nun mit Induktion nach der Anzahl $|S \setminus S_\infty|$ (vgl. [18] Prop. 6). □

Für χ irreduzibel und symplektisch folgt also insbesondere $c_S(\chi)/W(\chi) > 0$ und es genügt zu zeigen, dass $R_\phi(\chi)$ reell und positiv ist. Da χ symplektisch ist, gibt es einen einfachen $\mathbb{R}G$-Modul M, der 2χ realisiert, und eine natürliche

Zahl n mit $M \simeq M_n(\mathbb{H})$, wobei $\mathbb{H}$ wie üblich den Quaternionenschiefkörper bezeichne. Ist andererseits $V = V_\chi$ der zu χ gehörende einfache $\mathbb{C}G$-Modul, so gilt $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} M \simeq V \oplus V$. Ist nun $m = \langle \mathbb{R}X, M \rangle$, so folgt wegen $V \simeq \check{V}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\check{V}, \mathbb{C}X) \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{C}G}(V)^{2m} \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{End}_{\mathbb{R}G}(M)^m.$$

Da $\lambda\phi$ bereits einen Automorphismus auf $\mathbb{R}X$ induziert, ergibt sich der Stark-Tate-Regulator $R_\phi(\chi)$ als die reduzierte Norm eines Elements in $\mathrm{End}_{\mathbb{R}G}(M)^m$ und ist damit wegen $\mathrm{nrd}(\mathrm{End}_{\mathbb{R}G}(M)) = \mathrm{nrd}(\mathbb{H}) = \mathbb{R}^+$ reell und positiv. $\square$

Schließlich benötigen wir noch die Galoisverträglichkeit von A_ϕ. Dies besagt die

Vermutung 3.3.6 (Stark) $A_\phi \in \mathrm{Hom}_\Gamma(R(G), E^\times)$.

Wir werden im Folgenden auf diese Vermutung mit (SV) verweisen. Bewiesen ist sie bislang z.B. im Fall rationalwertiger Charaktere in [14]. Gilt (SV), so ist nach Proposition 3.3.4 die Funktion $\chi \mapsto A_\phi(\chi)t(W_{N/K})(\chi)$ in $\mathrm{Hom}^+_\Gamma(R(G), \mathcal{J}(E))$.

Vermutung 3.3.7 (Geliftete Wurzelzahl-Vermutung) *Die Abbildung*

$$\chi \mapsto A_\phi(\overline{\chi})t(W_{N/K})(\overline{\chi})$$

ist ein darstellendes Element von Ω_ϕ in $K_0T(\mathbb{Z}G)$.

Bemerkung: Gilt (SV), so ist wegen $A_\phi \in \mathrm{Hom}_\Gamma(R(G), E^\times)$ das Bild dieser Abbildung in $\mathrm{Cl}(\mathbb{Z}G)$ tatsächlich die Wurzelzahlklasse $t(W_{N/K})$.

Definition 3.3.8 *Sei $\omega = \omega_\phi \in K_0T(\mathbb{Z}G)$ das eindeutige Element, so dass $\chi \mapsto A_\phi(\overline{\chi})t(W_{N/K})(\overline{\chi})$ ein darstellender Homomorphismus für $\Omega_\phi + \omega_\phi$ ist.*

Dann gilt (vgl. [7] Th. 2'):

Proposition 3.3.9 *ω ist unabhängig von der Wahl von $\phi : X \to U$ und der Stellenmenge S.*

Dies ist ein weiterer Beleg dafür, dass sich der darstellende Homomorphismus $\chi \mapsto A_\phi(\overline{\chi})t(W_{N/K})(\overline{\chi})$ analog zu Ω_ϕ verhält.

Über den Isomorphismus

$$K_0T(\mathbb{Z}G) \simeq \bigoplus_{p \nmid \infty} K_0T(\mathbb{Z}_pG)$$

zerlegt sich Ω_ϕ in seine p-Komponenten $\Omega_\phi^{(p)}$. Wählen wir nun eine Einbettung $j : E \rightarrowtail E_{\mathfrak{P}}$ für ein $p \mid \mathfrak{P}$ und definieren $A_\phi^{(p)} \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_{\mathfrak{P}}}(R_p(G), E_{\mathfrak{P}}^\times)$ durch

$$A_\phi^{(p)}(\chi) = j(A_\phi(j^{-1}(\chi))),$$

dann können wir die Vermutung 3.3.7 lokal formulieren als

Vermutung 3.3.10 *Die Abbildung $\chi \mapsto A_\phi^{(p)}(\overline{\chi})$ ist ein darstellendes Element von $\Omega_\phi^{(p)}$ in $K_0T(\mathbb{Z}_pG)$.*

3.4 Zusammenhang mit der Iwasawa-Theorie

Wir wollen in diesem Paragraphen den Zusammenhang der gelifteten Wurzelzahl-Vermutung in ihrer lokalen Form 3.3.10 mit der Iwasawa-Theorie herstellen und folgen im Wesentlichen den Ausführungen in [10]. Wir fixieren dazu eine rationale Primzahl $p \neq 2$ und eine galoissche Erweiterung N/K mit Gruppe G. Wir setzen zusätzlich voraus, dass der Zahlkörper N total reell ist und die Leopoldt-Vermutung erfüllt. Diese besagt das Folgende:

Vermutung 3.4.1 (Leopoldt) *Die von der Inklusion $N^\times \rightarrowtail \prod_{\mathfrak{P}|p} N_{\mathfrak{P}}^\times$ induzierte Abbildung*

$$\mathbb{Z}_p \otimes \mathfrak{O}^\times \to \prod_{\mathfrak{P}|p} U_{\mathfrak{P}}^1$$

ist injektiv [4].

Bemerkung: Dies ist z.B. der Fall, wenn $N/\mathbb{Q}$ abelsch ist (vgl. [17], S.77).

Die endliche Stellenmenge $S = S_N$ sei wieder hinreichend groß und enthalte alle Primstellen $\mathfrak{P}$ von N, die über p liegen. Wir übernehmen aus der zweiten Konstruktion der Tate-Sequenz das Diagramm 3.6, fügen die Kerne hinzu und erhalten

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d, tail] & A \arrow[r] \arrow[d, tail] & L \arrow[r] \arrow[d, tail] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{J} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & V_0 \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \Delta_0 \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{C}_N \arrow[r] & \mathfrak{V} \arrow[r] & \Delta G \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd} \tag{3.20}$$

wobei wir die Bezeichnungen wie im Beweis zu Satz 3.1.2 gewählt haben.

Wir wollen das Diagramm nach p komplettieren und bezeichnen dazu mit $\mathfrak{L}$ den Funktor

$$\mathfrak{L}(X) = \lim_{\overleftarrow{n}} X/p^n X$$

für alle $\mathbb{Z}G$-Moduln X. Für endlich erzeugte Moduln X gilt offensichtlich $\mathfrak{L}(X) = \mathbb{Z}_p \otimes X$ und wir erhalten nach Lemma 2.1 und 2.2 in [10] das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_p \otimes U \arrow[r] \arrow[d, tail] & \mathbb{Z}_p \otimes A \arrow[r] \arrow[d, tail] & \mathbb{Z}_p \otimes L \arrow[r] \arrow[d, tail] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{L}(\mathcal{J}) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathfrak{L}(V_0) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathbb{Z}_p \otimes \Delta_0 \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{L}(\mathcal{C}_N) \arrow[r] & \mathfrak{L}(\mathfrak{V}) \arrow[r] & \mathbb{Z}_p \otimes \Delta G \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{3.21}$$

Lemma 3.4.2 *Sei $N^{\mathrm{ab},p}$ die maximal abelsche p-Erweiterung von N. Dann gilt:*

$$\mathfrak{L}(\mathcal{C}_N) = \mathrm{Gal}(N^{\mathrm{ab},p}/N).$$

[4] Zur Erinnerung: $\mathfrak{O}$ bezeichnet die ganzen Zahlen von N und $U_{\mathfrak{P}}^1 = 1 + \mathfrak{P}$ die Einseinheiten erster Stufe. Man beachte, dass für $\mathfrak{P} \mid p$ gilt: $p \nmid [\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}^\times : U_{\mathfrak{P}}^1]$

Beweis. Sei N^{ab} die maximal abelsche Erweiterung von N. Das universelle Normrestsymbol liefert einen stetigen surjektiven Homomorphismus $\mathcal{C}_N \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(N^{\mathrm{ab}}/N)$ mit dem Kern D_N aller unendlich dividierbaren Elemente von $\mathcal{C}_N$ (vgl. [9], Satz 7.12, S. 280). Wir erhalten somit für alle $n \in \mathbb{N}$ Isomorphismen $\mathcal{C}_N/\mathcal{C}_N^{p^n} \simeq \mathrm{Gal}(N^{\mathrm{ab}}/N)/\mathrm{Gal}(N^{\mathrm{ab}}/N)^{p^n}$ und damit die Behauptung, weil $\mathrm{Gal}(N^{\mathrm{ab},p}/N)$ gerade die maximale pro-p-Faktorgruppe von $\mathrm{Gal}(N^{\mathrm{ab}}/N)$ ist. $\square$

Sei $M = M_S$ die maximal abelsche außerhalb S unverzweigte p-Erweiterung von N. Die kanonische Surjektion $\mathcal{J} \twoheadrightarrow \mathcal{C}_N \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(N^{\mathrm{ab}}/N)$ induziert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker\pi_1 \arrow[r] \arrow[d, hook] & \prod_{\mathfrak{P}\notin S}\mathfrak{L}(\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}^\times) \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, hook] & \mathrm{Gal}(N^{\mathrm{ab},p}/M) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_p\otimes U \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{L}(\mathcal{J}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Gal}(N^{\mathrm{ab},p}/N) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker\pi_2 \arrow[r] & \prod_{\mathfrak{P}\in S}\mathfrak{L}(N_{\mathfrak{P}}^\times) \arrow[r, "\pi_2"] & \mathrm{Gal}(M/N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{3.22}$$

Die Abbildung π_1 ist surjektiv, da die lokale Reziprozitäts-Abbildung $U_{\mathfrak{P}}$ auf die Trägheitsgruppe $I_{\mathfrak{P}}$ abbildet. Die Surjektivität von π_2 folgt dann aus dem Schlangenlemma. Man beachte, dass die mittlere Zeile aus Diagramm 3.21 übernommen wurde.

Über die Bewertungen $v_{\mathfrak{P}}$ für $\mathfrak{P} \in S \setminus S_\infty$ erhält man eine exakte Sequenz

$$0 \to \prod_{\mathfrak{P}\in S}\mathfrak{L}(\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}^\times) \to \prod_{\mathfrak{P}\in S}\mathfrak{L}(N_{\mathfrak{P}}^\times) \to \prod_{\mathfrak{P}\in S\setminus S_\infty}\mathbb{Z}_p \to 0.$$

Wegen $\mathfrak{L}(\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}^\times) = U_{\mathfrak{P}}^1$ für alle $\mathfrak{P} \mid p$ erhalten wir mit $\mathbb{Z}_p \otimes \mathfrak{O}^\times \to \prod_{\mathfrak{P}\in S}\mathfrak{L}(\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}^\times)$ eine injektive Abbildung, da N die Leopoldt-Vermutung erfüllt. Wir fügen dies zu dem folgenden kommutativen Diagramm zusammen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_p\otimes\mathfrak{O}^\times \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathbb{Z}_p\otimes U \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}_p\otimes U/\mathfrak{O}^\times \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \prod_{\mathfrak{P}\in S}\mathfrak{L}(\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}^\times) \arrow[r] & \prod_{\mathfrak{P}\in S}\mathfrak{L}(N_{\mathfrak{P}}^\times) \arrow[r] & \prod_{\mathfrak{P}\in S\setminus S_\infty}\mathbb{Z}_p \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Der rechte senkrechte Pfeil wir dabei ebenfalls von den Bewertungen $v_{\mathfrak{P}}$ induziert und ist injektiv. Somit ist auch der mittlere Pfeil injektiv, und es folgt mit Diagramm 3.22 das

Lemma 3.4.3 *Die Komposition*

$$\mathbb{Z}_p \otimes U \to \mathfrak{L}(\mathcal{J}) \to \prod_{\mathfrak{P}\in S}\mathfrak{L}(N_{\mathfrak{P}}^\times)$$

der Abbildungen aus Diagramm 3.22 ist eine Injektion mit Kokern $\mathrm{Gal}(M/N)$.

Wir erinnern an die Definition $V_0 = (\bigoplus_{\mathfrak{P}\in S_0} \operatorname{ind}_{G_\mathfrak{P}}^G V_\mathfrak{P}) \oplus \prod_{\mathfrak{P}\notin S} \mathfrak{O}_\mathfrak{P}^\times$ und erhalten das Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_p \otimes U \arrow[r] \arrow[d, tail] & \mathbb{Z}_p \otimes A \arrow[r] \arrow[d, tail] & \mathbb{Z}_p \otimes L \arrow[r] \arrow[d, tail] & 0 \\
0 \arrow[r] & \prod_{\mathfrak{P}\in S} \mathfrak{L}(N_\mathfrak{P}^\times) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \prod_{\mathfrak{P}\in S} \mathfrak{L}(V_\mathfrak{P}) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathbb{Z}_p \otimes \Delta_0 \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Gal}(M/N) \arrow[r] & Y \arrow[r] & \mathbb{Z}_p \otimes \Delta G \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\tag{3.23}
$$

mit einem $\mathbb{Z}_pG$-Modul Y. Dieser hat nach Lemma 2.4 in [10] endliche projektive Dimension über $\mathbb{Z}_pG$.

Wir können dieses Diagramm noch vergrößern zu

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_p \otimes U \arrow[r] \arrow[d, tail] & \mathbb{Z}_p \otimes A \arrow[r] \arrow[d, tail] & \mathbb{Z}_p \otimes B \arrow[r] \arrow[d, tail] & \mathbb{Z}_p \otimes \Delta S \arrow[r] \arrow[d, tail] & 0 \\
0 \arrow[r] & \prod_{\mathfrak{P}\in S} \mathfrak{L}(N_\mathfrak{P}^\times) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \prod_{\mathfrak{P}\in S} \mathfrak{L}(V_\mathfrak{P}) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & (\mathbb{Z}_pG)^m \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathbb{Z}_pS \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Gal}(M/N) \arrow[r] & Y \arrow[r] & \mathbb{Z}_pG \arrow[r] & \mathbb{Z}_p \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\tag{3.24}
$$

mit $m = |S_0|$. Die Moduln der zweiten und dritten Spalte haben alle endliche projektive Dimension über $\mathbb{Z}_pG$ und die der dritten Spalte sind zudem torsionsfrei über $\mathbb{Z}_p$. Es lohnt ein Vergleich mit Chinburgs Diagramm 3.15.

Lemma 3.4.4 *(i)* $\prod_{\mathfrak{P}\in S} \mathfrak{L}(N_\mathfrak{P}^\times)$ *und* $\mathbb{Z}_pS$ *besitzen den gleichen Rang über* $\mathbb{Z}_p$.

(ii) $\mathrm{Gal}(M/N)$ *besitzt den* $\mathbb{Z}_p$*-Rang* 1.

Für den Beweis vergleiche [10] Lemma 2.5.

Wir gehen im Folgenden von der Existenz eines G-verträglichen Monomorphismus $\phi : \mathbb{Z}S \rightarrowtail \prod_{\mathfrak{P}\in S} N_\mathfrak{P}^\times$ aus, dessen Einschränkung auf ΔS in den S-Einheiten U landet. Dieser induziert eine Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathrm{Gal}(M/N)$, indem wir für $z \in \mathbb{Z}$ ein Urbild der Augmentation in $\mathbb{Z}S$ wählen, dieses mit ϕ nach $\prod_{\mathfrak{P}\in S} N_\mathfrak{P}^\times$ abbilden und darauf noch die Abbildungen $\prod_{\mathfrak{P}\in S} N_\mathfrak{P}^\times \to \prod_{\mathfrak{P}\in S} \mathfrak{L}(N_\mathfrak{P}^\times) \to \mathrm{Gal}(M/N)$ folgen lassen. Das ergibt eine wohldefinierte Abbildung, die wir ebenfalls als injektiv annehmen wollen. Komplettieren liefert somit ein Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_p \otimes \Delta S \arrow[r, tail, "\phi_p"] \arrow[d, tail] & \mathbb{Z}_p \otimes U \arrow[d, tail] \\
\mathbb{Z}_pS \arrow[r, tail, "\phi_\mathfrak{L}"] \arrow[d, two heads] & \prod_{\mathfrak{P}\in S} \mathfrak{L}(N_\mathfrak{P}^\times) \arrow[d, two heads] \\
\mathbb{Z}_p \arrow[r, tail, "\Phi"] & \mathrm{Gal}(M/N)
\end{tikzcd}
\tag{3.25}
$$

Wir können nun analog zur Konstruktion von Ω_ϕ in 3.18 eine geliftete Ω-Konstruktion durchführen und erhalten Elemente Ω_{ϕ_p}, $\Omega_{\phi_\mathfrak{L}}$ und Ω_Φ in $K_0T(\mathbb{Z}_pG)$. Es gilt die Relation

Satz 3.4.5 $\Omega_{\phi}^{(p)} = \Omega_{\phi_p} = \Omega_{\phi_{\mathfrak{L}}} - \Omega_{\Phi}$.

Dies folgt im Wesentlichen aus Diagramm 3.24, für Details vgl. [10] Th. A. Man vergleiche dieses Resultat auch mit der Relation 3.16.

Um Iwasawa-Theorie ins Spiel zu bringen, betrachten wir nun die folgende Situation: Zu der galoisschen Erweiterung N/K bezeichnen wir mit $K = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_n \subset \ldots \subset K_\infty$ die zyklotomische Erweiterung von K und mit $N = N_0 \subset \ldots \subset N_n \subset \ldots \subset N_\infty$ diejenige von N. Mit N sind dann auch alle N_n total reell, und wir setzen voraus, dass die N_n alle der Leopoldt-Vermutung genügen. M_n sei jeweils die maximal abelsche p-Erweiterung von N_n, die außerhalb aller Primstellen von N_n oberhalb S unverzweigt ist. Weiter setzen wir für $0 \leq n \leq \infty$:

$$G_n = \mathrm{Gal}(N_n/K),\ X_n = \mathrm{Gal}(M_n/N_n).$$

Die Galoisgruppen der $\mathbb{Z}_p$-Erweiterungen K_∞/K und N_∞/N bezeichnen wir schließlich mit Γ_K bzw. Γ_N und wählen topologische Erzeuger γ_K und γ_N dieser Galoisgruppen.

Der komplettierte Gruppenring $\mathbb{Z}_p[[\Gamma_N]]$ ist ein vollständiger regulärer lokaler noetherscher Ring, $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$ ist endlich erzeugt über $\mathbb{Z}_p[[\Gamma_N]]$ und sogar eine $\mathbb{Z}_p[[\Gamma_N]]$-Algebra, da Γ_N zentral in G_∞ liegt (vgl. [10], S. 29).

Wir erhalten nun auf jeder Stufe eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to X_n \to Y_n \to \mathbb{Z}_p \otimes \Delta G_n \to 0$$

wie in 3.23. Diese hängen über Diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & X_{n+1} & \to & Y_{n+1} & \to & \mathbb{Z}_p \otimes \Delta G_{n+1} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & X_n & \to & Y_n & \to & \mathbb{Z}_p \otimes \Delta G_n & \to & 0 \end{array}$$

zusammen, wobei die beiden äußeren Pfeile die kanonischen Abbildungen sind (vgl. [10], S. 30).

Der Übergang zum Limes liefert eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to X_\infty \to Y_\infty \to \Delta G_\infty \to 0, \qquad (3.26)$$

wobei ΔG_∞ das Augmentationsideal des komplettierten Gruppenrings $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$ bezeichnet. Y_∞ ist ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$-Modul von endlicher projektiver Dimension:

$$\mathrm{pd}_{\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]} Y_\infty \leq 1.$$

Für die Beweise verweisen wir wieder auf [10] Prop. 4.2.

$C \subset \mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$ sei die multiplikativ abgeschlossene Menge aller zentralen regulären [5] Elemente von $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$ und $\mathcal{Q}(\mathbb{Z}_p[[G_\infty]])$ der totale Quotientenring von $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$ bezüglich C. Wir erhalten eine Lokalisierungs-Sequenz

$$\begin{aligned} K_1(\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]) \to K_1(\mathcal{Q}(\mathbb{Z}_p[[G_\infty]])) \xrightarrow{\partial} K_0T(\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]) \to K_0(\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]) \to \\ \to K_0(\mathcal{Q}(\mathbb{Z}_p[[G_\infty]])). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Dabei bezeichnet $K_0T(\mathbb{Z}_p[[G_\infty]])$ die Grothendieck-Gruppe aller endlich erzeugten $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$-Torsionsmoduln [6] von endlicher projektiver Dimension. Der Modul X_∞ ist im Allgemeinen kein solcher Modul, so dass wir stattdessen den Modul Y_∞ untersuchen und mit Hilfe von Y_∞ ein Element $\mho \in K_0T(\mathbb{Z}_p[[G_\infty]])$ definieren wollen. Da Y_∞ selbst kein Torsionsmodul ist, wie aus der Sequenz 3.26 folgt, müssen wir dafür nochmals einen Ersatz finden.

Sei dazu $H = \mathrm{Gal}(N_\infty/K_\infty)$, $e = \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H} h$ und $\tilde{\gamma}_K \in G_\infty$ eine Hochhebung von γ_K. Wir wählen ein $c_\infty \in \mathcal{Q}(\mathbb{Z}_p[[G_\infty]])^\times$, so dass

$$d_\infty := c_\infty((\tilde{\gamma}_K - 1)e + (1-e)) \in \Delta G_\infty.$$

Eine mögliche Wahl ist z.B. $c_\infty = |H|$. Wir definieren die Abbildung ψ durch

$$\begin{array}{cccc} \psi: & \mathbb{Z}_p[[G_\infty]] & \to & \Delta G_\infty \\ & 1 & \mapsto & d_\infty \end{array}$$

Diese erweist sich als injektiv und wir erhalten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \mathbb{Z}_p[[G_\infty]] & = & \mathbb{Z}_p[[G_\infty]] & & \\ & & & & \Psi \downarrow & & \psi \downarrow & & \\ 0 & \to & X_\infty & \to & Y_\infty & \to & \Delta G_\infty & \to & 0 \\ & & || & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & X_\infty & \to & \operatorname{cok}\Psi & \to & \operatorname{cok}\psi & \to & 0, \end{array} \tag{3.28}$$

Mit Y_∞ besitzt auch $\operatorname{cok}\Psi$ endliche projektive Dimension über $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$. Des Weiteren ist $\operatorname{cok}\Psi$ nach [10] Prop. 4.5 auch ein Torsionsmodul und wir definieren

Definition 3.4.6 $\mho = \mho_S := (\operatorname{cok}\Psi) - \partial([\mathcal{Q}(\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]), c_\infty]) \in K_0T(\mathbb{Z}_p[[G_\infty]])$.

Bemerkung: Durch den Korrekturterm $\partial([\mathcal{Q}(\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]), c_\infty])$ hängt $\mho$ nur von S und dem Erzeuger γ_K ab (vgl. [10] Prop.4.6).

Von jetzt an nehmen wir G_∞ zusätzlich als abelsch an.

Dann ist also $G_\infty = H \times \Gamma_K$ und $\mathcal{Q}(\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]) = F[H]$ mit dem Quotientenkörper $F = \mathcal{Q}(\mathbb{Z}_p[[\Gamma_K]])$. Nach dem Satz von Wedderburn zerlegt sich

---

[5] Ein Element heißt *regulär*, wenn es kein Nullteiler ist.

[6] Torsion meint hier C-Torsion.

$F[H]$ in eine direkte Summe von Körpern $F_i \supset F$, also $F[H] = \oplus_i F_i$. Die Determinanten-Abbildung induziert nun einen Isomorphismus

$$K_1(\mathcal{Q}(\mathbb{Z}_p[[G_\infty]])) = \prod_i K_1(F_i) \overset{\det}{\simeq} \prod_i F_i^\times = (\mathcal{Q}(\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]))^\times. \tag{3.29}$$

Nach Lemma 5 in [11] ist $(Y_\infty) = (\mathbb{Z}_p[[G_\infty]])$ in $K_0(\mathbb{Z}_p[[G_\infty]])$ und somit wird $\mho$ trivial in $K_0(\mathbb{Z}_p[[G_\infty]])$. Deshalb existiert ein Urbild von $\mho$ in $K_1(\mathcal{Q}(\mathbb{Z}_p[[G_\infty]])) = (\mathcal{Q}(\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]))^\times$.

Für einen abelschen Charakter χ von G_∞ mit offenem Kern definieren wir die Deligne-Ribet Potenzreihe $G_\chi(T) = G_{\chi,S}(T) \in \mathbb{Z}_p[\chi][[T]]$ durch Interpolation mit der p-adischen L-Funktion $L_{p,S}(s,\chi)$:

$$\begin{aligned} L_{p,S}(1-n,\chi) &= L_p(1-n,\chi)\prod_{\mathfrak{P}\in S, \mathfrak{P}\nmid l\infty}\left(1-\tfrac{\chi(\mathfrak{P})}{N(\mathfrak{P})^{1-n}}\right) \\ &= \tfrac{G_{\chi,S}(u^n-1)}{H_\chi(u^n-1)} \end{aligned}$$

für alle $n \geq 1$, $n \equiv 0 \bmod p-1$. Dabei ist $u \in 1 + p\mathbb{Z}_p$ das Element, welches die Bedingung $\zeta^{\gamma_K} = \zeta^u$ für alle p-ten Einheitswurzeln ζ erfüllt, und

$$H_\chi(T) = \begin{cases} \chi(\gamma_K)(1+T)-1 & \text{, falls } \operatorname{res}_H^{G_\infty}\chi = 1 \\ 1 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Wir definieren nun im ganzen Abschluss $\mathcal{M}$ von $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]] = \mathbb{Z}_p[[\Gamma_K]][H]$ in $\mathcal{Q}(\mathbb{Z}_p[[\Gamma_K]])[H] = F[H]$ das Element

$$\Theta = \sum_{\chi(\gamma_K)=1} G_\chi(\gamma_K - 1)e_\chi \tag{3.30}$$

mit dem Idempotenten $e_\chi = \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\chi(h^{-1})h$. Es gilt (vgl. [10], Prop. 5.4):

Proposition 3.4.7 *Θ ist das eindeutige Element in $\mathcal{M}$ mit $\chi(\Theta) = G_\chi(0)$ für alle Charaktere χ und liegt in $\mathcal{Q}(\mathbb{Z}_p[[G_\infty]])^\times$.*

Über den Isomorphismus 3.29 können wir Θ als Element in $K_1(\mathcal{Q}(\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]))$ auffassen und sind nun in der Lage, die Hauptvermutung der äquivarianten Iwasawa-Theorie zu formulieren:

Vermutung 3.4.8 (Hauptvermutung) $\partial(\Theta) = \mho$.

Satz 3.4.9 *Die Differenz $\mho - \partial(\Theta)$ liegt im Kern der natürlichen Abbildung $K_0T(\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]) \to K_0T(\mathcal{M})$ und ist unabhängig von der Wahl von γ_K und S, solange S alle Primstellen $\mathfrak{P}$ von N mit $\mathfrak{P} \mid l\infty$ und alle Primstellen, deren Verzweigungsindex durch l teilbar ist, enthält.*

Vergleiche dazu Theorem 6 in [11].

Bemerkung: Die erste Behauptung des Satzes ist äquivalent zur Hauptvermutung der klassischen Iwasawa-Theorie.

Als Konsequenz dieses Satzes existiert nun eine Einheit $\Upsilon \in \mathcal{M}^\times$ mit

$$\partial(\Theta\Upsilon) = \mho.$$

Υ misst also den Fehler der Hauptvermutung, wie $\omega^{(p)} \in K_0T(\mathbb{Z}_pG)$ den Fehler der gelifteten Wurzelzahl-Vermutung misst. Den Zusammenhang liefert nun der

Satz 3.4.10 *Liegt N in einer zyklotomischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$, so ist die Abbildung $\chi \mapsto \chi(\Upsilon)$ ein darstellender Homomorphismus für $\omega^{(p)}$.*

Wenn p zahm verzweigt ist in N/K, so ist dieses Resultat gerade Theorem F in [10]. Die Verallgemeinerung auf beliebiges p findet sich in [12].

Wir erhalten die wichtige

Folgerung 3.4.11 *Die geliftete Wurzelzahl-Vermutung bei p 3.3.10 ist äquivalent zur Hauptvermutung der äquivarianten Iwasawa-Theorie 3.4.8, falls N in einer zyklotomischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$ enthalten ist.*

Dass diese Vermutungen in diesem Fall sogar zutreffen, folgt aus dem

Satz 3.4.12 *Die Hauptvermutung 3.4.8 gilt, falls $K = \mathbb{Q}$.*

Ist $G_\infty = H \times \Gamma_K$ mit abelschem H und $H = H_p \times H'$, wobei H_p die p-Sylowuntergruppe von H bezeichne, so gilt der

Satz 3.4.13 *Die Hauptvermutung 3.4.8 gilt, falls $\mu = 0$ für den $\mathbb{Z}_p[\chi][[\Gamma_K]]$-Modul $X_\infty^\chi = \mathbb{Z}_p[\chi][[\Gamma_K]][H_p] \otimes_{\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]} X_\infty$ für alle Charaktere χ von H'.*

Bemerkung: $\mu = 0$ bedeutet, dass der Modul X_∞^χ pseudo-isomorph zu einem $\mathbb{Z}_p[\chi][[\Gamma_K]]$-Modul ohne p-Torsion ist.

Die Beweise zu den letzten Sätzen finden sich in [11] Theorem 8 und 11. Nach einem noch nicht veröffentlichten Resultat von D. Barsky vom Mai 2004 gilt $\mu = 0$ im Fall total reeller Körper stets, so dass diese Voraussetzung in Satz 3.4.13 fallen gelassen werden kann.

Literaturverzeichnis

[1] Chinburg, T. : *Exact sequences and Galois module structure*, Annals of Mathematics, **121** (1985), 351-376

[2] Chinburg, T. : *Multiplicative Galois module structure*, J. London Math. Soc. (2), **29** (1984), 23-32

[3] Curtis, C. W., Reiner, I. : *Methods of Representation Theory with applications to finite groups and orders*, Band 1, John Wiley & Sons, (1987)

[4] Curtis, C. W., Reiner, I. : *Methods of Representation Theory with applications to finite groups and orders*, Band 2, John Wiley & Sons, (1987)

[5] Fröhlich, A., *Galois module structure of algebraic integers*, Springer-Verlag (1983)

[6] Fröhlich, A. *Artin root numbers, conductors and representations for generalizied quaternion groups*, Proc. London Math. Soc. **28** (1974) , 402-438

[7] Gruenberg, K. W. , Ritter, J., Weiss, A. : *A Local Approach to Chinburg´s Root Number Conjecture*, Proc. London Math. Soc. (3) **79** (1999), 47-80

[8] Neukirch, J., *Algebraische Zahlentheorie*, Springer (1992)

[9] Neukirch, J., *Klassenkörpertheorie*, Hochschulskripten Bibliographisches Institut (1969)

[10] Ritter, J., Weiss, A. : *The Lifted Root Number Conjecture and Iwasawa Theory*, Memoirs of the AMS, **748** (2002)

[11] Ritter, J., Weiss, A.: *Toward equivariant Iwasawa Theory*, Manuscripta Mathematica **109** (2002), 131-146

[12] Ritter, J., Weiss, A.: *Representing $\Omega_{(l\infty)}$ for real abelian fields*, Journal of Algebra and its applications 2 (2003), 237-276

[13] Schuierer S., *Ganzzahlige Galoisstrukturen und L-Reihen: I. Algebraische Vorbereitungen für endliche Galoisgruppen; ganze algebraische Zahlen in zahm verzweigten Zahlkörpererweiterungen*, Diplomarbeit, (2004)

[14] Tate, J. : *Les conjectures de Stark sur les fonctions L d'Artin en* $s = 0$, Birkhäuser, (1984)

[15] Tate, J. : *The cohomology groups of tori in finite Galois extensions of number fields*, Nagoya Math. J., **27** (1966), 709-719

[16] Taylor, M.: *On Fröhlich's conjecture of rings of integers of tame extensions*, Inv. Math. **63** (1981), 41-79

[17] Washington, L. C.: *Introduction to Cyclotomic Fields*, Springer (1982)

[18] Weiss, A.: *Multiplicative Galois module structure*, Fields Institute Monographs 5, American Mathematical Society (1996)