Brückenkurs
Lineare Gleichungssysteme und Vektoren

Dr. Alessandro Cobbe

29. September 2017

1 Lineare Gleichungssyteme

Was ist eine lineare Gleichung? Es ist eine algebraische Gleichung, in der alle Variablen nur mit dem Grad 1 vorkommen:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = r.$$

Die Variablen sind hier $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und r sind gegebene Elemente eines Körpers, der bei uns immer der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sein wird.

Was ist eine Lösung? Eine Lösung ist ein Tupel reeller Zahlen, das beim einsetzen bei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Gleichung erfüllt.

Beispiel:

$$x + 2y + 3z = 4$$

hat $(1, 0, 1)$ als Lösung da $1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 4$ ist. Achtung: Dies ist nicht die einzige Lösung! Das Tupel $(1, 1, 1)$ ist dagegen keine Lösung.

Was ist ein lineares Gleichungssystem? Ein lineares Gleichungssystem besteht aus mehreren linearen Gleichungen, von denen man gemeinsame Lösungen sucht.

1.1 Eine lineare Gleichung in einer Variablen

Der einfachste Fall ist selbstverständlich, wenn ein Gleichungssystem aus einer einzigen Gleichung in nur einer Variablen besteht:

$$ax = r.$$

Wie kann man das lösen? Wenn $a \neq 0$ ist, dann dividiert man einfach beide Seiten der Gleichung durch a und man erhält

$$x = \frac{r}{a}.$$

Unsere Gleichung hat dann genau eine Lösung. Was passiert, wenn $a = 0$ ist? Dann wäre unsere Gleichung

$$0 \cdot x = r.$$

Da gibt es zwei Möglichkeiten. Wenn auch $r = 0$ ist, dann ist die Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Wenn $r \neq 0$ ist, dann gibt es keine Lösungen. Wir sehen also, dass eine lineare Gleichung in einer Variablen eine, keine oder unendlich viele Lösungen haben kann. Im “Normalfall” sollten wir aber genau eine Lösung erwarten.

1.2 Eine lineare Gleichung in zwei Variablen

Was passiert, wenn wir eine Gleichung und zwei Variablen haben? Betrachten wir folgendes Beispiel:

$$x - y = 1.$$

Wenn wir diese Gleichung umformen, können wir

$$y = x - 1$$

erhalten. Wir sehen: Egal welchen Wert wir bei x einsetzen, finden wir genau ein y, das die Gleichung erfüllt. Z.B.: $x = 0$ ergibt $y = -1$, $x = \pi$ ergibt $y = \pi - 1$. Die Menge aller Lösungen unserer Gleichung kann man graphisch in einem kartesischen Koordinatensystem darstellen: Es ist eine Gerade.

Bei einer Gleichung der Form

$$ax + by = r$$

ist dies immer der Fall, sobald nicht $a = b = 0$ ist.

1.3 Zwei lineare Gleichungen in zwei Variablen

Betrachten wir das Beispiel

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2y = 4. \end{cases}$$

Das ist besonders einfach, da in der zweiten Gleichung die Variable x gar nicht vorkommt. Man kann also y eindeutig aus der zweiten Gleichung bestimmen: $y = 2$. Dann reicht es $y = 2$ in die erste Gleichung einzusetzen, sodass man $x + 2 = 1$, also $x = -1$ berechnet. Das lineare Gleichungssystem hat also genau eine Lösung, nämlich das Paar $(-1, 2)$.

Was passiert, wenn in beiden Gleichungen alle zwei Variablen vorkommen? Betrachten wir folgendes Beispiel.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x + y = 7. \end{cases}$$

Die beiden Gleichungen definieren zwei Geraden. Die erste hat Steigung 1, die zweite hat Steigung -3. Eine Lösung des Gleichungssystems ist per Definition eine gemeinsame Lösung der beiden Gleichungen; geometrisch gesehen, suchen wir also nach Schnittpunkten der beiden Geraden. Da diese nicht parallel sind, wissen wir, dass es genau einen solchen Schnittpunkt geben muss. Wie kann man den berechnen? Ein übliches Vorgehen in der Mathematik besteht darin, schwierige Probleme auf einfachere und bereits bekannte zurückzuführen. Die Idee ist also, zur zweiten Gleichung ein geeignetes Vielfaches der ersten zu addieren, sodass der Koeffizient von x in der zweiten Gleichung Null wird:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x + y - 3 \cdot (x - y) = 7 - 3 \cdot 1. \end{cases}$$

Durch diese Umformung ändert sich die Lösungsmenge des Systems nicht. Man erhält:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 4y = 4. \end{cases}$$

Wie im obigen Beispiel berechnet man nun problemlos $y = 1$ und $x = 2$. Die Lösung des Gleichungssystems ist also $(2, 1)$.

Noch ein Beispiel:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 4. \end{cases}$$

Die oben erklärte Umformung führt hier zu

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 0 = 2. \end{cases}$$

Diesmal können wir keine Lösung y der zweiten Gleichung bestimmen, da diese gar nicht von y abhängt und niemals erfüllt sein kann. Wir finden also keine Lösung. Wie kann das sein? Das Problem hier ist, dass die beiden Geraden parallel sind und somit keinen Schnittpunkt haben. Als letztes erwähnen wir, dass die beiden Geraden auch identisch sein könnten, was dann zu unendlich vielen Lösungen führen würde.

Wir halten fest: Im "Normalfall" hat ein System von zwei linearen Gleichungen in zwei Variablen genau eine Lösung; es ist aber auch möglich, dass es keine oder unendlich viele Lösungen gibt.

1.4 Matrizen und Determinanten

Man kann ein lineares Gleichungssystem mit einer Matrix (einer Tabelle von Zahlen) und einem Vektor (eine Zahlenspalte) beschreiben. Im ersten Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dieses Beispiel war besonders einfach, weil in der zweiten Gleichung kein x vorkommt. Diese Eigenschaft kann man gut von der Matrix ablesen: Sie hat eine Null unten links.

Beispiele 2 und 3 unterscheiden sich darin, dass wir bei dem einen im "Normalfall" sind (die geraden sind nicht parallel und es gibt genau eine Lösung) und bei dem anderen nicht. Die zugehörigen Matrizen sind:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Kann man von den Matrizen direkt erkennen, ob wir im "Normalfall" sind oder nicht? Ja, z.B. mit der Determinante. Die Determinante einer 2×2 Matrix ist definiert wie folgt:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Die Determinanten in den beiden Beispielen oben sind

$$1 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 4 \quad \text{und} \quad 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0.$$

Dies ist kein Zufall: Die beiden Geraden sind dann und genau dann parallel, wenn die Determinante der zugehörigen Matrix Null ist.

1.5 Drei lineare Gleichungen in drei Variablen

Die Vorgehensweise bei mehr Gleichungen und mehr Variablen unterscheidet sich nicht wesentlich von den obigen Spezialfällen. Wir betrachten nur ein Beispiel mit drei Variablen und drei Gleichungen:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ -x + y + z = 3. \end{cases}$$

Wir addieren geeignete Vielfache der ersten Gleichung zu den beiden anderen, sodass die Variable x von ihnen verschwindet:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 2z = 3 \\ 2y + 2z = 4. \end{cases}$$

Nun subtrahieren wir zwei mal die zweite Gleichung von der dritten:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 2z = 3 \\ -2z = -2. \end{cases}$$

Die dritte Gleichung ergibt nun $z = 1$. Durch einsetzen in die zweite erhält man $y = 1$, und aus der ersten berechnen wir $x = -1$. Unsere (eindeutig bestimmte) Lösung ist also $(-1, 1, 1)$.

2 Vektoren

Was ist ein Vektor? Wir verzichten auf eine allgemeine Definition und beschränken uns auf den Spezialfall der Vektoren in $\mathbb{R}^2$. Was ist $\mathbb{R}^2$? Es ist eine Ebene, in der wir uns ein kartesisches Koordinatensystem vorstellen. Jeder Punkt der Ebene ist durch zwei reelle Zahlen bestimmt, den $x-$ und den $y-$Wert. Ein Vektor in $\mathbb{R}^2$ ist ein Pfeil zwischen zwei Punkten, der eine Bewegung auf der Ebene beschreibt. Die relevanten Informationen hierzu sind die *Richtung* und die *Länge* des Vektors. Man identifiziert deshalb alle Vektoren untereinander, die dieselbe Richtung und Länge haben, egal welchen Anfangspunkt sie haben. Da der Anfangspunkt nicht relevant ist, kann man problemlos annehmen, dass alle Vektoren den Punkt $(0, 0)$ als Anfangspunkt haben. Unter dieser Voraussetzung reicht es den Endpunkt eines Vektors zu bestimmen, um den Vektor zu beschreiben.

Wir halten fest: Ein Vektor ist ein Pfeil, der in $(0, 0)$ startet und durch seinen Endpunkt beschrieben wird, also letztendlich durch ein Paar (a, b) reeller Zahlen. Den durch das Paar (a, b) definierten Vektor werden wir immer als Spalte $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ notieren.

2.1 Addition von Vektoren

Vektoren beschreiben eine Bewegung: Wenn man sich erst um eine gewisse Distanz in eine Richtung bewegt und dann um eine andere Distanz in eine andere

Richtung, dann hat man sich insgesamt auch irgendwo hinbewegt. Es ist also sinnvoll, Vektoren zu addieren. Nur, wie geht das? Seien $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ zwei Vektoren, was ist dann $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$? Der Vektor $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ ist der Pfeil vom Punkt $(0, 0)$ zum Punkt (c, d). Er hat dieselbe Länge und dieselbe Richtung wie der Pfeil vom Punkt (a, b) zum Punkt $(a + c, b + d)$. Wenn wir uns für die Summe $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ interessieren, gehen wir also zuerst vom Punkt $(0, 0)$ bis zum Punkt (a, b) und dann von dort aus zum Punkt $(a + c, b + d)$. Insgesamt sind wir also vom Punkt $(0, 0)$ bis zum Punkt $(a + c, b + d)$ gegangen (der entsprechende Pfeil ist eine Diagonale vom Parallelogramm, das man aus den zwei gegebenen Vektoren konstruieren kann). Algebraisch gesehen, haben wir die Regel

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}$$

erhalten. Das heißt, die Addition erfolgt komponentenweise. Bei einer ”Addition” erwünscht man sich gewisse Eigenschaften, die hier alle gelten.

1. Kommutativität.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

2. Assoziativität.

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c + e \\ b + d + f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c + e \\ d + f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

   Man braucht also bei mehreren hintereinander auszuführenden Additionen keine Klammern zu setzten:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c + e \\ b + d + f \end{pmatrix}.$$

3. Es gibt ein Neutralelement, den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

4. Jeder Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ hat einen inversen Vektor $\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$, für den gilt:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.2 Skalarmultiplikation

Wenn man bei einem Vektor die Richtung beibehält, aber die Länge um ein Vielfaches ändert, dann macht man eine sogenannte Skalarmultiplikation (ein Skalar ist hier einfach eine reelle Zahl). Wenn $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ist, dann definiert man

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}.$$

Zum Beispiel, wenn $\lambda = 2$ ist, dann ist $2 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, was die Definition plausibel macht. Wenn $\lambda > 1$ ist, dann handelt es sich um eine Streckung vom Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$: Die Richtung bleibt gleich, aber die Länge ändert sich um ein λ-faches. Wenn $0 < \lambda < 1$ ist, handelt es sich aus ähnlichen Gründen um eine Stauchung des Vektors. Wenn $\lambda = -1$ ist, dann wird der Vektor um den Punkt $(0, 0)$ gespiegelt.

Hier ist ein Beispiel, das eine Streckung mit einer Spiegelung kombiniert:

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

2.3 Vektoren und lineare Gleichungssysteme

Haben Vektoren etwas mit linearen Gleichungssystemen zu tun? Betrachten wir erneut ein Beispiel aus dem ersten Teil:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x + y = 7. \end{cases}$$

Wir können dieses Gleichungssystem als eine Gleichung von Vektoren umschreiben, nämlich:

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichung ist offensichtlich genau für diejenigen Paare (x, y) erfüllt, die Lösungen des obigen linearen Gleichungssystems sind. Man beobachtet, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in unterschiedliche Richtungen zeigen. Wann immer dies der Fall ist, dann hat das entsprechende System genau eine Lösung, egal welchen Vektor man an Stelle von $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ auf die rechte Seite schreibt. Man sagt in diesem Fall, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *linear unabhängig* sind. Als Beispiel für *linear abhängige* Vektoren können wir $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ nehmen. Diese beiden Vektoren zeigen in dieselbe Richtung und man kann auch schreiben $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, was eben eine "lineare Abhängigkeit" der beiden Vektoren zeigt.

2.4 Skalarprodukt

Drehen wir einen Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ um $90°$ gegen den Uhrzeigersinn; wir erhalten den Vektor $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. Ein beliebiger Vektor, der zu $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ senkrecht steht, muss also ein Vielfaches von $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ sein, also ein Vektor der Form $\begin{pmatrix} -\lambda b \\ \lambda a \end{pmatrix}$.

Seien nun $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ zwei Vektoren. Man definiert wie folgt ein Skalarprodukt.

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = ax + by.$$

Man beachte, dass die Summe von zwei Vektoren ein Vektor ist, aber das Skalarprodukt von zwei Vektoren ein Skalar (eine reelle Zahl) ist.

Wir möchten nun das Skalarprodukt in dem Spezialfall berechnen, wenn $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ zu $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ senkrecht ist. Wegen der obigen Bemerkung ist dies genau dann der Fall, wenn $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ von der Form $\begin{pmatrix} -\lambda b \\ \lambda a \end{pmatrix}$ ist. Dann ist das Skalaprodukt

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\lambda b \\ \lambda a \end{pmatrix} \right\rangle = a \cdot (-\lambda b) + b\lambda a = 0.$$

Das Skalarprodukt zwei zueinander senkrechter Vektoren ist also immer Null. Nehmen wir nun umgekehrt an, dass

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = ax + by = 0$$

ist, wobei wir $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ annehmen. Wenn $b \neq 0$ ist, dann erhalten wir, dass $y = -\frac{ax}{b}$ ist, d.h. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{ax}{b} \end{pmatrix}$. Dieser Vektor ist offensichtlich von der Form $\begin{pmatrix} -\lambda b \\ \lambda a \end{pmatrix}$, für $\lambda = -\frac{x}{b}$, und ist somit senkrecht zu $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Wenn $b = 0$ ist, dann ist $a \neq 0$ und der Beweis geht ähnlich.

Wir halten fest: Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist genau dann Null, wenn die Vektoren zueinander senkrecht liegen. Das Skalarprodukt hat auch noch andere interessante Eigenschaften.

1. Es ist symmetrisch: Für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt
$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$$
2. Es ist bilinear: Für alle $v, w, z \in \mathbb{R}^2$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt
$$\langle \lambda v + \mu w, z \rangle = \lambda \langle v, z \rangle + \mu \langle w, z \rangle$$
3. Es ist positiv definit: Für alle $v \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt
$$\langle v, v \rangle > 0.$$

Man definiert die Länge eines Vektors $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ als

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Diese Definition ergibt immer Sinn wegen der positiven Definitheit und ist offensichtlich durch den Satz des Pythagoras motiviert: der Vektor $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ entspricht der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten der Länge a und b. Allgemeiner kann dann der Satz des Pythagoras wie folgt formuliert werden.

Satz 2.1 (Pythagoras)**.** *Wenn $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ zwei zueinander Senkrechte Vektoren sind, dann ist*

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

Beweis. Es gilt:

$$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w\rangle$$

und

$$\langle v, w\rangle = 0$$

wegen unserer Annahme. □

2.5 Der Winkel zwischen zwei Vektoren

Seien $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ Vektoren. Sei r die Gerade, die zum Vektor w senkrecht ist und durch den Punkt (a, b) geht. Sei (c, d) der Schnittpunkt von r mit der Geraden, die den Vektor w enthält. Der Vektor $z = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ wird *Projektion* von v auf w genannt und der Vektor $v - z$ ist senkrecht zu w. Es folgt:

$$\langle z, w\rangle = \langle z, w\rangle + \langle v - z, w\rangle = \langle v, w\rangle .$$

Die Vektoren w und z zeigen in dieselbe Richtung. Dann gilt offensichtlich $z = \frac{\|z\|}{\|w\|} \cdot w$ und daraus folgt, dass

$$\langle z, w\rangle = \frac{\|z\|}{\|w\|} \cdot \langle w, w\rangle = \|z\| \cdot \|w\|.$$

Wir haben somit bewiesen, dass

$$\|z\| \cdot \|w\| = \langle z, w\rangle = \langle v, w\rangle .$$

Die Länge der Projektion von v auf w ist also

$$\|z\| = \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|}.$$

Wir können auch die Projektion selbst explizit aufschreiben:

$$z = \frac{\|z\|}{\|w\|} \cdot w = \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2} \cdot w = \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} \cdot w$$

Beispiel: Berechnen wir die Projektion von $v = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ auf $w = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$:

$$z = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} \cdot w = \frac{-1+3}{1+3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Die Definition des Kosinus des Winkels θ zwischen v und w ergibt nun:

$$\cos\theta = \frac{\|z\|}{\|v\|} = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|},$$

wenn $\langle v, w \rangle \geq 0$ ist. Wir können also den Winkel θ berechnen:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \right).$$

Beispiel: Seien v und w wie im soeben berechneten Beispiel. Dann ist

$$\theta = \arccos\left(\frac{-1+3}{2 \cdot 2} \right) = \arccos\left(\frac{1}{2} \right) = 60^\circ.$$

Aus den obigen Rechnungen folgt auch folgende allgemeine Formel:

$$\langle v, w \rangle = \cos\theta \cdot \|v\| \cdot \|w\|.$$

Man erkennt erneut, dass genau dann $\langle v, w \rangle = 0$ ist, wenn v und w zueinander senkrecht sind, was wir schon auf anderem Weg bewiesen hatten.

2.6 Fläche von Dreiecken

Seien $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ zwei Vektoren; dann gibt es genau ein Dreieck, das die beiden Vektoren als Seiten besitzt. Dies ist ganz allgemein: Ein beliebiges Dreieck kann so verschoben werden, dass eine der Ecken im Punkt $(0, 0)$ liegt, und somit wie oben durch zwei Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ beschrieben werden kann.

Wie können wir die Fläche eines solchen Dreiecks berechnen? Wir brauchen dazu die Länge einer Seite und der darauf senkrecht stehenden Höhe. Die Länge von w können wir berechnen: Sie ist $\|w\| = \sqrt{\langle w, w \rangle}$. Wir brauchen also noch die entsprechende Höhe. Diese erhält man vom Vektor v, in dem man die Projektion von v auf w subtrahiert, also

$$v - \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} \cdot w$$

berechnet. Die Länge davon ist

$$\begin{aligned}
h &= \sqrt{\left\langle v - \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} \cdot w, v - \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} \cdot w \right\rangle} = \sqrt{\langle v, v \rangle - 2\frac{\langle v, w \rangle^2}{\langle w, w \rangle} + \frac{\langle v, w \rangle^2}{\langle w, w \rangle^2} \langle w, w \rangle} \\
&= \sqrt{\frac{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2}{\langle w, w \rangle}} = \frac{\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2) - (ax+by)^2}}{\|w\|} \\
&= \frac{\sqrt{a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 - a^2x^2 - 2abxy - b^2y^2}}{\|w\|} \\
&= \frac{\sqrt{a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy}}{\|w\|} = \frac{\sqrt{(ay-bx)^2}}{\|w\|} = \frac{|ay-bx|}{\|w\|}.
\end{aligned}$$

Die Fläche des Dreiecks ist dann

$$\frac{1}{2} \cdot \|w\| \cdot \frac{|ay - bx|}{\|w\|} = \frac{|ay - bx|}{2}.$$

Eine interessante Bemerkung an dieser Stelle ist, dass $ay - bx$ die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix}$$

ist.

Beispiel: Seien wieder $v = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$. Dann ist

$$v - \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} \cdot w = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Die Länge davon ist

$$h = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}.$$

Die Fläche des Dreiecks ist dann in diesem konkreten Beispiel

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

Das Einsetzen in die allgemeine Formel hätte dasselbe Ergebnis geliefert:

$$\frac{|ay - bx|}{2} = \frac{|-\sqrt{3} - \sqrt{3}|}{2} = \sqrt{3}.$$