# Formelsammlung Grundlagen der Wärmeübertragung

13.01.2011

## Allgemeine Darstellung eines Transferproblems für Strom $\dot{Y}$ zwischen den Teilesystemen a und b:

**Wärmestromdichte**

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A}$$

**Wärmeleitung (ruhende Fluide oder Festkörper)**

Fourier-Ansatz:

$$\vec{\dot{q}} = -k \cdot \vec{\nabla} T$$

**Konvektion (bei strömenden Fluiden)**

Newton-Ansatz:

$$\dot{q} = h \cdot (T_W(x) - T_\infty)$$

allgemein:

$$Nu = f\{Re, Pr, (Gr), Geometrie\}$$

Laminare Plattengrenzschicht:

$$\overline{Nu}_x = 0{,}332 \cdot \sqrt{Re_x} \cdot \sqrt[3]{Pr}$$

## Fouriersche Wärmeleitungsgleichung (k=const.); inkompressibel bzw. Festkörper

instationär: $\rho c_v \partial_\tau T = k \nabla^2 T + q^*$

stationär: $0 = k \nabla^2 T + q^*$

volumenspez. Quellstärke: $q^*$ $\left[ W/m^3 \right]$

## Stationärer Temperaturverlauf in wärmeleitenden Körpern ohne Wärmequellen

| | Differentialgleichung | Temperaturverlauf |
|---|---|---|
| ebene Wand | $\frac{d^2T}{dx^2} = 0$ | $T(x) = \frac{T_a - T_i}{b} x + T_i$ |
| Rohrwand | $\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} = 0$ | $T(r) = (T_a - T_i) \cdot \left( \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) \right)^{-1} \cdot \ln\left(\frac{r}{r_i}\right) + T_i$ |
| Kugelwand | $\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} = 0$ | $T(r) = (T_a - T_i) \cdot \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_i} \right)^{-1} \cdot \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_i} \right) + T_i$ |

## Wärmeübertrager (WÜT):

**1. HS für (adiabate, stationäre) WÜT** $\sum_{i=1}^{n} \dot{m}_i \cdot \Delta h_i = 0$

**WÜT-Leistung** $\dot{Q}_{ges} = \frac{\Delta T_{log}}{R_{ges}} = \Delta T_{log} \cdot \frac{L}{R_L}$ $\qquad \Delta T_{log} := \frac{\Delta T_L - \Delta T_0}{\ln \frac{\Delta T_L}{\Delta T_0}}$

$R_L = R_{ges} \cdot L$

**„Wasserwert“** $W_i = \left( \dot{m} c_p \right)_i$

**lokale Temperaturdifferenz** $\Delta T(x) = \Delta T_0 \cdot \exp(-C_0 \cdot x)$

Gleichstrom: $C_0 = C_0^p = \left(\frac{1}{W_H} + \frac{1}{W_C}\right)\frac{1}{R_L}$

Gegenstrom: $C_0 = C_0^c = \left(\frac{1}{W_H} - \frac{1}{W_C}\right)\frac{1}{R_L}$

Einstrom: $C_0 = \frac{1}{WR_L}$

**Kontinuitätsgleichung:** $\dot{m} = \rho \cdot \dot{V} = \rho \cdot v \cdot A$ $\quad m = \rho \cdot V = n \cdot M = n \cdot N_A \cdot m_T$

## Wärmetransfer

| | Wärmeleitung | Wärmeübergang | Wärmedurchgang |
|---|---|---|---|
| Grundgesetze | $\dot{Q} = -k \cdot A \cdot \nabla T = -\frac{\Delta T}{R_k}$ | $\dot{Q} = h \cdot A \cdot \Delta T = \frac{\Delta T}{R_h}$ | $\dot{Q} = U \cdot A \cdot \Delta T = \frac{\Delta T}{R_{ges}}$ Parallel: $\frac{1}{R_{ges}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$ Reihe: $R_{ges} = \sum_i R_i$ |
| Widerstände | | | Reihenschaltung Fluid-Feststoff-Fluid |
| ebene Wand | $R_k = \frac{b}{k \cdot A}$ | $R_h = \frac{1}{h \cdot A}$ | $R_{ges} = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{h_i} + \sum_j \frac{b_j}{k_j} + \frac{1}{h_a}\right)$ |
| Rohrwand | $R_k = \frac{\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)}{2\pi \cdot k \cdot L}$ | $R_h = \frac{1}{h \cdot \pi \cdot d \cdot L}$ | $R_{ges} = \frac{1}{\pi L}\left(\frac{1}{d_i \cdot h_i} + \sum_j \frac{\ln \frac{d_{j+1}}{d_j}}{2 \cdot k_j} + \frac{1}{d_a \cdot h_a}\right)$ |
| Kugelwand | $R_k = \frac{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}}{2\pi \cdot k}$ | $R_h = \frac{1}{h \cdot \pi \cdot d^2}$ | $R_{ges} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{d_i^2 \cdot h_i} + \sum_j \frac{\frac{1}{d_j} - \frac{1}{d_{j+1}}}{2 \cdot k_j} + \frac{1}{d_a^2 \cdot h_a}\right)$ |

## Geometrie – Angaben

| | Fläche | Umfang | Volumen |
|---|---|---|---|
| Kreis | $A = (\pi/4)d^2 = \pi \cdot r^2$ | | |
| Zylinder | $A = \pi \cdot d \cdot L = 2\pi \cdot r \cdot L$ | $U = \pi \cdot d$ | $V = (\pi/4)d^2 \cdot L = \pi \cdot r^2 \cdot L$ |
| Kugel | $A = \pi \cdot d^2 = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ | | $V = (\pi/6)d^3 = (4/3)\pi \cdot r^3$ |

## Kenngrößen

| Name | Symbol | Definition | Formelzeichen |
|---|---|---|---|
| Biot-Zahl | Bi | $hL/k_S$ | es bedeuten dabei:<br><br>$\alpha$ Temperaturleitfähigkeit $\alpha = k/(\rho \cdot c_p)$<br>a Schallgeschwindigkeit<br>$\beta$ therm. Ausdehnungskoeff. ($\beta_{id.Gas} = 1/T_\infty$)<br>$c_p$ isobare spezifische Wärmekapazität<br>d charakteristischer Durchmesser<br>g Fallbeschleunigung<br>L charakteristische Länge<br>v Geschwindigkeit<br>$\Delta T$ Temperaturdifferenz<br>h Wärmeübergangskoeffizient<br>$h_m$ Stoffübergangskoeffizient<br>$k_f$ Wärmeleitfähigkeit Fluid<br>$k_s$ Wärmeleitfähigkeit Festkörper<br>$\nu$ kinematische Viskosität $\nu = \eta/\rho$<br>$\rho$ Dichte<br>$\tau$ Zeit |
| Eckert-Zahl | Ec | $v^2/(c_p \Delta T)$ | |
| Fourier-Zahl ($\tau^+$) | Fo | $\alpha\tau / L^2$ | |
| Froude-Zahl | Fr | $v^2/(gL)$ | |
| Graetz-Zahl | Gz | $Re \cdot Pr \cdot d/L = Pe \cdot (d/L)$ | |
| Grashof-Zahl | Gr | $(g\beta\Delta T L^3)/\nu^2$ | |
| Mach-Zahl | Ma | $v/a$ | |
| Nußelt-Zahl | Nu | $(hL)/k_f$ | |
| Péclet-Zahl | Pe | $Re \cdot Pr = (vL \cdot \rho c_p)/k$ | |
| Prandtl-Zahl | Pr | $\nu/\alpha = \nu \cdot \rho \cdot c_p / k$ | |
| Rayleigh-Zahl | Ra | $Gr \cdot Pr = g\beta_k \Delta T L^3/(\nu\alpha)$ | |
| Reynolds-Zahl | Re | $(vL)/\nu$ | |
| Stanton-Zahl | St | $Nu/Re \cdot Pr = k/v\rho^2 c_p^2$ | |

## Strahlung

**Für Wellenausbreitung gilt:**

$$\lambda \cdot \upsilon = c$$

$\lambda$ Wellenlänge des Lichts
$\upsilon$ Frequenz des Lichts
c Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts
(im Vakuum: $c_0 = 2{,}99792458 \cdot 10^8 \, m/s$)

**Spektrale Strahlungsintensität:**

$$I_\lambda = \frac{d^5 E}{dt \cdot d\lambda \cdot d\Omega \cdot dA \cdot \cos\Theta}$$

mit $d\Omega = \sin\Theta \cdot d\Theta \cdot d\Phi$

$\lambda$ Wellenlänge, $t$ Zeit
$\Omega$ Raumwinkel, $A$ Fläche
$\Theta$ Winkel zur Flächennormalen
$\Phi$ Azimutwinkel

**Spektraler spezifischer Strahlungsfluss:**

$$\dot{q}_\lambda = \frac{\dot{Q}_\lambda}{A} = \int_\Omega I_\lambda \cdot \cos\Theta \cdot d\Omega$$

spezifischer Strahlungsfluss: $\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A} = \int_\lambda \dot{q}_\lambda \cdot d\lambda$

**Strahlungsbilanz:**

$$\dot{Q}_{\lambda,in} = \dot{Q}_{\lambda,abs} + \dot{Q}_{\lambda,ref} + \dot{Q}_{\lambda,trans}$$

$$\alpha_\lambda + \rho_\lambda + \tau_\lambda = 1$$

Absorptions- Reflexions- Transmissions-Grad

**Schwarzer Strahler:**

Spektraler Emissionsfluss des schwarzen Strahlers:

$$B_\lambda(T) = \frac{c_1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{c_2}{\lambda \cdot T}\right) - 1}$$

$$c_1 = 3{,}742 \cdot 10^8 \, \frac{W \cdot (\mu m)^4}{m^2}$$

$$c_2 = 1{,}43965 \cdot 10^4 \, \mu m \cdot K$$

$$\frac{B_\lambda(T)}{T^5} = f(\lambda \cdot T)$$

Wiensches Verschiebungsgesetz:

$$(\lambda \cdot T)_{B_\lambda \to max} = 2897{,}9\,(\mu m \cdot K)$$

Stefan-Boltzmann-Gesetz:

$$\int_{\lambda=0}^{\infty} B_\lambda(T) \cdot d\lambda = \frac{\dot{Q}}{A} = \sigma \cdot T^4 \qquad \sigma = 5{,}669 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2K^4}$$

**Realer Strahler:** Kirchhoff`sches Gesetz für Strahlungsgleichgewicht

$\varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda$ spektraler Emissivität: $\varepsilon_\lambda = \frac{\dot{q}_\lambda(T)}{B_\lambda(T)}$

Strahlung zwischen den Flächen $A_1$ und $A_2$ (vollumschlossen):

$$\dot{Q}_S = \sigma \cdot A_{12}\left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

mit $\frac{1}{A_{12}} = \frac{1}{A_1 \cdot \varepsilon_1} + \frac{1}{A_2 \cdot \varepsilon_2} - \frac{1}{A_2}$

$A_1$ „innere“ Fläche (übertragbar auf ebene, parallele Fläche mit $A_1 = A_2$ )