e) Ges.: t_H für $T_S - T_{W,0} = \frac{1}{2}(T_{S,0} - T_{W,0})$ für c) und d)

DGL aus Teil c)

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = -\Theta$$

$$\int_{\Theta(\tau_0)}^{\Theta} \frac{1}{\Theta}\,\partial\Theta = \int_{\tau_0}^{\tau} -\,\partial\tau \Rightarrow \ln\left(\frac{\Theta}{\Theta_0}\right) = -\tau + \tau_0$$

$$\Rightarrow \Theta(\tau) = \Theta(\tau_0)\exp(\tau_0 - \tau)$$

Anfangsbedingungen einsetzen:

$\tau_0 = 0$ folgt aus $\tau = \frac{h \cdot A}{W_S} \cdot (t=0)$

$\Theta(\tau_0) = 1$ folgt aus $\Theta_0 = \frac{T_{S,0} - T_{W,0}}{T_{S,0} - T_{W,0}}$

$$\Rightarrow \Theta(\tau) = \exp(-\tau)$$

nach τ auflösen: $\tau = -\ln(\Theta(\tau))$ $\quad \frac{0{,}5 \cdot (T_{S,0} - T_{W,0})}{T_{S,0} - T_{W,0}}$

$$\Rightarrow t = -\frac{W_S}{h \cdot A} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{55{,}19\,s}$$

$W_S = 3846{,}5\ \frac{J}{K}$

$A = 0{,}04831\ m^2$

DGL aus Teil d):

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \tilde{\omega} - \Theta$$

Summand, der nicht von τ abhängt, "Störfunktion"

inhomogene DGL: $\Theta = \Theta_h + \Theta_p$

homogene Lösung

partikuläre Lösung

homogene Lösung bereits berechnet:

$$\Theta_h = C_0 \exp(-\tau)$$

partikuläre Lösung setzen zu (beliebig setzbar)

$$\Theta_p = \tilde{\omega}$$

$$\Rightarrow \quad \Theta = C_0 \cdot \exp(-\tau) + \tilde{\omega}$$

Anfangsbedingungen:

$$t = 0 \rightarrow \tau = 0 \quad \text{und} \quad \Theta_0 = 1$$

$$1 = C_0 \cdot \exp(0) + \tilde{\omega} = C_0 + \tilde{\omega} \rightarrow C_0 = 1 - \tilde{\omega}$$

$$\Rightarrow \quad \Theta = (1 - \tilde{\omega}) \cdot \exp(-\tau) + \tilde{\omega}$$

nach τ:

$$\tau = -\ln\left(\frac{\Theta - \tilde{\omega}}{1 - \tilde{\omega}}\right) \qquad (e.1)$$

Θ für $T_S - T_W = \frac{1}{2}(T_{S,0} - T_{W,0})$

mit (d.1):

$$T_S - T_{W,0} - \frac{W_S}{W_W}(T_{S,0} - T_S) = \frac{1}{2}(T_{S,0} - T_{W,0})$$

$$T_S - T_{W,0} + \frac{W_S}{W_W}(T_S - T_{W,0} + T_{W,0} - T_{S,0}) = \frac{1}{2}(T_{S,0} - T_{W,0})$$

$$(T_S - T_{W,0}) \cdot \left(1 + \frac{W_S}{W_W}\right) + \frac{W_S}{W_W}(T_{W,0} - T_{S,0}) = \frac{1}{2}(T_{S,0} - T_{W,0})$$

$$\Theta \cdot \left(1 + \frac{W_S}{W_W}\right) - \frac{W_S}{W_W} = \frac{1}{2}$$

$$\Theta = \left(\frac{1}{2} + \frac{W_S}{W_W}\right) \cdot \frac{W_W}{W_W + W_S} = \frac{W_W + 2W_S}{2\cancel{W_W}} \cdot \frac{\cancel{W_W}}{W_W + W_S}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{W_W + 2W_S}{\ldots}\right)$$

$$\Theta = \frac{1}{2}\left(\frac{W_w + 2W_s}{W_w + W_s}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{W_w + W_s}{W_w + W_s} + \frac{W_s}{W_w + W_w}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \tilde{\omega}\right) \quad (e.2)$$

(e.2) in (e.1)

$$\tau = -\ln\left(\frac{\Theta - \tilde{\omega}}{1 - \tilde{\omega}}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$W_w = 8\,3449{,}5 \frac{J}{4}$

$$\Rightarrow t = -\frac{W_s \cdot W_w}{h \cdot A \cdot (W_w + W_s)} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$= 52{,}7\ s$