# Aufgabe 13 radiale Wärmeleitung

Das Problem ist in Bild 13.1 skizziert. Aus dem Rohr wurde ein differentielles Element der Breite $dr$ herausgeschnitten. Diese Element hat das Volumen $dV$:

$$dV = dr \cdot A_r = dr \cdot r \cdot dzd\phi \tag{13.1}$$

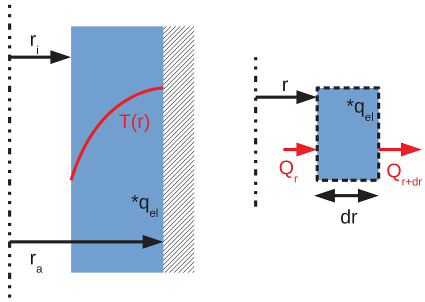


Abbildung 13.1: Wärmeleitung im Rohr

a.) Stellen wir zunächst den ersten Hauptsatz am differentiellen Element auf:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial t} &= \sum_i \dot{Q}_i && + \sum_j W_j \\
\rho \cdot c \cdot dV \cdot \frac{\partial T}{\partial t} &= \dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+dr} && + \dot{q}^{\star}_{el} \cdot dV
\end{aligned}$$

Den Wärmestrom $\dot{Q}_{r+dr}$, der aus dem differentiellen Element austritt wird mit einer Taylorreihenentwicklung angenähert

$$\dot{Q}_{r+dr} \approx \dot{Q}_r + \frac{1}{1!}\frac{\partial \dot{Q}_r}{\partial r} dr + \dots \tag{13.2}$$

$$\rho \cdot c \cdot dV \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial \dot{Q}_r}{\partial r} dr + \dot{q}^{\star}_{el} \cdot dV \tag{13.3}$$

Für den Wärmestrom durch Leitung $\dot{Q}_r$ nutzen wir das Fouriergesetz

$$\dot{Q}_r = -k \cdot A_r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \tag{13.4}$$

$$\rho \cdot c \cdot dV \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}\left(k \cdot A_r \frac{\partial T}{\partial r}\right) \cdot dr + \dot{q}^{\star}_{el} \cdot dV$$

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = k \cdot \frac{dz \cdot d\phi}{r \cdot dz \cdot d\phi} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \dot{q}^{\star}_{el}$$

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \dot{q}^{\star}_{el} \tag{13.5}$$

b.) Im stationären Zustand gilt $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, also

$$0 = \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \dot{q}^{\star}_{el} \tag{13.6}$$

c.) Nutzen wir die beiden dimensionslosen Variablen

$$\Theta = \frac{T - T_i}{T_{Bez}} \quad \rightarrow \quad \partial T = T_{Bez} \cdot \partial \Theta$$
$$\xi = \frac{r}{r_a} \quad \rightarrow \quad \partial r = r_a \cdot \partial \xi$$
$$0 = \frac{k}{r_a \xi} \cdot \frac{\partial}{r_a \partial \xi} \left( r_a \xi T_{Bez} \frac{\partial \Theta}{r_a \partial \xi} \right) + \dot{q_{el}^{\star}}$$
$$0 = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right) + \underbrace{\frac{\dot{q_{el}^{\star}} \cdot r_a^2}{k \cdot T_{Bez}}}_{q^+} \tag{13.7}$$

Die Bezugstemperatur $T_{Bez}$ ist frei wählbar, also wählen wir sie so, dass $q^+$ möglichst simpel wird:

$$T_{Bez} = \frac{\dot{q_{el}^{\star}} r_a^2}{k} \quad \rightarrow \quad q^+ = 1$$
$$0 = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right) + 1 \tag{13.8}$$

Diese DGL lässt sich nun lösen

$$-\xi = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right)$$
$$\int -\xi d\xi = \int d \left( \xi \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right)$$
$$\frac{-\xi^2}{2} + c_1 = \xi \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}$$
$$\int \frac{-\xi}{2} + \frac{c_1}{\xi} d\xi = \int d\Theta$$
$$-\frac{\xi^2}{4} + c_1 \ln(\xi) + c_2 = \Theta(\xi) \tag{13.9}$$

d.) Für $r = r_i$ gilt $\xi = \frac{r_i}{r_a}$ und $\Theta = 0$. Die Außenseite $r = r_a$ is isoliert, also $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$, dementsprechend gilt $\xi = 1$ und $\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} &= -\frac{\xi}{2} + \frac{c_1}{\xi} \\
0 &= -\frac{1}{2} + c_1 \quad \rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{2} \\
\Theta(\xi) &= -\frac{\xi^2}{4} + \frac{1}{2}\ln(\xi) + c_2 \\
0 &= -\frac{r_i^2}{r_a^2 \cdot 4} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{r_i}{r_a}\right) + c_2 \rightarrow c_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2 - \ln\left(\frac{r_i}{r_a}\right)\right) \\
\Theta(\xi) &= -\frac{\xi^2}{4} + \frac{1}{2}\ln(\xi) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2 - \ln\left(\frac{r_i}{r_a}\right)\right) \qquad (13.10)
\end{aligned}$$

e.)

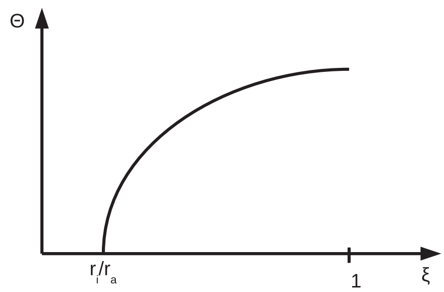


Abbildung 13.2: Temperaturverlauf über das Rohr