Modul 1343

Variationsrechnung

Vorlesender: Prof. Thomas Apel
Institut für Mathematik und Bauinformatik
Fakultät für Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften

Herbsttrimester 2013

Vorwort

Variationsaufgaben sind Extremwertaufgaben, bei denen Funktionen gesucht sind. Im Rahmen dieser Lehrveranstaltung sollen Sie sich Fähigkeiten zur Modellierung praktischer Probleme als Variationsprobleme und zur Lösung dieser mit Hilfe der Variationsrechnung aneignen.

Die Vorlesung wird innerhalb des Moduls *Schalentragwerke* für Studierende des Master-Studiengangs *Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften* gelesen. Für ihre Hilfe bei der Erstellung des Skripts sei an dieser Stelle Manuela Winkler gedankt. Hinweise auf Druckfehler und Verbesserungsmöglichkeiten nehme ich gern entgegen, um das Skript weiter zu verbessern.

Wichtige Webseiten

http://www.unibw.de/bauv1/personen/apel/
Homepage von Prof. Thomas Apel mit Telefonnummer, Büroadresse, ...

http://www.unibw.de/rz/dokumente/fakultaeten?id=306853&tid=fakultaeten
Dokumente zur Vorlesung

Inhaltsverzeichnis

Literatur **4**

1 Einführung in die Variationsrechnung **5**
1.1 Extremalprobleme (i. Allg. Minimumprobleme) 5
1.2 Gâteaux-Variation, Variationsgleichung 10
1.3 Differentialgleichung 14
1.4 Sonderfälle 18

2 Näherungsverfahren zur Lösung von Variationsaufgaben **23**
2.1 Das Ritz-Verfahren 23
2.2 Galerkin-Verfahren 26
2.3 Verfahren auf der Basis der Euler-Differentialgleichung 29

3 Komplexere Variationsaufgaben **31**
3.1 Andere Randbedingungen 31
3.2 Höhere Ableitungen 35
3.3 Vektorfunktionen 38
3.4 Funktionen in mehreren Variablen 41
3.5 Isoperimetrische Probleme (Nebenbedingungen in Integralform) . 45
3.6 Probleme mit Nebenbedingungen in Gleichungsform 51

Literatur

[Kie] Kielhöfer, H.: *Variationsrechnung.* Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2010.

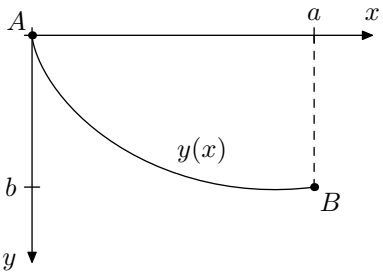
[MV2] Meyberg, K. und P. Vachenauer: *Höhere Mathematik*, Band 2. Springer, Berlin, 1991, 1997, 1999, 2001.

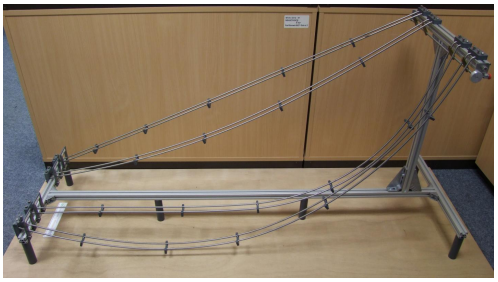
1 Einführung in die Variationsrechnung

1.1 Extremalprobleme (i. Allg. Minimumprobleme)

In der Variationsrechnung geht es um Extremwertaufgaben, bei denen Funktionen gesucht sind.

Bsp 1 (Brachistochrone-Problem, Johann Bernoulli 1696) Gesucht ist in einer vertikalen Ebene die Bahn von $A = (0,0)$ nach $B = (a,b)$, längs der ein Massepunkt M reibungsfrei unter Einwirkung der Schwerkraft in *minimaler Zeit* gleitet.





Zur Modellierung bezeichnen wir mit $y(x)$ die gesuchte Bahnkurve und mit $T(y)$ die Zeit, die der Massepunkt auf der Bahn $y(x)$ benötigt. Sei nun

$$s(x) = \int_0^x \mathrm{d}s$$

die Bogenlänge entlang der Bahnkurve. Für die Geschwindigkeit des Massepunkts gilt

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}mv^2 = mgy \;\Leftrightarrow\; v = \sqrt{2gy(x)}.$$

Benutzt man außerdem die Formel $\mathrm{d}s = \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,\mathrm{d}x$ für das skalare Bogenelement, erhält man

$$T(y) = \int_0^T \mathrm{d}t = \int_0^L \frac{1}{v}\,\mathrm{d}s = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2gy(x)}}\,\mathrm{d}x.$$

In der Funktionenmenge[1]

$$V_* = \{y \in C^1(0,a) \cap C[0,a] : y(0) = 0,\ y(a) = b\}$$

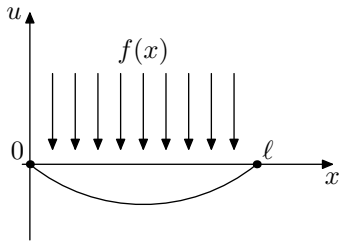
ist also diejenige Funktion $y_* \in V_*$ zu bestimmen, für die

$$T(y_*) \leq T(y)\ \forall y \in V_*$$

gilt. Die entsprechende Kurve heißt *Brachistochrone* (griechisch: brachýs – kurz, chrónos – Zeit).

[1] Dabei ist $C^1(0,a)$ die Menge aller im Intervall $(0,a)$ stetig differenzierbaren Funktionen und $C[0,a]$ die Menge aller im Intervall $[0,a]$ stetigen Funktionen.

Bsp 2 (Gleichgewichtslage einer Saite) Wir betrachten eine Saite, die bei $x = 0$ und $x = \ell$ in der Höhe Null festgehalten wird und auf die transversal eine Linienkraft $f(x)$ wirkt. Unter allen Auslenkungen $u(x)$ ist diejenige Auslenkung $u_*(x)$ zu bestimmen, für die die potentielle Energie $E(u)$ minimal wird.



Bezeichne A_F die Formänderungsarbeit und

$$A_f = \int_0^\ell f(x)u(x)\,\mathrm{d}x$$

die Arbeit der äußeren Kraft f, dann gilt

$$E(u) = A_F - A_f.$$

Für die Formänderungsarbeit gilt

$$A_F = S\Delta\ell,$$

wobei S die Vorspannung der Saite und

$$\Delta\ell = \int_0^\ell \sqrt{1 + (u'(x))^2}\,\mathrm{d}x - \ell$$

die Längenänderung der Saite sind. Mit der Taylorreihe

$$\sqrt{1+z} = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{8} \pm \cdots \approx 1 + \frac{z}{2}$$

folgt weiter

$$\begin{aligned} \Delta\ell &\approx \int_0^\ell 1 + \tfrac{1}{2}(u'(x))^2\,\mathrm{d}x - \ell \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^\ell u'(x)^2\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$E(u) = \tfrac{1}{2}S\int_0^\ell u'(x)^2\,\mathrm{d}x - \int_0^\ell f(x)u(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die gesuchte Variationsaufgabe ist:

$$\begin{aligned} &\text{Finde} && u_* \in V_0 : E(u_*) \le E(u)\ \forall u \in V_0 \\ &\text{wobei} && V_0 = \{u \in C^1[0,\ell] : u(0) = 0,\ u(\ell) = 0\}. \end{aligned}$$

Bsp 3 (Hamilton-Prinzip) Man bezeichnet die *Differenz*

$$L = T - U$$

aus der kinetischen Energie T und der potentiellen Energie U eines mechanischen Systems als *Lagrange-Funktion* des Systems. Das Integral

$$W = \int_a^b L \, \mathrm{d}t$$

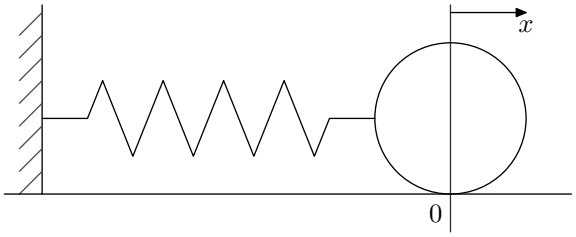
heißt *Wirkung* oder das *Wirkungsintegral*.

Das *Hamilton-Prinzip* (Prinzip der kleinsten Wirkung) besagt, dass in konservativen Systemen die tatsächlichen Vorgänge mit minimaler Wirkung ablaufen [MV2, §13.4.2],

$$W = \min!$$

siehe auch http://www.arxiv.org/abs/physics/0504016.

Unterbeispiel Eine Masse schwingt um die Ruhelage. Es bezeichne $x(t)$ die Auslenkung, m die Masse und k die Federkonstante.



Dann gilt

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 \\ U &= \tfrac{1}{2} k x(t)^2 \\ \Rightarrow \quad L &= \tfrac{1}{2} \left(m\dot{x}^2 - kx^2 \right) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich das Wirkungsintegral

$$W(x) = \tfrac{1}{2} \int_0^{t_0} (m\dot{x}^2 - kx^2) \, \mathrm{d}t.$$

Definiert man

$$V_* = \left\{ x(t) \in C^1[0, t_0] : \, x(0) = x_0, \, \dot{x}(0) = v_0 \right\},$$

wobei x_0 die Anfangsauslenkung und v_0 die Anfangsgeschwindigkeit bezeichnen, so lautet die Variationsaufgabe für den dargestellten Massenschwinger

$$\text{Finde} \quad x_* \in V_* : \, W(x_*) = \min!$$

Def 4 *Sei X ein linearer Raum und $V_* \subset X$. Eine Abbildung $J : V_* \to \mathbb{R}$ heißt Funktional.*

E 5 *In der Variationsrechnung ist X i. Allg. ein Funktionenraum.*

Bsp 6 (Funktionenräume)

$C[a,b]$	Raum der über $[a,b]$ stetigen Funktionen
$C^1[a,b]$	Raum der über $[a,b]$ einmal stetig differenzierbaren Funktionen
$W^{1,2}[a,b]$	Raum der Funktionen mit beschränkter Energie, d.h.,

$$\begin{aligned} W^{1,2}[a,b] &:= \left\{ v : \|v\|_{1,2} < \infty \right\}, \\ \|v\|_{1,2}^2 &:= \int_a^b \left(v(x)^2 + v'(x)^2 \right) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Bsp 7 (Funktionale)

$$T(y) = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2gy(x)}} \, \mathrm{d}x \qquad \text{(Bsp 1)}$$

$$E(u) = \tfrac{1}{2} S \int_0^\ell u'(x)^2 \, \mathrm{d}x - \int_0^\ell f(x) u(x) \, \mathrm{d}x \qquad \text{(Bsp 2)}$$

$$W(x) = \tfrac{1}{2} \int_0^{t_0} (m\dot{x}^2 - kx^2) \, \mathrm{d}t \qquad \text{(Bsp 3)}$$

In allen 3 Beispielen hat das Funktional die Form

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y') \, \mathrm{d}x$$

wobei F gegeben ist. Das Minimumproblem lautet:

$$\text{Finde} \quad y_* \in V_* : \; J(y_*) \leq J(y) \; \forall y \in V_*.$$

Der Definitionsbereich V_* enthält die Rand- und Anfangsbedingungen.

Bem 8 Es gibt natürlich auch andere Funktionale, z.B.:

- X sei Polynomraum, $J(p) = \mathrm{Grad}(p)$.
- X sei Funktionenraum, $\delta_{x_0}(v) = v(x_0)$ ist das Delta-Funktional.
- X sei Funktionenraum, $J(f) = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$.

Bsp 9 Die Lösung u der Randwertaufgabe

$$-u'' = f \text{ in } (a,b), \quad u(a) = u(b) = 0,$$

minimiert das Kleinste-Quadrate-Funktional

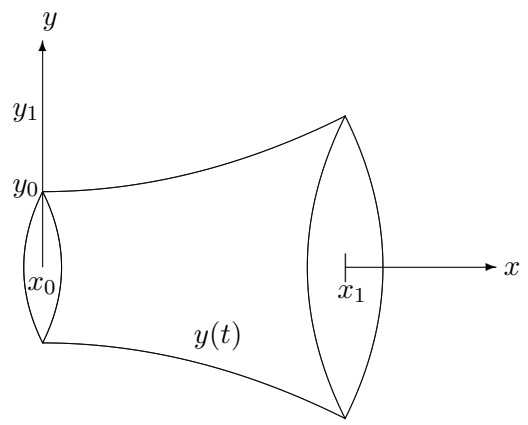
$$J(u) = \frac{1}{2}\int_a^b (u'' + f)^2 \,\mathrm{d}x$$

über $V_0 = \{v \in W^{2,2}(a,b) : v(a) = v(b) = 0\}$. Dabei ist der Funktionenraum $W^{2,2}(a,b)$ der Raum der Funktionen, deren sämtliche Ableitungen bis 2. Ordnung quadratisch integrierbar sind, d.h.,

$$\begin{aligned} W^{2,2}(a,b) &:= \left\{ v : \|v\|_{2,2} < \infty \right\}, \\ \|v\|_{2,2}^2 &:= \int_a^b \left(v(x)^2 + v'(x)^2 + v''(x)^2 \right) \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Diese Formulierung der Randwertaufgabe als Minimierungsproblem ist Ausgangspunkt für das numerische Lösungsverfahren *least squares finite element method*, übersetzt etwa *Kleinste-Quadrate-Finite-Elemente-Methode*.

Ü 10 (Rotationsminimalfläche) *Unter allen C^1-Kurven, die die beiden Punkte $A = (x_0, y_0)$ und $B = (x_1, y_1)$ in der (x,y)-Ebene verbinden, wird diejenige gesucht, die bei Rotation um die x-Achse eine Fläche mit kleinstmöglichem Flächeninhalt erzeugt.*



Man kann diese Fläche experimentell mit einem Seifenfilm zwischen Drahtschleifen erzeugen.

Ü 11 *Das Fermat-Prinzip besagt, dass ein Lichtstrahl denjenigen Weg sucht, den er in kürzester Zeit zurücklegen kann. Gegeben sei ein ebenes anisotropes Medium mit der Lichtgeschwindigkeit $v = v(x,y)$ bzw. dem Brechnungsindex $n(x,y) = c_0/v(x,y)$, wobei die Konstante c_0 die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bezeichnet. Wie lautet das Zeitfunktional für den Lichtweg von (x_0, y_0) nach (x_1, y_1)?*

Ü 12 *Wiederholen Sie die Bestimmung der Extremstellen von Funktionen mehrerer Veränderlicher.*

1.2 Gâteaux-Variation, Variationsgleichung

Im folgenden Abschnitt betrachen wir das folgende Minimumproblem:

$$\text{Gesucht ist } y_* \in V_* \subset X: \; J(y_*) = \text{Extr} \tag{1}$$

Dabei ist X ein Funktionenraum und V_* eine Teilmenge mit bestimmten Eigenschaften, wie zum Beispiel Randbedingungen.

E 13 *Euler hat die Lösung dieser Aufgabe auf Extremwertaufgaben einer reellen Veränderlichen zurückgeführt:*

Sei $v \in V_0$ eine beliebige Funktion. Wenn J in y_* einen Extremwert besitzt, dann besitzt

$$h(\varepsilon) = J(y_* + \varepsilon v)$$

in $\varepsilon = 0$ ein Extremum, das heißt, es muss

$$0 = \left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon\to 0} \tfrac{1}{\varepsilon}\left[J(y_* + \varepsilon v) - J(y_*)\right]$$

gelten.

Def 14 *Die Zahl*

$$\delta J(y; v) := \lim_{\varepsilon\to 0} \tfrac{1}{\varepsilon}\left[J(y + \varepsilon v) - J(y)\right] = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} J(y + \varepsilon v)\right|_{\varepsilon=0}$$

heißt erste Variation oder Gâteaux-Variation von J in y in Richtung v (vorausgesetzt, der Grenzwert existiert).

Bsp 15 Sei $X = C[a, b]$ und

$$J(y) = \int_a^b y(x)^2 \,\mathrm{d}x.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\delta J(y; v) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \int_a^b (y(x) + \varepsilon v(x))^2 \,\mathrm{d}x\right|_{\varepsilon=0} \\
&= \int_a^b \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}(y(x) + \varepsilon v(x))^2\right|_{\varepsilon=0} \mathrm{d}x \\
&= \int_a^b 2(y(x) + \varepsilon v(x))v(x)|_{\varepsilon=0} \,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_a^b y(x)v(x) \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Aus der Überlegung in Erklärung 13 erhält man den folgenden Satz.

Satz 16 *Für eine Lösung y_* des Variationsproblems (1) gilt für alle „zulässigen“ $v \in X$*

$$\delta J(y_*; v) = 0$$

sofern die erste Variation existiert.

Def 17 *Eine Funktion v ist im Sinne von Satz 16 zulässig, wenn eine Zahl $\varepsilon_0(v)$ existiert, so dass*

$$\forall |\varepsilon| < \varepsilon_0(v): \; y_* + \varepsilon v \in V_*.$$

E 18 *Aus $y_* + \varepsilon v \in V_*$ folgt, dass nur Funktionen $v \in V_0$ zulässig sein können. Dabei ist $V_0 \subset X$ derjenige Teilraum, bei dem die Bedingungen, die für V_* gefordert werden, mit Null erfüllt werden.*

Bsp 19 Beim Brachistochrone-Problem 1 ist

$$\begin{aligned} V_* &= \{y \in C^1(0,a) \cap C[0,a] : y(0) = 0,\; y(a) = b\}, \\ V_0 &= \{y \in C^1(0,a) \cap C[0,a] : y(0) = 0,\; y(a) = 0\}. \end{aligned}$$

Bem 20 Mit diesem Satz werden stets nur *Kandidaten* für ein Extremum bestimmt. Es ist zu prüfen, ob sie die gewünschte Extremaleigenschaft besitzen. (Das ist mühsam, aber manchmal aus physikalischen Gründen klar.)

Bsp 21 (Gleichgewichtslage einer Saite) Es ist

$$V_* = V_0 = \left\{u \in W^{1,2}(0,\ell) : \; u(0) = u(\ell) = 0\right\}.$$

In Beispiel 2 wurde bereits hergeleitet, dass die Auslenkung $u(x)$ der Saite in der Gleichgewichtslage das Funktional

$$E(u) = \tfrac{1}{2} S \int_0^\ell u'(x)^2 \,\mathrm{d}x - \int_0^\ell f(x) u(x) \,\mathrm{d}x$$

minimiert. Die Funktion $h(\varepsilon) := E(u_* + \varepsilon v)$ nimmt folglich für beliebiges $v \in V_0$ ihr Minimum bei $\varepsilon = 0$ an, d. h., es gilt

$$0 = h'(\varepsilon) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} E(u_* + \varepsilon v)\Big|_{\varepsilon=0} = \delta E(u; v).$$

Bestimmen wir also die erste Variation des Funktionals $E(u)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \delta E(u; v) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \left[\tfrac{1}{2} S \int_0^\ell (u'(x) + \varepsilon v'(x))^2 \,\mathrm{d}x - \int_0^\ell f(x)(u(x) + \varepsilon v(x)) \,\mathrm{d}x \right]_{\varepsilon=0} \\ &= \tfrac{1}{2} S \int_0^\ell 2(u'(x) + \varepsilon v'(x)) v'(x) \,\mathrm{d}x - \int_0^\ell f(x) v(x) \,\mathrm{d}x \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= S \int_0^\ell u'(x) v'(x) \,\mathrm{d}x - \int_0^\ell f(x) v(x) \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Die Gleichgewichtslage der Saite wird folglich auch beschrieben durch

$$S \int_0^\ell u'(x) v'(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^\ell f(x) v(x) \,\mathrm{d}x \qquad \forall v(x) \in V_0.$$

Da $u_* + \varepsilon v \in V_0$ verlangt wird, muss auch $v \in V_0$ sein, d.h. $v(0) = v(\ell) = 0$.

E 22 (Verallgemeinerung) *Für allgemeine Funktionale*

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

und

$$y \in V_* = \{y \in C^1[a,b] : \; y(a) = y_0,\; y(b) = y_1\}$$

wie in Beispiel 7 ist die erste Variation

$$\begin{aligned}\delta J(y; v) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \int_a^b F(x, y + \varepsilon v, y' + \varepsilon v')\,\mathrm{d}x \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} v + \frac{\partial F}{\partial y'} v' \right) \mathrm{d}x\end{aligned}$$

wobei

$$v \in V_0 = \{y \in C^1[a,b] : \; y(a) = y(b) = 0\}.$$

Bsp 23 (Rotationsminimalfläche) In der Übung 10 wurde bereits

$$\begin{aligned}M(y) &= 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x, \\ V_* &= \left\{y(x) \in C^1[x_0, x_1] : \; y(x_0) = y_0,\; y(x_1) = y_1\right\}, \\ V_0 &= \left\{y(x) \in C^1[x_0, x_1] : \; y(x_0) = y(x_1) = 0\right\}\end{aligned}$$

hergeleitet. Daraus ergibt sich für den Integranden

$$\begin{aligned}F(x, y, y') &= y\sqrt{1 + y'^2} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \sqrt{1 + y'^2} \\ \frac{\partial F}{\partial y'} &= y \cdot \tfrac{1}{2}\left(1 + y'^2\right)^{-1/2} \cdot 2y'\end{aligned}$$

und folglich für die erste Variation

$$\delta M(y; v) = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} \left[\sqrt{1 + y'^2} v + \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} v' \right] \mathrm{d}x.$$

Bsp 24 (Brachistochrone-Problem) In Beispiel 1 wurde

$$\begin{aligned}T(y) &= \int_0^a \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2gy(x)}}\,\mathrm{d}x, \\ V_* &= \{y \in C^1(0,a) \cap C[0,a] : y(0) = 0,\; y(a) = b\}, \\ V_0 &= \{y \in C^1(0,a) \cap C[0,a] : y(0) = y(a) = 0\}\end{aligned}$$

hergeleitet. Daraus ergibt sich für den Integranden

$$\begin{aligned}F(x, y, y') &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \left[1 + y'^2\right]^{1/2} y^{-1/2} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \left[1 + y'^2\right]^{1/2} \left(-\tfrac{1}{2}\right) y^{-3/2} \\ \frac{\partial F}{\partial y'} &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{1}{2} \left[1 + y'^2\right]^{-1/2} 2y' y^{-1/2}\end{aligned}$$

und folglich für die erste Variation

$$\begin{aligned}\delta T(y;v) &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \left\{ -\tfrac{1}{2} \left[1+y'^2\right]^{1/2} y^{-3/2} v + \tfrac{1}{2} \left[1+y'^2\right]^{-1/2} 2y' y^{-1/2} v' \right\} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{1}{2} \int_0^a \left[1+y'^2\right]^{-1/2} y^{-3/2} \left(-(1+y'^2)v + 2yy'v' \right) \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Die Variationsaufgabe lautet demnach:

$$\text{Gesucht is } y \in V_* \ : \quad \int_0^a \frac{-(1+y'^2)v + 2yy'v'}{(1+y'^2)^{1/2} y^{3/2}} \, \mathrm{d}x = 0 \quad \forall v \in V_0.$$

Ü 25 *Bestimmen Sie die erste Variation des Zeitfunktionals des Fermat-Prinzips aus Aufgabe 11.*

Ü 26 *Bestimmen Sie die erste Variation der Wirkung des Hamilton-Prinzips für den Federschwinger aus Beispiel 3.*

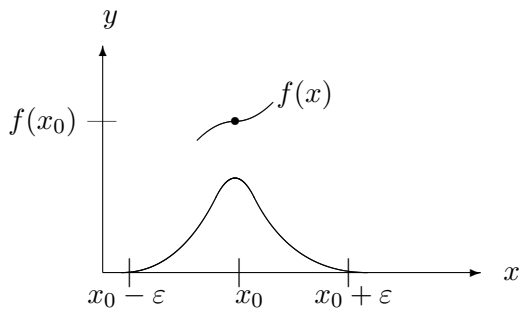
1.3 Differentialgleichung

Satz 27 (Fundamentalsatz der Variationsrechnung) *Sei $f \in C[a,b]$. Wenn für alle $g \in \{v \in C^2[a,b] : \ v(a) = v(b) = v'(a) = v'(b) = 0\}$ (oder $g \in C_0^\infty[a,b]$, was eine kleinere Anzahl von Funktionen ist) die Gleichung*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

gilt, dann ist $f(x) \equiv 0$. Der Satz gilt entsprechend, wenn das Integrationsgebiet mehrdimensional ist.

Beweis Wir beweisen den Satz indirekt. Dazu nehmen wir an, es gäbe ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) \neq 0$, o.B.d.A. $f(x_0) > 0$.



Da f stetig ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon,\, x_0 + \varepsilon).$$

Wählen nun die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} (x - x_0 + \varepsilon)^4 (x - x_0 - \varepsilon)^4 & \text{in } (x_0 - \varepsilon,\, x_0 + \varepsilon), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt $g(x) > 0$ in $(x_0 - \varepsilon,\, x_0 + \varepsilon)$. Außerdem ist g zulässig, $g \in \{v \in C^2[a,b] : v(a) = v(b) = 0\}$. Für das Integral gilt aber

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x > 0,$$

was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Damit muss die Annahme falsch sein. Es gibt also kein $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) \neq 0$. q.e.d.

Bem 28 Aus $\int_a^b f(x)g(x) = 0$ folgt nicht zwingend, dass $f(x) \equiv 0$ oder $g(x) \equiv 0$ ist. Es ist wichtig, dass das Integral für alle zulässigen g Null ist.

Was nützt uns dieser Satz?

Bsp 29 (Gleichgewichtslage einer Saite) In Beispiel 21 wurde die Bedingung

$$0 = S \int_0^\ell u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^\ell f(x)v(x)\,\mathrm{d}x \qquad \forall v(x) \in V_0 \tag{2}$$

hergeleitet, wobei $V_0 = \{u \in W^{1,2}(0,\ell) : \; u(0) = u(\ell) = 0\}$. Integriert man den ersten Term partiell, ergibt sich

$$\int_0^\ell u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^\ell u''(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \underbrace{u'(x)v(x)\Big|_0^\ell}_{0 \text{ wegen RB}}. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt

$$0 = \int_0^\ell [-Su''(x) - f(x)]\,v(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall v \in V_0.$$

Da $V_0 \supset \{v \in C^2[0,\ell] : \; v(0) = v(\ell) = 0\}$ gilt, ist der Fundamentalsatz der Variationsrechnung anwendbar und liefert die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -Su''(x) - f(x) &= 0 && \text{(Differentialgleichung)} \\ u(0) = u(\ell) &= 0 && \text{(Randbedingungen)} \end{aligned}$$

Für die Differentialgleichungsformulierung brauchen wir höhere Glattheit $u \in C^2[0,\ell]$.

Satz 30 *Ist die Lösung $y_0(x)$ der Extremalaufgabe*

$$J(y) = \int_a^b F(x,y,y')\,\mathrm{d}x = \text{Extr}$$

im Raum $C^2[a,b]$ enthalten, dann erfüllt sie die Euler-Lagrange-Differentialgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \forall x \in (a,b).$$

Beweis Laut Satz 16 gilt

$$0 = \delta J(y;v) = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}v + \frac{\partial F}{\partial y'}v'\right)\,\mathrm{d}x \quad \forall v \in V_0$$

Die partielle Integration des zweiten Terms liefert

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'}v'\,\mathrm{d}x = \frac{\partial F}{\partial y'}v\Big|_a^b - \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\,v\,\mathrm{d}x.$$

Da $v(a) = v(b) = 0$ ist, folgt weiter

$$0 = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)v\,\mathrm{d}x \quad \forall v \in V_0.$$

Mit dem Fundamentalsatz 27 folgt die Behauptung. q.e.d.

E 31 *Was bedeutet* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}$*? Wegen* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ *(und nicht* $\frac{\partial}{\partial x}$*) handelt es sich um eine totale Ableitung. Ist* $F = F(x, y(x), y'(x))$*, dann ist*

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial}{\partial y'}\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}\\ &= F_{,y'x} + F_{,y'y}y' + F_{,y'y'}y''.\end{aligned}$$

Man kann die Euler-Lagrange-Gleichung also auch in der Form

$$F_{,y} - F_{,y'x} - F_{,y'y}y' - F_{,y'y'}y'' = 0$$

schreiben.

Bsp 32 (Von der Randwertaufgabe zur Variationsgleichung) Wir betrachten die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}-\big(k(x)u'(x)\big)' + c(x)u(x) &= f(x) \quad \text{in } (0,1),\\ u(0) = u(1) &= 0.\end{aligned} \tag{4}$$

Wir setzen $V_0 = \{u \in W^{1,2}(0,1) : u(0) = u(1) = 0\}$, multiplizieren die Differentialgleichung (4) mit $v \in V_0$ und integrieren über das Interval $(0,1)$. Wir erhalten

$$-\int_0^1 \big(k(x)u'(x)\big)' v(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 c(x)u(x)v(x) = \int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall v \in V_0.$$

Partielle Integration und Einsetzen der Randwerte liefert für das erste Integral

$$\begin{aligned}-\int_0^1 \big(k(x)u'(x)\big)' v(x)\,\mathrm{d}x &= -k(x)u'(x)v(x)\big|_0^1 + \int_0^1 k(x)u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 k(x)u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Variationsaufgabe

Finde $u \in V_0$:

$$\int_0^1 \big[k(x)u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall v \in V_0.$$

Das zugehörige Extremalproblem (hier Minimumproblem) lautet

Finde $u \in V_0$:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 \big[k(x)u'(x)^2 + c(x)u(x)^2\big]\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)u(x)\,\mathrm{d}x \to \text{Extr},$$

was durch Bilden von $\delta J(u; v)$ überprüft werden kann.

E 33 *Für die Randwertaufgabe*

$$\begin{aligned}-\big(k(x)u'(x)\big)' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) &= f(x) \qquad \textit{in } (0,1)\\ u(0) = u(1) &= 0\end{aligned}$$

ergibt sich die Variationsgleichung

$$\int_0^1 \big[ku'v' + bu'v + cuv\big]\,\mathrm{d}x = \int_0^1 fv\,\mathrm{d}x \quad \forall v \in V_0.$$

Hierzu gibt es aber kein Extremalproblem.

Ü 34 *Man zeige, dass die Kettenlinie*

$$y(x) = c \cosh \frac{x+a}{c}$$

mit geeigneten a und c die Minimalflächenaufgabe aus Beispiel 23 löst.

1.4 Sonderfälle

Die Euler-Lagrange-Differentialgleichung ist in einigen Fällen analytisch lösbar bzw. vereinfachbar.

E 35 (F ist linear in y'.) *Das bedeutet, dass die Funktion F die Darstellung*

$$F(x, y, y') = P(x, y) + Q(x, y)y'$$

hat. Die zugehörige Euler-Lagrange-Differentialgleichung lässt durch

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} y' \\
\frac{\partial F}{\partial y'} &= Q(x, y) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F}{\partial y'} &= \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} y'
\end{aligned}$$

herleiten. Damit ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F}{\partial y'} \\
&= \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} y' - \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} y' \right) \\
&= \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Die Euler-Lagrange-Differentialgleichung für die betrachtete Funktion F ist

$$\frac{\partial P(x, y(x))}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y(x))}{\partial x}$$

Folgende Fälle können auftreten

1. *Wenn $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ ist, oder $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ nur in einzelnen Punkten gilt, dann hat das Problem keine Lösung.*
2. *Wenn $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ für einzelne Kurven $y = y(x)$ erfüllt ist, dann sind diese Kurven Lösungen der Euler-Lagrange-Differentialgleichung. (Es ist gegebenenfalls noch auszuwählen, welche der Kurven die richtige Extremaleigenschaft besitzt.)*
3. *Wenn $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ überall erfüllt ist, dann sind alle $y \in V_*$ Lösung der Variationsaufgabe (vgl. Wegunabhängigkeit eines Integrals).*

E 36 (F hängt nicht explizit von y ab.) *Die Funktion F habe die Darstellung*

$$F(x, y, y') = F(x, y')$$

In diesem Fall ist die Euler-Lagrange-Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0,$$

was zu

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = c = \mathrm{const}$$

äquivalent ist.

Bsp 37 Wir bestimmen den kürzesten Weg zwischen 2 Punkten in der Ebene, d. h. die kürzeste Kurve $y(x)$ vom Punkt (x_0, y_0) zum Punkt (x_1, y_1).

Sei o.B.d.A. sei $x_0 < x_1$. Die Bogenlänge berechnet sich als

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

mit $y \in V_* = \{y \in C^1(x_0, x_1) : y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1\}$. Wir bemerken, dass

$$F(x, y, y') = F(y') = \sqrt{1 + y'(x)^2}$$

nicht von y abhängt und folgern mit

$$\begin{aligned} F_{,y} &= 0 \\ F_{,y'} &= \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \end{aligned}$$

und Satz 30 die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} 0 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) &= 0, \\ y(x_0) &= y_0, \\ y(x_1) &= y_1. \end{aligned}$$

Wie in Erklärung 36 dargelegt, folgt hieraus sofort

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c,$$

wobei man in diesem Beispiel für die Konstante c die Beschränkung $c \in (-1, 1)$ folgern kann.

Diese Differentialgleichung kann man mit den Schritten

$$\begin{aligned} y' &= c\sqrt{1 + y'^2}, \\ y'^2 &= c^2(1 + y'^2), \\ (1 - c^2)y'^2 &= c^2, \\ y' &= \pm\sqrt{\frac{c^2}{1 - c^2}} =: a = \text{const}, \\ y &= ax + b, \end{aligned}$$

lösen. Die Extremalkurven sind Geraden.

Das Einsetzen der Randbedingungen liefert die Lösung

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x + \frac{y_0 x_1 - y_1 x_0}{x_1 - x_0}.$$

E 38 (F hängt nicht von y' ab.) *Die Funktion F habe die Darstellung*

$$F(x, y, y') = F(x, y)$$

In diesem Fall ist die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

keine Differentialgleichung. Das ist bereits eine implizite Darstellung der Extremalen.

E 39 (F hängt nicht explizit von x ab.) *Die Funktion F habe die Darstellung*

$$F(x, y, y') = F(y, y').$$

Angewandt auf die Euler-Lagrange-Differentialgleichung in der Form von Erklärung 31 bedeutet das

$$0 = F_{,y} - \underbrace{F_{,y'x}}_{=0} - F_{,y'y}y' - F_{,y'y'}y'' \tag{5}$$

Damit ergibt sich die Eigenschaft

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F - y'F_{,y'}) &= F_{,y}y' + F_{,y'}y'' - y''F_{,y'} - y'(F_{,y'y}y' + F_{,y'y'}y'') \\ &= y'(F_{,y} - F_{,y'y}y' - F_{,y'y'}y'') \\ &= 0 \quad \text{wegen (5)},\end{aligned}$$

das heißt, aus Gleichung (5) folgt das Eulersche Zwischenintegral

$$F - y'F_{,y'} = c = \text{const} \tag{6}$$

in dem alle Extremalen enthalten sind.

Wenn möglich, löst man die Gleichung (6) nach y' auf:

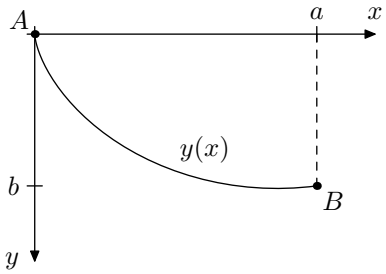
$$y' = \Phi(y, c).$$

Trennung der Veränderlichen liefert dann

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \Phi(y, c) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\Phi(y, c)} &= \mathrm{d}x \\ x &= \int \frac{\mathrm{d}y}{\Phi(y, c)}.\end{aligned}$$

Man findet also $x = x(y)$, eine ebenso gute Bahngleichung wie $y = y(x)$.

Bsp 40 (Brachistochrone-Problem)



Wie in Beispiel 1 bereits hergeleitet, lautet das Variationsproblem: Finde dasjenige $y \in V_*$, das das Funktional $T(y)$ minimiert, wobei

$$V_* = \{y \in C^1(0,a) \cap C[0,a] : y(0) = 0,\ y(a) = b\},$$
$$T(y) = \int_0^a \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,\mathrm{d}x.$$

Im folgenden wird das äquivalente Zielfunktional

$$T(y) = \int_0^a \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\,\mathrm{d}x$$

verwendet. Der Integrand F hat die Form

$$F(x,y,y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}},$$

hängt also nicht explizit von x ab. Damit muss

$$F - y'F_{,y'} = c = \text{const}$$

gelten. Weiter ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} - y'\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = c \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1+y'^2-y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = c && \text{(Hauptnenner)} \\
\Rightarrow \quad & y(1+y'^2) = \frac{1}{c^2} && \text{(Quadrieren, Reziproke)} \qquad (7) \\
\Rightarrow \quad & c^2 y = \frac{1}{1+y'^2}. && (8)
\end{aligned}$$

Wir suchen nun die Lösungskurve in einer Parameterdarstellung $[x(t), y(t)]^T$, für die

$$y' = \cot\frac{t}{2}, \quad t \in [0, 2\pi) \tag{9}$$

gilt. Damit ergibt sich zum einen

$$c^2 y = \frac{1}{1+\cot^2\frac{t}{2}} = \frac{\sin^2\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2}} = \sin^2\frac{t}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos t) \tag{10}$$

$$\Rightarrow \quad c^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{2} = \sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}. \tag{11}$$

Andererseits gilt auch $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y' \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{y'}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\
&= \tan\frac{t}{2} \cdot \frac{1}{c^2}\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} && \text{mit (9) und (11)} \\
&= \frac{1}{c^2}\sin^2\frac{t}{2} \\
\Rightarrow \qquad x(t) &= \frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{2}(t-\sin t) + c_1\right] && (12)
\end{aligned}$$

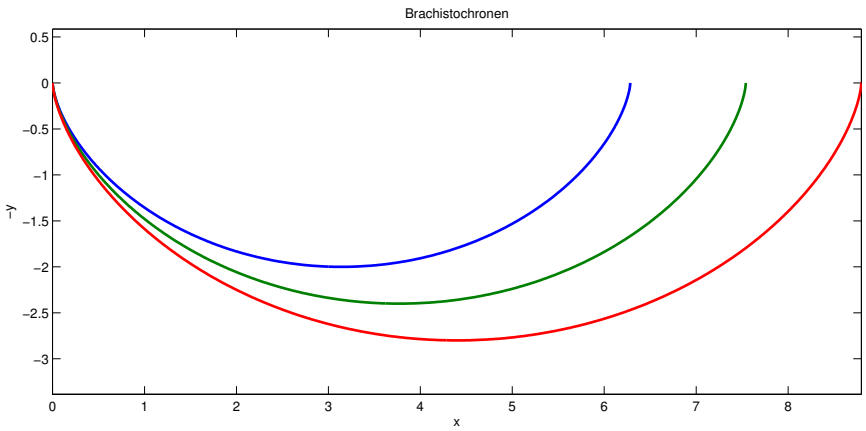
Die Gleichungen (10) und (12) liefern die Parameterdarstellung der Brachistochrone:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{c^2}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(t-\sin t) + c_1 \\ \frac{1}{2}(1-\cos t) \end{bmatrix}.$$

Die Konstanten sind so zu bestimmen, dass die Kurve durch $(0,0)$ und (a,b) geht. Aus $y = 0$ folgt $t = 0$, also muss $x(0) = 0$ gelten, und damit $c_1 = 0$. Zur Bestimmung von c ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2c^2}(t-\sin t) &= a \\
\frac{1}{2c^2}(1-\cos t) &= b,
\end{aligned}$$

welches genau eine Lösung hat.



Ü 41 *Lösen Sie die Variationsaufgabe zum Fermat-Prinzip mit $v = v(y)$, d.h., mit Brechungsindex $n(y) = 1/v(y)$, vgl. Aufgabe 11.*

a) $v = v(y) = \sqrt{y}$

b) $v = v(y) = y$

Hinweis zu a) Nach dem Aufschreiben des Eulerschen Zwischenintegrals sollten Sie erst einmal durchatmen und kurz nachdenken, ob Ihnen dieses bekannt vorkommt. Zu b) Hier ist die Lösung etwas länger, kann aber mit derselben Substitution wie in Beispiel 40 hergeleitet werden.

Ü 42 *Lösen Sie die Variationsaufgabe aus Beispiel 23, um die in Aufgabe 34 angegebene Funktion herzuleiten.*

2 Näherungsverfahren zur Lösung von Variationsaufgaben

2.1 Das Ritz-Verfahren

E 43 (Grundidee) *Ausgangspunkt ist das Minimumproblem*

$$\text{Finde} \quad u_* \in V_* : \; J(u_*) = \min_{u \in V_*} J(u). \tag{13}$$

Nach W. Ritz (1878–1909) ist die Idee benannt, das Problem (13) in einem endlich-dimensionalen Teilraum $V_{*,n} \subset V_*$ zu behandeln:

$$\text{Finde} \quad u_{*,n} \in V_{*,n} : \; J(u_{*,n}) = \min_{u_n \in V_{*,n}} J(u_n) \tag{14}$$

E 44 (Konstruktionsprinzip von $V_{*,n}$) *Seien $v_* \in V_*$ und $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in V_0$ linear unabhängige Funktionen, dann ist*

$$\begin{aligned} V_{*,n} &= \left\{ v : \; v = v_* + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i, \; \alpha_i \in \mathbb{R} \right\} \\ &= v_* + \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \\ &\subset V_*. \end{aligned}$$

Damit ist (14) äquivalent zu

$$\text{Finde } \alpha_1, \ldots, \alpha_n : \quad J\Big(v_* + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i\Big) \to \min . \tag{15}$$

Man hat folglich das Gleichungssystem

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} J\Big(v_* + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i\Big) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{16}$$

zu lösen.

E 45

1. *Für zahlreiche interessante Funktionale, z. B. bei der Gleichgewichtslage einer Saite/Membran, ist (16) ein lineares Gleichungssystem.*

2. *Die Funktionen $v_*, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sollten so gewählt werden, das u_* möglichst gut approximiert wird.*

3. *Die Funktion v_* ist nur dafür da, dass $u_{*,n}$ die Randbedingungen erfüllt, kann also z. B. als Polynom 1. Grades gewählt werden (im Eindimensionalen).*

Bsp 46 Gesucht ist $u_* \in V_* = \{u \in C^1[-1,1] : u(-1) = 0, u(1) = 2\}$, so dass

$$J(u_*) = \min_{u \in V_*} J(u), \qquad J(u) = \int_{-1}^{1} \left(\tfrac{1}{2}u'(x)^2 + 3u(x)\sin \pi x\right) \, \mathrm{d}x$$

(a) Sei $v_*(x) = 1 + x$, $\varphi_1(x) = 1 - x^2$, $\varphi_2(x) = x(1 - x^2)$.
Für alle $u_2(x) = (1 + x) + \alpha_1(1 - x^2) + \alpha_2 x(1 - x^2)$ gilt

$$J(u_2) = 1 + \frac{6}{\pi} + \frac{4}{3}\alpha_1^2 + \frac{4}{5}\alpha_2^2 + \frac{36}{\pi^3}\alpha_2.$$

Das kann mit dem folgenden Skript berechnet werden.

```
syms x alpha1 alpha2
u=1+x+alpha1*(1-x^2)+alpha2*x*(1-x^2);
ustrich=diff(u,x);
J=int(0.5*ustrich^2+3*u*sin(pi*x),x,-1,1)
```

Aus $\frac{\partial J(u_2)}{\partial \alpha_1} = 0$ und $\frac{\partial J(u_2)}{\partial \alpha_2} = 0$ folgt

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -\frac{45}{2\pi^3}.$$

```
solve(diff(J,alpha1)) % haengt hier nicht von alpha2 ab
solve(diff(J,alpha2)) % haengt hier nicht von alpha1 ab
```

Die Näherungslösung ist also

$$u_{*,n} = u_{*,2} = 1 + x - \frac{45}{2\pi^3}x(1 - x^2),$$

wobei $J(u_{*,2}) \approx 2{,}4886$ ist.

(b) Sei $v_*(x) = 1 + \sin \frac{\pi}{2}x$, $\varphi_1(x) = \sin \pi x$, $\varphi_2(x) = \sin 2\pi x$.
Für $u_2(x) = 1 + \sin \frac{\pi}{2}x + \alpha_1 \sin \pi x + \alpha_2 \sin 2\pi x$ gilt

$$J(u_2) = 3\alpha_1 + \frac{8}{\pi} + \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2}\alpha_1^2\pi^2 + 2\pi^2\alpha_2^2 + \frac{2}{3}\alpha_1\pi - \frac{4}{15}\alpha_2\pi$$

Aus $\frac{\partial J(u_2)}{\partial \alpha_1} = 0$ und $\frac{\partial J(u_2)}{\partial \alpha_2} = 0$ folgt

$$\alpha_1 = -\frac{9 + 2\pi}{3\pi^2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{15\pi}.$$

Die Näherungslösung ist also

$$u_{*,n} = u_{*,2} = 1 + \sin \tfrac{\pi}{2}x - \frac{9 + 2\pi}{3\pi^2} \sin \pi x + \frac{1}{15\pi} \sin 2\pi x,$$

wobei $J(u_{*,2}) \approx 2{,}4565$ ist.

Variante (b) liefert die bessere Approximation, da der Funktionalwert kleiner ist.

Man kann in diesem einfachen Beispiel die Euler-Differentialgleichung $-u'' + 3\sin \pi x = 0$ auch exakt lösen und erhält $u_* = 1 + x - \frac{3}{\pi^2} \sin \pi x$ und $J(u_*) \approx 2{,}4539$, was uns eine Vorstellung über die Genauigkeit der Lösung gibt.

(c) Sei allgemein

$$f(x) = -3\sin \pi x,$$
$$u_n(x) = v_*(x) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j(x).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
J(u) &= \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2} \left(v_*' + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j' \right)^2 - f \left(v_* + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j \right) \right] \mathrm{d}x, \\
\frac{\partial J}{\partial \alpha_i} &= \int_{-1}^{1} \left[\left(v_*' + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j' \right) \varphi_i' - f\varphi_i \right] \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \left(v_*' \varphi_i' - f\varphi_i \right) \mathrm{d}x + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_{-1}^{1} \varphi_j' \varphi_i' \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Setzen wir nun diese Ableitungen gleich Null, erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_{-1}^{1} \varphi_j' \varphi_i' \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left(f\varphi_i - v_*' \varphi_i' \right) \mathrm{d}x, \quad i = 1, \ldots, n,$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$\begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} \varphi_1' \varphi_1' \, \mathrm{d}x & \int_{-1}^{1} \varphi_2' \varphi_1' \, \mathrm{d}x & \cdots & \int_{-1}^{1} \varphi_3' \varphi_1' \, \mathrm{d}x \\ \vdots & & & \vdots \\ \int_{-1}^{1} \varphi_1' \varphi_n' \, \mathrm{d}x & \int_{-1}^{1} \varphi_2' \varphi_n' \, \mathrm{d}x & \cdots & \int_{-1}^{1} \varphi_3' \varphi_n' \, \mathrm{d}x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} (f\varphi_1 - v_*' \varphi_1') \, \mathrm{d}x \\ \vdots \\ \int_{-1}^{1} (f\varphi_n - v_*' \varphi_n') \, \mathrm{d}x \end{bmatrix}.$$

Es müssen also im Allgemeinen $n^2 + n$ Integrale berechnet werden. Wie kann man diese Anzahl verringern?

2.2 Galerkin-Verfahren

E 47 (Grundidee) *Ausgangspunkt ist die Variationsformulierung*

$$\text{Finde } u_* \in V_* \subset X: \quad \delta J(u_*; v) = 0 \quad \forall v \in V_0 \subset X.$$

Wir wählen einen Teilraum $V_{0,n} \subset V_0$ sowie ein Element $v_* \in V_*$ und setzen

$$V_{*,n} = \{v: \ v = v_* + v_{0,n}, \ v_{0,n} \in V_{0,n}\}.$$

Man beachte, dass $V_{0,n}$ und $V_{*,n}$ von der gleichen Dimension n und Teilmengen von X sind.

Die Galerkin-Formulierung lautet nun:

$$\text{Finde } u_{*,n} \in V_{*,n} \subset X: \quad \delta J(u_{*,n}; v_n) = 0 \quad \forall v_n \in V_{0,n} \subset X$$

Bsp 48 (Gleichgewichtslage einer Saite) Die Variationsformulierung lautet

$$\text{Finde } u \in V_0: \ \delta E(u; v) = S \int_0^\ell u' v' \, \mathrm{d}x - \int_0^\ell f v \, \mathrm{d}x = 0 \quad \forall v \in V_0.$$

Dann ist das Galerkin-Verfahren

$$\text{Finde } u_n \in V_{0,n}: \ \underbrace{S \int_0^\ell u_n' v_n' \, \mathrm{d}x}_{\substack{a(u_n, v_n) \\ \text{Bilinearform}}} = \underbrace{\int_0^\ell f v_n \, \mathrm{d}x}_{\substack{\langle f, v_n \rangle \\ \text{Linearform} \\ \text{(Lineares Funktional)}}} \qquad \forall v_n \in V_{0,n}$$

Ein *lineares Funktional* (eine *Linearform*) hat die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \langle f, u + v \rangle &= \langle f, u \rangle + \langle f, v \rangle && \forall u, v \in X, \\ \langle f, \alpha v \rangle &= \alpha \, \langle f, v \rangle && \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in X, \end{aligned}$$

während ein *bilineares Funktional* (eine *Bilinearform*) linear in beiden Argumenten ist, d. h.,

$$\begin{aligned} a(u + v, w) &= a(u, w) + a(v, w) && \forall u, v, w \in X, \\ a(u, v + w) &= a(u, v) + a(u, w) && \forall u, v, w \in X, \\ a(\alpha u, v) &= \alpha \, a(u, v) && \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in X, \\ a(u, \alpha v) &= \alpha \, a(u, v) && \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in X. \end{aligned}$$

Die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ in diesem Beispiel hat weitere schöne Eigenschaften. Sie ist z. B. *symmetrisch*:

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in X.$$

Ü 49 (Spezialfall linearer Probleme) *Man beweise: Hat das zu minimierende Funktional die Form*

$$J(u) = \tfrac{1}{2}a(u,u) - \langle f, u\rangle\,,$$

mit der symmetrischen Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ und dem linearen Funktional $\langle f,\cdot\rangle$, dann gilt

$$\delta J(u;v) = a(u,v) - \langle f, v\rangle\,.$$

Die Galerkin-Formulierung lautet somit

$$\text{Finde } u_{*,n} \in V_{*,n}:\ a(u_{*,n}, v_n) = \langle f, v_n\rangle \quad \forall v_n \in V_{0,n} \tag{17}$$

Hinweis: Wenn man die Eigenschaften der Linearform und der Bilinearform benutzt, dann ist $J(u+\varepsilon v)$ ein quadratisches Polynom in ε.

E 50 (Berechnung der Galerkin-Lösung (17)) *Sei $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ eine Basis in $V_{0,n}$ und*

$$V_{*,n} = v_* + \operatorname{span}\{\varphi_i\}_{i=1}^n\,.$$

Man sucht $u_{*,n}$ in der Form $u_{*,n} = v_* + u_{0,n}$. Dann ist (17) äquivalent zu

$$\text{Finde } u_{0,n} \in V_{0,n}:\ a(u_{0,n}, v_n) = \underbrace{\langle f, v_n\rangle - a(v_*, v_n)}_{\langle F, v_n\rangle} \quad \forall v_n \in V_{0,n}.$$

bzw.

$$\text{Finde } u_{0,n} \in V_{0,n}:\ a(u_{0,n}, \varphi_i) = \langle F, \varphi_i\rangle \quad i = 1,\dots,n. \tag{18}$$

Sei nun $u_{0,n} = \sum_{j=1}^n \alpha_j\varphi_j$. Dann ist (18) äquivalent zur Bestimmung der Zerlegungskoeffizienten $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, so dass

$$\begin{aligned} a\Big(\sum_{j=1}^n \alpha_j\varphi_j,\, \varphi_i\Big) &= \langle F, \varphi_i\rangle\,, && i = 1,\dots,n,\\ \sum_{j=1}^n \alpha_j a(\varphi_j,\, \varphi_i) &= \langle F, \varphi_i\rangle\,, && i = 1,\dots,n, \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} a(\varphi_1,\varphi_1) & a(\varphi_2,\varphi_1) & \cdots & a(\varphi_n,\varphi_1)\\ a(\varphi_1,\varphi_2) & a(\varphi_2,\varphi_2) & \cdots & a(\varphi_n,\varphi_2)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a(\varphi_1,\varphi_n) & a(\varphi_2,\varphi_n) & \cdots & a(\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle F,\varphi_1\rangle\\ \langle F,\varphi_2\rangle\\ \vdots\\ \langle F,\varphi_n\rangle \end{bmatrix}$$

Zu lösen ist also ein lineares Gleichungssystem. Vergleichen Sie dieses mit dem beim Ritz-Verfahren.

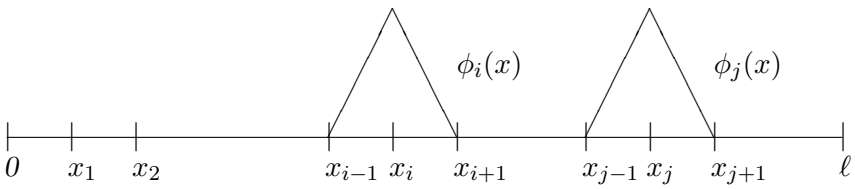
E 51 (Wahl der Basisfunktionen) *Offenbar sind zum Aufstellen der Matrix und rechten Seite des Gleichungssystems für die Gleichgewichtslage der Saite folgende Integrale zu berechnen:*

$$a(\varphi_j, \varphi_i) = S \int_0^\ell \varphi_j' \varphi_i' \, \mathrm{d}x, \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

$$\langle F, \varphi_i \rangle = \int_0^\ell (f \varphi_i - v_*' \varphi_i') \, \mathrm{d}x, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Günstig ist es, wenn viele Matrixeinträge Null werden. Das kann erreicht werden durch

- *Basisfunktionen mit kleinem Träger*



- *Orthogonalitätseigenschaften der Basis, z. B. integrierte Legendre-Polynome:*

$$\varphi_i(x) = \int_0^x L_i(t) \, \mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \varphi_i'(x) = L_i(x) \quad \Rightarrow \quad \int_0^\ell \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) \, \mathrm{d}x = \delta_{ij}$$

Bei ungeschickter Wahl der Basis ist die Matrix voll besetzt und schlecht konditioniert.

2.3 Verfahren auf der Basis der Euler-Differentialgleichung

E 52 *Numerische Verfahren, die auf der Differentialgleichungsformulierung beruhen, sind*

- *das Differenzenverfahren,*
- *das Kollokationsvrfahren.*

Diese wurden schon in der Numerik-Vorlesung behandelt.

Ü 53 *Diskutieren Sie diese Verfahren am Beispiel der Gleichgewichtslage einer Saite, siehe Beispiel 29, Seite 15.*

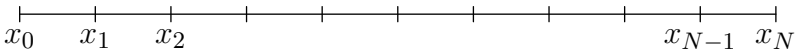
E 54 (Methode der finiten Differenzen) *Ein einfaches Verfahren zur Lösung von Randwertaufgaben ist das Differenzenverfahren (Methode der finiten Differenzen, FDM). Dabei ersetzt man*

- *das Gebiet Ω durch ein Gitter Ω_h, z. B.*

$$\Omega = (0,1), \quad \Omega_h = \{x_i = ih, i = 1, \dots, N-1\},$$

mit der Schrittweite $h = \frac{1}{N}$, und den Rand Γ durch Γ_h, hier im Beispiel

$$\Gamma = \{0,1\}, \quad \Gamma_h = \{x_0, x_N\}.$$



Analog zu $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ definieren wir auch $\overline{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h$.

- *die gesuchte Funktion u in den Gitterpunkten x_i durch die Näherungen u_i, und die Ableitungen (Differentialquotienten) durch entsprechende Differenzenquotienten:*

$$u(x_i) \approx u_i$$

$$u'(x_i) \approx \begin{cases} \dfrac{u_{i+1} - u_i}{h} & \text{Vorwärtsdifferenz} \\ \dfrac{u_i - u_{i-1}}{h} & \text{Rückwärtsdifferenz} \\ \dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} & \text{zentrale Differenz} \end{cases}$$

$$u''(x_i) \approx \frac{\dfrac{u_{i+1} - u_i}{h} - \dfrac{u_i - u_{i-1}}{h}}{h} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

Man erhält ein Gleichungssystem für die Unbekannten $u_0, \dots, u_N$.

Bsp 55 Wir betrachten die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -u'' + u &= f \quad \text{in } \Omega = (0,1), \\ u(0) &= g_0, \\ u(1) &= g_1. \end{aligned}$$

Die zum Punkt x_k, $k = 1, \ldots, N-1$, gehörige Differenzengleichung lautet

$$-\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} + u_k = f_k,$$

wobei $f_k := f_h(x_k) = f(x_k)$ gesetzt wurde.

Die Approximation kann auch als lineares Gleichungssystem geschrieben werden

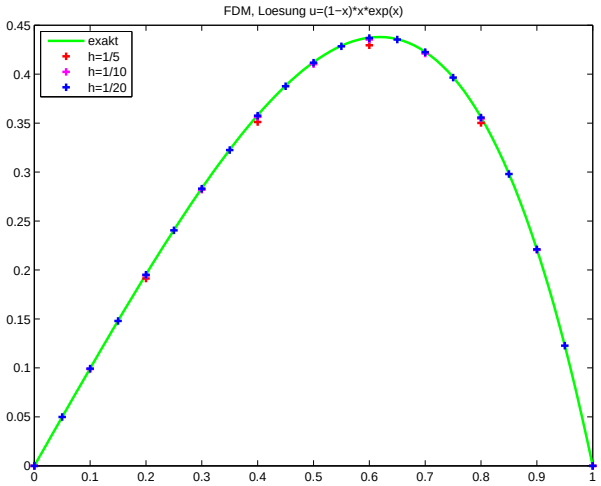
$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -\frac{1}{h^2} & 1+\frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & & & \\ & -\frac{1}{h^2} & 1+\frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{h^2} & 1+\frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ g_1 \end{bmatrix}$$

Oft eliminiert man die erste und letzte Gleichung.

Zur Illustration wählen wir die Daten f, g_0 und g_1 so, dass

$$u(x) = x(1-x)\mathrm{e}^x$$

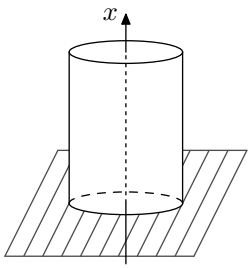
die exakte Lösung ist. Im folgenden Diagramm wird die Lösung und die Näherungslösung mit verschiedenen Schrittweiten dargestellt.



3 Komplexere Variationsaufgaben

3.1 Andere Randbedingungen

Bsp 56 (Prinzip der minimalen Formänderungsarbeit) Gegeben ist ein Zylinder aus isotropem Material mit Höhe h, Querschnitt A, Dichte ρ und Elastizitätsmodul E.



Der Zylinder steht senkrecht auf der Unterlage und wird durch sein Eigengewicht und eine Last L auf der Oberseite deformiert. Die Schicht in Höhe x wird um $y(x)$ nach unten verschoben. Die Formänderungsarbeit durch die Lageänderung $y(x)$ und Dehnung $y'(x)$ ist

$$W(y) = A \int_0^h \left[\tfrac{1}{2}E(y'(x))^2 + \rho g y\right] \mathrm{d}x + Ly(h).$$

Die zugehörige Variationsaufgabe ist

$$W(y) = \min!, \qquad \text{wobei } y(0) = 0.$$

Es gibt keine Bedingung für $y(h)$, denn dort ist nicht die Verschiebung sondern eine Kraft vorgegeben, und diese geht ins Funktional (in die Formänderungsarbeit) ein.

E 57 (Herleitung der Variationsaufgabe im Beispiel 56) *Der passende Funktionenraum ist hier*

$$V_0 = \left\{v \in W^{1,2}(0,h) : v(0) = 0\right\}.$$

Wir leiten nun die Variationsgeichung her. Mit

$$\begin{aligned}
\delta W(y;v) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} A \int_0^h \left[\tfrac{1}{2}E(y'+\varepsilon v')^2 + \rho g(y+\varepsilon v)\right] \mathrm{d}x + L[y(h)+\varepsilon v(h)]\Big|_{\varepsilon=0} \\
&= A \int_0^h \left[E(y'+\varepsilon v')v' + \rho g v\right] \mathrm{d}x + Lv(h)\Big|_{\varepsilon=0} \\
&= A \int_0^h \left[Ey'v' + \rho g v\right] \mathrm{d}x + Lv(h)
\end{aligned}$$

folgt die Variationsaufgabe

$$\textit{Finde } y \in V_0 : EA \int_0^h y'v' \,\mathrm{d}x = -gA \int_0^h \rho v \,\mathrm{d}x - Lv(h) \quad \forall v \in V_0.$$

E 58 (Herleitung der Randwertaufgabe im Beispiel 56) *Wir betrachten die Variationsaufgabe*

$$\text{Finde } y \in V_0 : EA \int_0^h y'v' \,\mathrm{d}x = -gA \int_0^h \rho v \,\mathrm{d}x - Lv(h) \quad \forall v \in V_0.$$

Durch partielle Integration erhält man die Beziehung

$$\begin{aligned} EAy'v\Big|_0^h - EA \int_0^h y''v \,\mathrm{d}x &= -gA \int_0^h \rho v \,\mathrm{d}x - Lv(h) \\ -EAy'(h)v(h) - EA \int_0^h y''v \,\mathrm{d}x &= -gA \int_0^h \rho v \,\mathrm{d}x - Lv(h), \end{aligned} \tag{19}$$

die für alle $v \in V_0 = \left\{v \in W^{1,2}(0,h) : v(0) = 0\right\}$ *gilt. Wir betrachten nun beliebige Funktionen*

$$v \in \left\{v \in W^{1,2}(0,h) : v(0) = 0, v(h) = 0\right\} \subset V_0.$$

Für diese gilt

$$-EA \int_0^h y''v \,\mathrm{d}x = -gA \int_0^h \rho v \,\mathrm{d}x,$$

also mit dem Fundamentalsatz der Variationsrechnung (Satz 27)

$$Ey''(x) = g\rho \quad \forall x \in (0,h).$$

Setzt man diese Beziehung nun wieder in Gleichung (19) ein, erhält man

$$-EAy'(h)v(h) = -Lv(h),$$

also die Neumann-Randbedingung $EAy'(h) = L$. *Die vollständige Randwertaufgabe lautet*

$$\begin{aligned} Ey'' &= g\rho \quad \forall x \in (0,h), \\ y(0) &= 0, \\ EAy'(h) &= L. \end{aligned}$$

Die neue Randbedingung modelliert das Kräftegleichgewicht am Rand: das Gewicht $-L$ *ist gleich der Randspannung* $EAy'(h)$.

Wenn keine Last aufliegt ($L = 0$), *dann hält man auf diese Art und Weise die homogene Neumann-Randbedingung* $y'(h) = 0$ *am freien Rand.*

Bem 59 Man kann in diesem Beispiel nicht beidseits eine homogene Neumann-Randbedingung fordern, $y'(0) = y'(h) = 0$, denn dann würde nach Integration der Differentialgleichung $Ey'' = \rho g$ über das Intervall $(0,h)$ die Gleichung

$$Ey'(h) - Ey'(0) \quad = \quad \rho g h$$

folgen, wobei die linke Seite gleich Null wäre, aber die rechte nicht.

E 60 (allgemeiner Fall, homogene Neumann-Randbedingung) *Wir betrachten das Extremalproblem*

$$\begin{aligned} \text{Finde } y \in V_0 : J(y) &= \text{Extr}, \\ J(y) &= \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x, \\ V_0 &= \left\{ y \in W^{1,2}(a,b) : y(a) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Die erste Variation kann wie in Bemerkung 22 hergeleitet werden, so dass die Variationsgleichung $\delta J(y; v) = 0$ die Form

$$0 = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} v + \frac{\partial F}{\partial y'} v' \right) \mathrm{d}x \quad \forall v \in V_0$$

besitzt. Die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung erhält man wieder durch partielle Integration, wobei dieses Mal nicht alle Randterme verschwinden:

$$\begin{aligned} 0 = \delta J(y; v) &= \frac{\partial F}{\partial y'} v \Big|_a^b + \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) v \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\partial F}{\partial y'}(b) \cdot v(b) + \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) v \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt für alle $v \in V_0$, insbesondere auch für alle $v \in V_0$ mit $v(b) = 0$,

$$0 = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) v \,\mathrm{d}x \quad \forall v \in V_0 : v(b) = 0.$$

Daraus folgt die Euler-Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \forall x \in (a, b).$$

Für alle $v \in V_0$ mit $v(b) \neq 0$ gilt also

$$0 = \frac{\partial F}{\partial y'}(b) \cdot v(b),$$

woraus die natürliche Randbedingung am Rand b,

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(b) = 0,$$

folgt. Die zugehörige Randwertaufgabe lautet somit

$$\begin{aligned} \text{Finde } y(x) : \qquad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F}{\partial y'} &= 0 \quad \forall x \in (a, b), \\ y(a) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y'}(b) &= 0. \end{aligned}$$

E 61 (allgemeiner Fall, Randbedingung 2./3. Art) *Sei $V = W^{1,2}(a,b)$ (ohne Randbedingungen) und das Funktional*

$$J(y) = \int_a^b F(x,y,y')\,\mathrm{d}x + G(y(a)) - H(y(b))$$

zu minimieren, wobei G und H stetig differenzierbare Funktionen einer Veränderlichen seien. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= \delta J(y,v) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} J(y+\varepsilon v)\Big|_{\varepsilon=0} \\ 0 &= \underbrace{\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} v + \frac{\partial F}{\partial y'} v'\right] \mathrm{d}x}_{gewohnter\ Term} + \underbrace{G'(y(a))v(a)}_{=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} G(y(a)+\varepsilon v(a))\big|_{\varepsilon=0}} - \underbrace{H'(y(b))v(b)}_{=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} H(y(b)+\varepsilon v(b))\big|_{\varepsilon=0}} . \end{aligned}$$

Die Randwertaufgabe erhält man wieder mit partieller Integration und Fundamentalsatz der Variationsrechnung

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial F}{\partial y'} v\Big|_a^b + \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right] v\,\mathrm{d}x + G'(y(a))v(a) - H'(y(b))v(b), \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right] v\,\mathrm{d}x + \\ &\quad + \left[G'(y(a)) - \frac{\partial F}{\partial y'}(a)\right] v(a) - \left[H'(y(b)) - \frac{\partial F}{\partial y'}(b)\right] v(b), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} &= 0 \quad \forall x \in (a,b), \\ G'(y(a)) - \frac{\partial F}{\partial y'}(a) &= 0, \\ H'(y(b)) - \frac{\partial F}{\partial y'}(b) &= 0. \end{aligned}$$

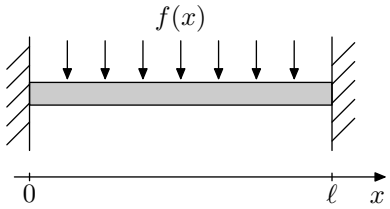
Ü 62 *Sei*

$$\begin{aligned} V_0 &= \{u \in W^{1,2}(0,1) :\ u(0) = 0\}, \\ J(u) &= \int_0^1 (u'(x)^2 - \sin \pi x u(x))\,\mathrm{d}x + u(1)^2 - 4u(1). \end{aligned}$$

Formulieren Sie die Variationsgleichung und die Randwertaufgabe.

3.2 Höhere Ableitungen

Bsp 63 (Balkenbiegung) Wir betrachten einen fest eingespannten Balken der Länge ℓ mit der Biegesteifigkeit EI, siehe Bild.



Durch eine Streckenlast $f(x)$ wird die Auslenkung $y(x)$ hervorgerufen. Diese minimiert die Formänderungsarbeit

$$W(y) = \int_0^\ell \left[\frac{1}{2}EIy''(x)^2 + f(x)y(x)\right] \mathrm{d}x$$

über der zulässigen Menge[2]

$$V_0 = \{y \in W^{2,2}(0,\ell) : \; y(0) = y'(0) = y(\ell) = y'(\ell) = 0\}.$$

E 64 (Herleitung der Variationsformulierung) *Die Variationsformulierung erhält man wie folgt:*

$$\begin{aligned} 0 &= \delta W(y,v) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\int_0^\ell \left[\frac{1}{2}EI(y''+\varepsilon v'')^2 + (y+\varepsilon v)f\right] \mathrm{d}x\Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_0^\ell \left[EIy''v'' + fv\right] \mathrm{d}x \quad \forall v \in V_0. \end{aligned}$$

E 65 (Herleitung der Randwertaufgabe) *Wir integrieren nun partiell und erhalten mit den Randbedingungen*

$$\begin{aligned} \int_0^\ell EIy''v''\,\mathrm{d}x &= \left[EIy''v'\right]_0^\ell - \int_0^\ell \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(EIy''\right)v'\,\mathrm{d}x \\ &= -\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(EIy'')v\right]_0^\ell + \int_0^\ell \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(EIy'')v\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

und somit

$$0 = \int_0^l \left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(EIy'') + f\right] v\,\mathrm{d}x \quad \forall v \in V_0.$$

Die Randwertaufgabe lautet somit

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(EIy'') + f &= 0 \quad \forall x \in (0,\ell) \\ y(0) = y'(0) = y(\ell) = y'(\ell) &= 0 \end{aligned}$$

Falls EI konstant ist, vereinfacht sich die Differentialgleichung zu

$$EIy^{(4)} + f = 0.$$

[2] Der Funktionenraum $W^{2,2}(0,\ell)$ ist die Menge aller Funktionen $v(x)$, für die $\int_0^\ell (v(x)^2 + v'(x)^2 + v''(x)^2)\,\mathrm{d}x < \infty$ ist.

E 66 (allgemeines Funktional) *Wir wollen nun Funktionale der Form*

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y', \ldots, y^{(k)})\,\mathrm{d}x$$

über der zulässigen Menge[3]

$$V_0 = \{y \in W^{k,2}(a,b) : \; y^{(j)}(a) = y^{(j)}(b) = 0, \; j = 0, \ldots, k-1\}$$

minimieren. Die Variationsformulierung erhält man, indem man die erste Variation gleich Null setzt,

$$\begin{aligned} 0 &= \delta J(y,v) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} J(y + \varepsilon v)\Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} v + \frac{\partial F}{\partial y'} v' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} v^{(k)}\right] \mathrm{d}x \quad \forall v \in V_0. \end{aligned} \tag{20}$$

Durch partielle Integration und unter Ausnutzung der Randbedingung von $v \in V_0$ erhält man

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} v' \,\mathrm{d}x &= \frac{\partial F}{\partial y'} v\Big|_a^b - \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} v \,\mathrm{d}x = -\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} v \,\mathrm{d}x, \\ \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y''} v'' \,\mathrm{d}x &= \frac{\partial F}{\partial y''} v'\Big|_a^b - \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y''} v' \,\mathrm{d}x = -\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y''} v' \,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y''} v\Big|_a^b + \int_a^b \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\partial F}{\partial y''} v \,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\partial F}{\partial y''} v \,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

das heißt allgemein

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y^{(j)}} v^{(j)} \,\mathrm{d}x = (-1)^j \int_a^b \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}\frac{\partial F}{\partial y^{(j)}} v \,\mathrm{d}x.$$

Ist F hinreichend oft differenzierbar, gilt also

$$0 = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} \pm \ldots + (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\right] v \,\mathrm{d}x,$$

woraus mit dem Hauptsatz der Variationsrechnung die Randwertaufgabe

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} \pm \ldots + (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} = 0 \quad \forall x \in (a,b), \tag{21}$$

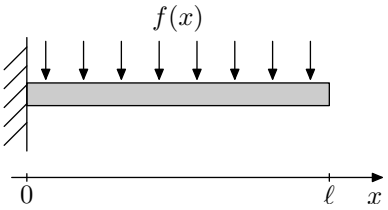
$$y^{(j)}(a) = y^{(j)}(b) = 0 \quad j = 0, \ldots, k-1 \tag{22}$$

folgt.

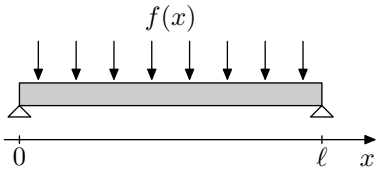
[3] Der Funktionenraum $W^{k,2}(a,b)$ ist die Menge aller Funktionen $v(x)$, für die $\int_a^b (v(x)^2 + v'(x)^2 + \cdots + v^{(k)}(x)^2)\,\mathrm{d}x < \infty$ ist.

Ü 67 *Man kombiniere das Neue von Abschnitt 3.1 und 3.2 und leite die Randwertaufgabe (insbesondere die richtige Randbedingung) für folgende Fälle her:*

(a)

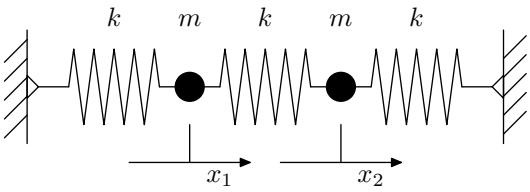


(b)



3.3 Vektorfunktionen

Bsp 68 Wir betrachten ein schwingendes System aus 2 Körpern mit der Masse m und drei Federn mit der Federkonstante k, wie im Bild gezeigt.



Die Auslenkungen der Massepunkte aus der Ruhelage werden mit $x_1(t)$ und $x_2(t)$ bezeichnet, die zu einem Vektor

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

zusammengefasst werden. Durch eine vorgegebene Anfangsauslenkung und eine Anfangsgeschwindigkeit

$$\vec{x}(0) = \vec{x}_0, \quad \dot{\vec{x}}(0) = \vec{v}_0$$

wird das System in Schwingung versetzt. Wir wollen die Bewegungsgleichungen über das Hamiltonprinzip herleiten.

Mit der kinetischen Energie

$$T(t) = \frac{m}{2}\left[\dot{x}_1(t)^2 + \dot{x}_2(t)^2\right]$$

und der potentiellen Energie

$$U(t) = \frac{k}{2}\left[x_1(t)^2 + (x_2(t) - x_1(t))^2 + x_2(t)^2\right]$$

erhalten wir das Wirkungsfunktional

$$\begin{aligned} L(\vec{x}(t)) &= \int_0^\tau (T - U)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\tau \left\{ \frac{m}{2}\left[\dot{x}_1(t)^2 + \dot{x}_2(t)^2\right] - \frac{k}{2}\left[x_1(t)^2 + (x_2(t) - x_1(t))^2 + x_2(t)^2\right] \right\} \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

für welches wir einen stationären Punkt suchen.

E 69 (Herleitung der Variationsformulierung) *Dazu bestimmen wir die erste Variation und setzen sie gleich Null:*

$$
\begin{aligned}
0 = \delta L(\vec{x},\vec{v}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} L(\vec{x}+\varepsilon\vec{v})\Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\int_0^\tau \Big\{\frac{m}{2}\Big[(\dot{x}_1+\varepsilon\dot{v}_1)^2+(\dot{x}_2+\varepsilon\dot{v}_2)^2\Big] \\
&\quad -\frac{k}{2}\Big[(x_1+\varepsilon v_1)^2+(x_2-x_1+\varepsilon(v_2-v_1))^2+\ (x_2+\varepsilon v_2)^2\Big]\Big\}\ \mathrm{d}t\Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \int_0^\tau \Big\{\frac{m}{2}\Big[2\,(\dot{x}_1+\varepsilon\dot{v}_1)\,\dot{v}_1+2\,(\dot{x}_2+\varepsilon\dot{v}_2)\,\dot{v}_2\Big] \\
&\quad -\frac{k}{2}\Big[2(x_1+\varepsilon v_1)v_1+2(x_2-x_1+\varepsilon(v_2-v_1))(v_2-v_1)+2(x_2+\varepsilon v_2)v_2\Big]\Big\}\ \mathrm{d}t\Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \int_0^\tau \Big\{m\big[\dot{x}_1\dot{v}_1+\dot{x}_2\dot{v}_2\big]-k\big[x_1v_1+(x_2-x_1)(v_2-v_1)+x_2v_2\big]\Big\}\,\mathrm{d}t \qquad (23) \\
&\qquad \forall v_1,v_2\in V_0=\big\{v\in C^1(0,\tau): v(0)=\dot{v}(0)=v(\tau)=0\big\}\,.
\end{aligned}
$$

Wir können nun $v_2(t)\equiv 0$ setzen und nur v_1 variieren bzw. $v_1(t)\equiv 0$ setzen und v_2 variieren. Dann erhalten wir statt der Variationsformulierung (23) eine Formulierung mit den beiden Variationsgleichungen

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^\tau \{m\dot{x}_1\dot{v}_1-k(2x_1-x_2)v_1\}\ \mathrm{d}t \quad \forall v_1\in V_0 \\
0 &= \int_0^\tau \{m\dot{x}_2\dot{v}_2-k(2x_2-x_1)v_2\}\ \mathrm{d}t \quad \forall v_2\in V_0.
\end{aligned}
$$

E 70 (Herleitung der Differentialgleichung) *Wir starten mit einer beiden Formulierungen aus Erklärung 69, zum Beispiel (23), und integrieren partiell,*

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^\tau \Big\{m\big[\dot{x}_1\dot{v}_1+\dot{x}_2\dot{v}_2\big]-k\big[x_1v_1+(x_2-x_1)(v_2-v_1)+x_2v_2\big]\Big\}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^\tau \Big\{m\big[\ddot{x}_1v_1+\ddot{x}_2v_2\big]+k\big[x_1v_1+(x_2-x_1)(v_2-v_1)+x_2v_2\big]\Big\}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad \forall v_1,v_2\in V_0=\big\{v\in C^1(0,\tau): v(0)=\dot{v}(0)=v(\tau)=0\big\}
\end{aligned}
$$

Wenn wir $v_2(t)\equiv 0$ setzen und nur v_1 variieren, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
0 &= m\ddot{x}_1+k\big[x_1-(x_2-x_1)\big] \\
&= m\ddot{x}_1+2kx_1-kx_2.
\end{aligned}
$$

Wenn wir andererseits $v_1(t)\equiv 0$ setzen und v_2 variieren, erhalten wir die zweite Gleichung

$$
\begin{aligned}
0 &= m\ddot{x}_2(t)+k[(x_2-x_1)+x_2] \\
&= m\ddot{x}_2+2kx_2-kx_1.
\end{aligned}
$$

Damit haben wir das System der Bewegungsgleichungen hergeleitet,

$$
m\begin{bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=0.
$$

E 71 (Allgemeiner Fall) *Wir suchen eine Vektorfunktion $\vec{x}(t)$, die das Funktional*

$$J(\vec{x}) = \int_a^b F(t, \vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t))\,\mathrm{d}t$$

minimiert. Durch Nullsetzen der ersten Variation erhält man die Variationsgleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \delta J(\vec{x}, \vec{v}) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \int_a^b F(t, \vec{x}(t) + \varepsilon\vec{v}(t), \dot{\vec{x}}(t) + \varepsilon\dot{\vec{v}}(t))\,\mathrm{d}t \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} v_i(t) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{v}_i \right) \right] \mathrm{d}t \end{aligned}$$

und nach partieller Integration,

$$\int_a^b \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} v_i(t) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{v}_i \right) \right] \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} v_i \Big|_a^b + \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) v_i \,\mathrm{d}t \right\},$$

die Euler-Lagrange-Gleichungen

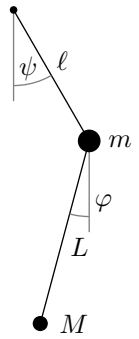
$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ü 72 (Doppelpendel)

Für die kinetische und die potentielle Energie gilt:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M \big(L\dot{\varphi} + \ell\dot{\psi}\big)^2 + \frac{1}{2} m \big(\ell\dot{\psi}\big)^2, \\ U &= \frac{1}{2} Mg \left(L\varphi^2 + \ell\psi^2\right) + \frac{1}{2} mg\ell\psi^2. \end{aligned}$$

Man leite mit dem Hamilton-Prinzip die Bewegungsgleichungen ab.



3.4 Funktionen in mehreren Variablen

E 73 (Minimierungsproblem) *In diesem Abschnitt suchen wir Funktionen $u(\vec{x})$ mit $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. Wir bezeichnen mit ∇u den Gradienten,*

$$\nabla v = \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial v}{\partial x_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{,1} \\ \vdots \\ v_{,d} \end{bmatrix}.$$

Der benötigte Funktionenraum ist wieder der Raum der Funktionen mit beschränkter Energie,

$$W^{1,2}(\Omega) \quad = \quad \left\{ v \in L^2(\Omega) : \int_\Omega |v|^2 + |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}\Omega < \infty \right\}.$$

Das zu minimierende Funktional ist

$$J(u) = \int_\Omega F(\vec{x}, u, \nabla u) \, \mathrm{d}\Omega.$$

E 74 (Herleitung der Variationsformulierung) *Zur Herleitung der ersten Variation schreiben wir das Funktional besser in der Form*

$$J(u) = \int_\Omega F\left(x_1, \ldots, x_d, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_d}\right) \mathrm{d}\Omega$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \delta J(u, v) \quad &= \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \int_\Omega F\left(x_1, \ldots, x_d, u + \varepsilon v, \frac{\partial(u + \varepsilon v)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial(u + \varepsilon v)}{\partial x_d}\right) \mathrm{d}\Omega \Bigg|_{\varepsilon=0} \\ &= \quad \int_\Omega \left(\frac{\partial F}{\partial u} v + \frac{\partial F}{\partial u_{,1}} v_{,1} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial u_{,d}} v_{,d} \right) \mathrm{d}\Omega. \end{aligned}$$

Die Variationsgleichung lautet also

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial F}{\partial u} v + \frac{\partial F}{\partial u_{,1}} v_{,1} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial u_{,d}} v_{,d} \right) \mathrm{d}\Omega = 0 \quad \forall v \in V_0.$$

E 75 (Herleitung der Differentialgleichung) *Die Euler-Lagrange-Differentialgleichung erhält mit Hilfe der Formel*

$$\int_\Omega w \frac{\partial v}{\partial x_j} \, \mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega} w v n_j \, \mathrm{d}s - \int_\Omega v \frac{\partial w}{\partial x_j} \, \mathrm{d}\Omega, \quad j = 1, \ldots, d,$$

(partielle Integration), wobei n_j die j-te Komponente des Normalenvektors an $\partial\Omega$ bezeichnet. Ist $V_0 = \{v \in W^{1,2}(\Omega) : v = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$ dann verschwindet das Randintegral. Bei hinreichender Glattheit von F erhalten wir aus der Variationsgleichung die Gleichung

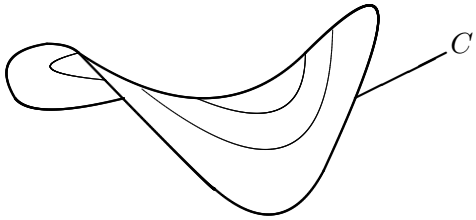
$$\int_\Omega \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial u_{,1}} - \ldots - \frac{\partial}{\partial x_d} \frac{\partial F}{\partial u_{,d}} \right) v \, \mathrm{d}\Omega = 0 \quad \forall v \in V_0$$

und damit die Differentialgleichung

$$0 = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial u_{,1}} - \ldots - \frac{\partial}{\partial x_d} \frac{\partial F}{\partial u_{,d}}$$

Zusammen mit der entsprechenden Randbedingung ergibt sich eine Randwertaufgabe.

Bsp 76 (Minimalflächen, das Plateauproblem) (nach J. Plateau, 1801 – 1883) Man sucht unter allen regulären Flächen, die von einer Raumkurve C berandet werden, diejenige(n) Fläche(n) Φ mit minimalen Flächeninhalt (vgl. Seifenblase).



Sei der Einfachheit halber die Fläche im kartesischen Koordinatensystem als Funktion $z = z(x, y)$ darstellbar,

$$\begin{aligned} \Phi &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega,\ z = z(x, y)\}, \\ C &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \partial\Omega,\ z = z_0(x, y)\}, \end{aligned}$$

wobei die den Rand definierende Funktion z_0 gegeben ist. Dann ist der Flächeninhalt der gesuchten Fläche

$$J(z) = \int_\Omega \sqrt{1 + z_{,x}^2 + z_{,y}^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Die Variationsgleichung lautet

$$\delta J(z, v) = \int_\Omega \frac{z_{,x} v_{,x} + z_{,y} v_{,y}}{\sqrt{1 + z_{,x}^2 + z_{,y}^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 0 \quad \forall v \in V_0,$$

und die zugehörige Differentialgleichung ist

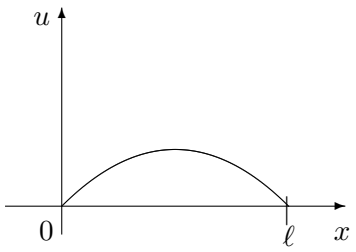
$$0 = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z_{,x}}{\sqrt{1 + z_{,x}^2 + z_{,y}^2}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z_{,y}}{\sqrt{1 + z_{,x} + z_{,y}}}\right).$$

Man könnte weiter umformen:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z_{,x}}{\sqrt{1 + z_{,x}^2 + z_{,y}^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z_{,y}}{\sqrt{1 + z_{,x}^2 + z_{,y}^2}}\right) \\ &= \frac{z_{,xx}\sqrt{1 + z_{,x}^2 + z_{,y}^2} - z_{,x}\left(\frac{z_{,x}}{\sqrt{1+z_{,x}^2+z_{,y}^2}} z_{,xx} + \frac{z_{,y}}{\sqrt{1+z_{,x}^2+z_{,y}^2}} z_{,xy}\right)}{1 + z_{,x}^2 + z_{,y}^2} \\ &\quad + \frac{z_{,yy}\sqrt{1 + z_{,x}^2 + z_{,y}^2} - z_{,y}\left(\frac{z_{,x} z_{,xy}}{\sqrt{1+z_{,x}^2+z_{,y}^2}} + \frac{z_{,y} z_{,yy}}{\sqrt{1+z_{,x}^2+z_{,y}^2}}\right)}{1 + z_{,x}^2 + z_{,y}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= z_{,xx}\left(1 + z_{,x}^2 + z_{,y}^2\right) - z_{,x}\left(z_{,x} z_{,xx} + z_{,y} z_{,xy}\right) \\ &\quad + z_{,yy}\left(1 + z_{,x}^2 + z_{,y}^2\right) - z_{,y}\left(z_{,x} z_{,xy} + z_{,y} z_{,yy}\right) \\ &= z_{,xx}\left(1 + z_{,y}^2\right) - 2 z_{,x} z_{,y} z_{,xy} + z_{,yy}\left(1 + z_{,x}^2\right). \end{aligned}$$

Bsp 77 (Schwingende Saite) Wir betrachten eine schwingende Saite, die bei $x = 0$ und $x = \ell$ eingespannt ist. Wir bezeichnen mit N die Spannkraft und mit $\rho(x)$ die lineare Massendichte. Die Saite erhält zum Zeitpunkt t_0 eine Anfangsauslenkung $u_0(x)$ und eine Anfangsgeschwindigkeit $v_0(x)$. Gesucht ist die Auslenkung $u(x,t)$ für $x \in (0,\ell)$ und $t \in (t_0, t_1]$.



Die zweite unabhängige Variable ist hier die Zeit t, so dass das betrachtete Gebiet $Q = (0,\ell) \times (t_0, t_1] \subset \mathbb{R}^2$ ist. Zur Lösung der Aufgabe wollen wir das Hamilton-Prinzip anwenden. Die potentielle Energie entspricht der Formänderungsarbeit und berechnet sich zu

$$\begin{aligned} U &= N\left(\int_0^\ell \mathrm{d}s - \ell\right) = N\left(\int_0^\ell \sqrt{1+u_{,x}^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^\ell 1\,\mathrm{d}x\right) \\ &\approx N\int_0^\ell \left(1 + \frac{1}{2}u_{,x}^2 - 1\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{N}{2}\int_0^\ell u_{,x}^2\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Die kinetische Energie ist

$$T = \frac{1}{2}\int_0^\ell \rho\, u_{,t}^2\,\mathrm{d}x,$$

so dass nach dem Hamilton-Prinzip ein Minimum des Funktionals

$$\int_{t_0}^{t_1} (T-U)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^\ell \left(\rho\, u_{,t}^2 - N u_{,x}^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

bezüglich

$$V_0 = \left\{ v : \int_{t_0}^{t_1}\int_0^\ell \left[v^2 + u_{,x}^2 + u_{,t}^2\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t < \infty \right\}$$

zu finden ist.

Mit der allgemeinen Theorie für $F(x,t,u,u_{,x},u_{,t}) = \frac{1}{2}\left(\rho\, u_{,t}^2 - N u_{,x}^2\right)$ und

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial u_{,x}} = -N u_{,x} \qquad \frac{\partial F}{\partial u_{,t}} = \rho\, u_{,t}$$

erhalten wir die Differentialgleichung (Schwingungsgleichung)

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(-N\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right) \\ &= N\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{falls } N \neq N(x),\ \rho \neq \rho(t). \end{aligned}$$

Analog kann man für eine schwingende Membran die Differentialgleichung

$$E\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\rho(x,y)\frac{\partial u}{\partial t^2}=0$$

herleiten.

Ü 78 (Plattenbiegung (nach Kirchhoff)) *Das Funktional für die Auslenkung $u(x,y)$ lautet*

$$J(u)=\int_\Omega\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2-2p(x,y)u(x,y)\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

wobei $p(x,y)$ den Druck auf die Platte bezeichnet. Man leite die Euler-Lagrange-Gleichung her.

Es ist zu beachten, dass das der Integrand

$$F=F\left(u,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

von zweiten Ableitungen abhängt. Funktionale mit höheren Abteilungen haben wir in Abschnitt 3.2 besprochen.

Ü 79 (Alte Klausuraufgabe) *Die Lösung u der Randwertaufgabe*

$$-\Delta u=f \text{ in } \Omega,\quad u=0 \text{ auf } \partial\Omega, \tag{24}$$

minimiert das Kleinste-Quadrate-Funktional

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega(\Delta u+f)^2\,\mathrm{d}x$$

über $V_0=\{v\in W^{2,2}(\Omega):v=0 \text{ auf } \partial\Omega\}$.

(a) Leiten Sie die Variationsformulierung her.

(b) Leiten Sie die daraus entstehende Randwertaufgabe her. (Es ist nicht (24).)

(c) Wie lauten der Ritz- und der Galerkin-Ansatz für diese Aufgabe? (Im Falle eines Finite-Elemente-Ansatzes spricht man von der least squares finite element method, *übersetzt etwa* Kleinste-Quadrate-Finite-Elemente-Methode.*)*

Hinweis: Es gilt die Integralidentität

$$\int_\Omega w\Delta v\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial v}{\partial n}w\,\mathrm{d}S-\int_\Omega\nabla w\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x,$$

wobei $\frac{\partial v}{\partial n}=\nabla v\cdot\vec{n}$ die Normalenableitung bezeichnet, das ist die auf $\partial\Omega$ definierte Ableitung der Funktion v in Richtung der äußeren Normalen $\vec{n}$.

3.5 Isoperimetrische Probleme (Nebenbedingungen in Integralform)

Bem 80 (Herkunft des Namens) *Isoperimetrische* Figuren sind Figuren gleichen Umfangs. Die Bezeichnung *Isoperimetrische Probleme* stammt von Anwendungen, in denen Flächen mit größtem Flächeninhalt bei vorgegebenem Umfang zu bestimmen sind. Solche Aufgaben sind auch als Problem der Dido bekannt.

Dido, der antiken Sage nach eine Tochter des Königs von Tyros in Phönizien (heute Libanon) flüchtete nach der Ermordung ihres Mannes durch den Bruder Pygmalion an die afrikanische Küste in das Gebiet des späteren Karthago, erbat sich vom dortigen König Iarbas so viel Land, als sie mit einer Ochsenhaut umspannen konnte und umgab mit einem aus der Haut geschnittenen Riemen das Gebiet der späteren Burg von Karthago. Dido hätte, bei 3 – 6 qm Ochsenhaut, einen Lederriemen von 3 mm Streifenbreite und 1000 – 2000 m Länge zusammenknüpfen und diesen anschließend so auf dem Boden ausbreiten können, dass er eine möglichst große Fläche eingeschlossen hätte, siehe auch http://www.google.com/search?q=Dido+problem.

Im Vortrag http://www.mathematik.uni-erlangen.de/~tschach/TDM2008/Dido.pdf werden weitere isoperimetrische Probleme besprochen. Wie legt man eine möglichst große Stadt am Meer an, die dann eine möglichst kurze Stadtmauer hat? Warum haben die Iglus die Form von Halbkugeln?

E 81 (Allgemeine Vorgehensweise) *Wir betrachten die Minimierung des Funktionals*

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x \tag{25}$$

unter der Nebenbedingung

$$K(y) = \int_a^b G(x, y, y')\,\mathrm{d}x = \ell. \tag{26}$$

Wie bei der Minimierung von Funktionen unter einer Nebenbedingung (Modul Mathematik III) verwenden wir einen Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$. Für weitere Erklärungen, warum das funktioniert, sei z. B. auf [MV2, Kap. 13, Abschnitt 5.1] verwiesen.

Lem 82 (Wiederholung) *Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Zwischen dem Minimierungsproblem mit Nebenbedingung*

$$\begin{aligned} &f(x) \to \min, \\ &g(x) = 0 \end{aligned}$$

und der Lagrange-Funktion

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda\, g(x).$$

besteht folgender Zusammenhang: Für jede lokale Lösung x_* des Minimierungsproblems mit Nebenbedingung, für die $\nabla g(x_*) \neq 0$ gilt, gibt es einen Lagrange-Multiplikator λ_*, so dass (x_*, λ_*) ein stationärer Punkt der Lagrange-Funktion ist.

Bem 83

1. Es sind aber nicht alle stationären Punkte der Lagrange-Funktion Lösungen des Minimierungsproblems.

2. Man kann also die Lösung des Minimierungsproblems mit Nebenbedingungen angehen, indem man die Lagrangefunktion aufstellt und deren stationäre Punkte berechnet. Auf diese Weise erhält man die extremwertverdächtigen Punkte.

3. Die Notwendigkeit der Bedingung $\nabla g(x_*) \neq 0$ kann man sich am Beispiel mit $f(x) = (x+1)^2$ und $g(x) = x^2$ verdeutlichen. Die Nebenbedingung ist nur für $x = 0$ erfüllt, also realisiert diese die Lösung des Minimierungsproblems mit Nebenbedingung. Es gilt aber nicht $\nabla L = 0$.

E 84 (Allgemeine Vorgehensweise – Fortsetzung) *Wir betrachten also das Funktional*

$$\begin{aligned} J^*(y,\lambda) &= J(y) + \lambda\,[K(y) - \ell] \\ &= \int_a^b F(x,y,y')\,\mathrm{d}x + \lambda\left[\int_a^b G(x,y,y')\,\mathrm{d}x - \ell\right], \end{aligned}$$

und setzen die erste Variation bezüglich y Null. Wegen

$$J^*(y+\varepsilon v,\lambda) = J(y+\varepsilon v) + \lambda K(y+\varepsilon v)$$

gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \delta J^*(y,\lambda;v,0) \\ &= \delta J(y) + \lambda\,\delta K(y) \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial y}(F+\lambda G)v + \frac{\partial}{\partial y'}(F+\lambda G)v'\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet folglich

$$\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial y'} = 0. \tag{27}$$

Hinzu kommt die Nebenbedingung (26), die bei der Ableitung von J^* nach λ entsteht.

Satz 85 *Für jede Lösung des Minimierungsproblems (25)–(26) existiert eine Konstante λ, so dass die Euler-Lagrange-Gleichung (27) erfüllt ist.*

Bsp 86 (Rotationsminimalfläche einer Kurve gegebener Länge) Wir suchen eine Funktion $y(x)$ mit den Randbedingungen

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1, \tag{28}$$

und gegebener Bogenlänge ℓ,

$$K(y) = \int_{x_0}^{x_1} \underbrace{\sqrt{1+y'(x)^2}}_{G(x,y,y')}\,\mathrm{d}x = \ell, \tag{29}$$

so dass bei Rotation um die x-Achse eine möglichst kleine Oberfläche entsteht,

$$J(y) = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} \underbrace{y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}}_{F(x,y,y')} \, \mathrm{d}x \to \min!$$

Wegen

$$L := F + \lambda G = y\sqrt{1+y'^2} + \lambda\sqrt{1+y'^2} = (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}$$

lautet die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\sqrt{1+y'^2} - \frac{d}{dx}\frac{(y+\lambda)y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0.$$

Diese gehört zum Sonderfall, bei dem der Integrand, hier $F+\lambda G$, nicht explizit von x abhängt, siehe Beispiel 39. Diesen Integrand, mit y statt $y+\lambda$, haben wir schon einmal in Übung 42 diskutiert (hoffentlich!). Dazu erinnern wir uns an das Eulersche Zwischenintegral, hier in der Form

$$\begin{aligned} c &= L - y' L_{,y'} \\ &= (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2} - y'(y+\lambda)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \\ &= (y+\lambda)\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}. \end{aligned}$$

Mit der Methode der Trennung der Veränderlichen erhalten wir die Lösung:

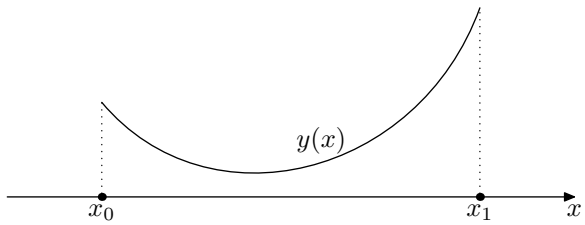
$$\begin{aligned} 1+y'^2 &= \frac{(y+\lambda)^2}{c^2} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \sqrt{\frac{(y+\lambda)^2}{c^2} - 1} \\ \int \mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\frac{(y+\lambda)^2}{c^2} - 1}} \\ &= c \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(y+\lambda)^2 - c^2}} \\ x &= c \operatorname{arcosh} \frac{(y+\lambda)}{c} + d \end{aligned}$$

Umstellen nach y liefert die Kettenlinie,

$$\begin{aligned} \frac{x-d}{c} &= \operatorname{arcosh} \frac{(y+\lambda)}{c}, \\ y &= c \cosh \frac{x-d}{c} - \lambda. \end{aligned}$$

Die Konstanten c, d und λ sind dann aus den Randbedingungen (28) und der Nebenbedingung (29) zu bestimmen.

Ü 87 (Beidseitig befestigte Saite (Kette) gegebener Länge) *Wir betrachten eine Kette mit der gegebenen Länge ℓ und der Dichte 1, die in den Punkten (x_0, y_0) und (x_1, y_1) befestigt ist.*



Bestimmen Sie die Form der Kette (die Funktion $y(x)$). Sie stellt sich so ein, dass die potentielle Energie minimiert wird.

Bsp 88 (Extremalfläche) Wir suchen eine Kurve mit den Randpunkten $(x_0, 0)$ und $(x_1, 0)$, die bei gegebener Länge ℓ mit der x-Achse eine möglichst große Fläche einschließt.

Für das Zielfunktional und die Nebenbedingung gilt also[4]

$$\begin{aligned} J(y) &= \int_{x_0}^{x_1} y(x)\,\mathrm{d}x \to \min! \\ K(y) &= \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x = \ell. \end{aligned}$$

Über $F + \lambda G = y + \lambda\sqrt{1 + y'^2}$ erhält man die Euler-Lagrange-Gleichung:

$$1 - \frac{d}{dx}\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0$$

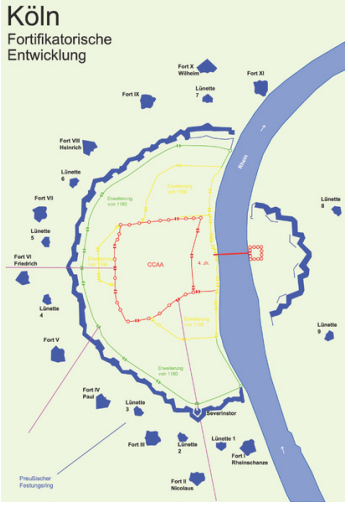
Die Lösung erfüllt die Gleichung

$$(y(x) - b)^2 + (x - a)^2 = \lambda^2,$$

d. h., die gesuchte Kurve ist ein Teil eines Kreises vom Radius λ mit Mittelpunkt (a, b). Die Größen a, b und λ sind durch die Randbedingungen $y(x_0) = 0$ und $y(x_1) = 0$ sowie die Nebenbedingung eindeutig bestimmt.[5]

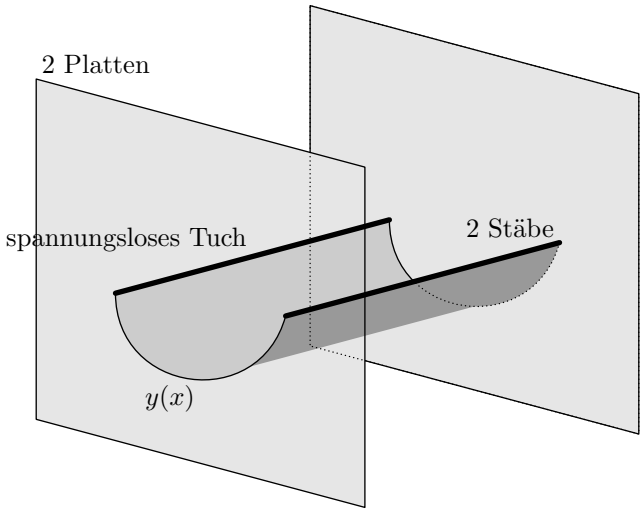
[4] Wir wollen uns hier zunächst auf den Fall beschränken, dass die Kurve durch eine Funktion $y(x)$ beschrieben werden kann. Besser wäre es daher, die gesuchte Kurve in Parameterform darzustellen, siehe z. B. [Kie, Kap. 1.10]. (Übung)

[5] Zur Existenz einer Lösung muss $\ell \geq x_1 - x_0$ gelten. Falls $\ell > \frac{\pi}{2}(x_1 - x_0)$ gilt, ist der Kreisbogen größer als ein Halbkreis, so dass y nicht mehr als Funktion von x dargestellt werden kann. Auch aus diesem grunde wäre es besser, die gesuchte Kurve in Parameterform darzustellen, siehe oben.



Quelle: `http://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Köln_Fortifikatorische_Entwicklung.jpg`

Bsp 89 Wir betrachten den folgenden Versuchsaufbau. Ein wasserundurchlässiges, festes Tuch ist an 2 Stäben befestigt, die durch 2 Platten gehalten werden, siehe Illustration.

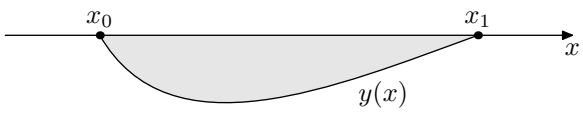


Wir wollen annehmen, dass die Grenze zwischen den Platten und dem Tuch dicht ist und dass es keine Reibung zwischen den Platten und dem Tuch gibt.

Der Querschnitt des Tuches entspricht einer Funktion $y(x)$. Wenn wir das Tuch so festhalten, dass $y(x)$ ein Teil des Kreises ist, dann ist das Volumen des Wassers, das reinpasst, für das gegebene Tuch maximal, siehe das vorherige Beispiel.

Nehmen wir nun an, dass das Tuch auf diese Weise mit Wasser gefüllt wurde. Wenn wir das Tuch nun loslassen, wird es die Form behalten oder eine andere Form annehmen? Wir bedenken die Konsequenz: wenn das Tuch die Form ändert, wird ein Teil des Wassers überlaufen.

Die Längsausdehnung des Tuches tut offenbar nichts zur Sache, so dass wir ein zweidimensionales Modell verwenden können.



Es wird sich eine solche Kurve $y(x)$ einstellen, dass die potentielle Energie

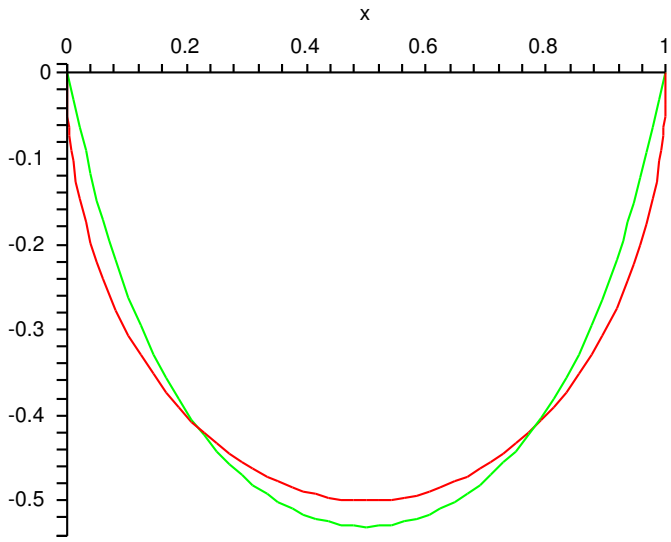
$$E_p(y) = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y(x)}^{0} y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = -\int_{x_0}^{x_1} \frac{y^2(x)}{2} \, \mathrm{d}x$$

minimiert wird. Da sich das Tuch nicht dehnt, haben wir die Nebenbedingung

$$K(y) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'(x)^2} \, \mathrm{d}x = \ell.$$

Zur vollständigen Beschreibung gehören noch die Randbedingungen $y(x_0) = 0$ und $y(x_1) = 0$.

Leider lässt sich die zugehörige Euler-Gleichung nicht exakt lösen. Das Ritz-Verfahren mit einem 20-dimensionalem Raum liefert die im Bild dargestellte Lösung[6] für die Parameter $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $\ell = \pi/2$.



Die rote (dunkle) Linie ist ein Querschnitt des Tuches, der dem maximalen Wasservolumen entspricht. Die grüne (helle) Linie ist die tatsächliche Querschnittsform des mit Wasser gefüllten Tuches. Man sieht deutlich den Unterschied, das Wasser läuft über.

[6] Der Dank für die Rechnung geht an meinen ehemaligen Mitarbeiter Dr. Sergey Grosman.

3.6 Probleme mit Nebenbedingungen in Gleichungsform

E 90 (Allgemeine Herangehensweise) *Wir betrachten Variationsprobleme der Form*

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x \;\to\; \textit{Extr!}$$

unter der Nebenbedingung

$$G(x, y, y') = 0 \quad \forall x \in (a, b),$$

d. h., die Nebenbedingung ist eine (Differential-)Gleichung, die für alle $x \in (a, b)$ gilt, nicht nur ein Funktional.

Als Lagrangescher Multiplikator eignet sich nun eine Funktion $\lambda(x)$,

$$J^*(y, \lambda) = \int_a^b [F(x, y, y') + \lambda(x)G(x, y, y')]\,\mathrm{d}x.$$

Die erste Variation nach y ist

$$\begin{aligned} 0 &= \delta J^*(y, \lambda; v, 0) \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial(F + \lambda G)}{\partial y}\, v + \frac{\partial(F + \lambda G)}{\partial y'}\, v'\right] \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

wie in Bemerkung 84, als λ eine Zahl war. Entspechend ist auch die Euler-Lagrange-Gleichung gleich

$$\frac{\partial(F + \lambda G)}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial(F + \lambda G)}{\partial y'} = 0.$$

Bsp 91 (Geodätische Linien auf einer Fläche in $\mathbb{R}^3$) Geodätische Linien sind die kürzesten Verbindungslinien zweier Punkte auf der Fläche $G(\vec{x}) = 0$. Sie sind definiert als Lösungen des Variationsproblems

$$\begin{aligned} J(\vec{x}) &= \int_a^b |\dot{\vec{x}}(t)|\,\mathrm{d}t = \text{Min!} \\ G(\vec{x}) &= 0. \end{aligned}$$

Für die weitere Diskussion, siehe [MV2, Kap. 13, Abschnitt 5.3].

Bsp 92 (Stokes) Wir betrachten eine inkompressible Strömung mit der Geschwindigkeit $\vec{u}(\vec{x})$. Die Inkompressibilitätsbedingung (Kontinuitätsgleichung, Masseerhaltung) lautet

$$G(\vec{u}) := \operatorname{div} \vec{u} = 0. \tag{30}$$

Wir wollen zeigen, dass die Bewegungsgleichung die Euler-Lagrange-Gleichung bei der Minimierung des Funktionals

$$J(\vec{u}) = \int_\Omega \left(\frac{\mu}{2} \left|\dot{\varepsilon}(\vec{u})\right|^2 - \vec{f} \cdot \vec{u} \right) \, \mathrm{d}\vec{x}$$

über alle Funktionen mit

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{u}_0(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \Omega$$

ist. Dabei bezeichnen μ die Viskositätskonstante,

$$\dot{\varepsilon}(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T)$$

den Verformungsgeschwindigkeitstensor und $\vec{f}$ ein äußeres Kraftfeld.

Der Lagrange-Ansatz mit dem Parameter $-p(x)$ lautet

$$J^*(\vec{u}, p) = \int_\Omega \left(\frac{\mu}{2} \left|\dot{\varepsilon}(\vec{u})\right|^2 - \vec{f} \cdot \vec{u} - p \operatorname{div} \vec{u} \right) \, \mathrm{d}\vec{x}.$$

Um die Variation des Tensors 2. Stufe zu vermeiden, berechnen wir die Variation im eindimensionalen Beispiel:

$$\begin{aligned} J^*(u,p) &= \int_\Omega \left(\frac{\mu}{2}(u')^2 - fu - pu' \right) \, \mathrm{d}x \\ \delta J^*(u,p;v,0) &= \int_\Omega \left(-fv + (\mu u' - p)v' \right) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \left(-f - \mu u'' + p' \right) v \, \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

so dass die Euler-Lagrange-Gleichung

$$-\mu u'' + p' = f \quad \forall x \in \Omega,$$

bzw. in der mehrdimensionalen Variante

$$-\mu \Delta \vec{u} + \nabla p = \vec{f} \quad \forall \vec{x} \in \Omega$$

lautet. Zusammen mit der Inkompressibilitätsbedingung (30) ergibt sich das Stokes-System. Der Druck p spielt die Rolle des Lagrange-Multiplikators.

Ü 93 *Gegeben sei eine Funktion y_d (angestrebter Zustand) und ein Parameter $\nu \in \mathbb{R}$. Man minimiere das Funktional*

$$J(y,u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(y(x) - y_d(x))^2 + \nu u(x)^2 \right] \, \mathrm{d}x,$$

wobei der Zustand y die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -y''(x) + y'(x) &= u(x) \quad \forall x \in (0,1), \\ y(0) = y(1) &= 0 \end{aligned}$$

mit der Steuergröße u erfüllen soll.