Dr. Dominik Meidner
Telefon: (0 89) 2 89 - 1 79 62
E-Mail: meidner@ma.tum.de

Universität der Bundeswehr München
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Institut für Mathematik und Rechneranwendungen

---

3. Seminarübung zur Vorlesung „Numerische Mathematik II“ (WT 2010)

Aufgabe 3.1: Die n-te abgeschlossene Newton-Cotes-Formel ist gemäß ihrer Konstruktion exakt für Polynome aus P_n. Zeigen Sie, dass sie im Falle gerader $n > 0$ sogar Polynome aus P_{n+1} exakt integriert.

Aufgabe 3.2: Es sei eine Quadraturformel mit der Darstellung

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \alpha f(0) + \beta f\left(\frac{1}{2}\right) + \gamma f(1)$$

gegeben. Bestimmen Sie die Konstanten α, β und γ so, dass die Ordnung dieser Quadraturformel möglichst hoch ist. Wie heißt die resultierende Formel?

Aufgabe 3.3: Leiten Sie eine rekursive Berechnung der summierten Trapezregel auf dem Intervall $I = [a, b]$ zu Gitterweiten $h_k = 2^{-k}(b-a)$ für $k = 1, 2, \ldots$ her, die möglichst wenige Funktionsauswertungen benötigt.

Aufgabe 3.4: Ermitteln Sie aus den entsprechenden Fehlerabschätzungen, wie viele Funktionsauswertungen nötig sind, um das Integral

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+2x}$$

a) mit der summierten Trapezregel und

b) mit der summierten Simpsonregel

mit einem Fehler kleiner als 10^{-8} zu berechnen.

Aufgabe 3.5: Für die summierte Trapezregel $I_h^{(1)}$ und die summierte Mittelpunktsregel $I_h^{(0)}$ gelten im Falle $f \in C^4[a, b]$ die Fehlerabschätzungen

$$I(f) - I_h^{(1)}(f) = -\frac{1}{12}h^2\{f'(b) - f'(a)\} + O(h^4) \quad \text{und}$$
$$I(f) - I_h^{(0)}(f) = \frac{1}{24}h^2\{f'(b) - f'(a)\} + O(h^4).$$

Konstruieren Sie aus diesen Informationen eine summierte Quadraturformel der Fehlerordnung $O(h^4)$

Aufgabe 3.6: Bestimmen Sie eine Gaußsche Quadraturformel mit möglichst wenigen Stützstellen, die das Integral

$$I(p) = \int_{-1}^1 p(x)\sqrt{|x|}\,dx$$

für alle Polynome $p \in P_3$ exakt integriert.