

**BEITRÄGE  
ZUR  
MATERIALTHEORIE**

Herausgeber: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Lion

---

Thomas Ranz

**Elementare Materialmodelle  
der  
Linearen Viskoelastizität  
im Zeitbereich**



**Elementare Materialmodelle  
der  
Linearen Viskoelastizität  
im Zeitbereich**

von

**Thomas Ranz**

Universität der Bundeswehr München  
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik  
Institut für Mechanik (LRT 4)  
Werner-Heisenberg-Weg 39  
85579 Neubiberg  
Deutschland

**Heft 5/07 der Reihe**

**Beiträge zur Materialtheorie**

**Herausgeber: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Lion**

**ISSN 1862-5703**



**Herausgeber:**

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Lion  
Universität der Bundeswehr München  
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik  
Institut für Mechanik (LRT 4)  
Werner-Heisenberg-Weg 39  
85579 Neubiberg  
Deutschland

---

Thomas Ranz:  
Elementare Materialmodelle der Linearen Viskoelastizität im Zeitbereich  
Beiträge zur Materialtheorie 05/07  
Neubiberg 2007  
**ISSN 1862-5703**

**Postanschrift des Verfassers:**

Dipl.-Ing. Thomas Ranz  
Institut für Mechanik  
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik  
Universität der Bundeswehr München  
D-85577 Neubiberg

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist unzulässig und strafbar. Insbesondere gilt dies für die Übersetzung, den Nachdruck sowie die Speicherung auf Mikrofilm, mit vergleichbaren Verfahren oder in Datenverarbeitungsanlagen.



## Vorwort

Diese Arbeit wurde aufbauend auf dem Skript „Einführung in die lineare Viskoelastizität“ von Univ. Prof. A. Lion erstellt. Der Inhalt der Arbeit betont die Herleitung, Darstellung und Diskussion der elementaren Materialmodelle, welche aus den klassischen Feder- und Dämpferelementen und aus fraktionalen Elementen gebildet werden.

Besonderen Dank möchte ich Herrn Univ. Prof. A. Lion für die brillante fachliche Unterstützung und Motivation aussprechen. Seine wertvollen Kommentare und Ideen haben die Arbeit bereichert und ergänzt.





<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Materialmodelle</b>	<b>6</b>
2.1	Maxwell-Modell	6
2.2	Kelvin-Voigt-Modell	8
2.3	Dreiparametermodelle	9
2.3.1	Modell A	9
2.3.2	Modell B	11
2.3.3	Modell C	12
2.3.4	Modell D	14
2.3.5	Diagramme der Dreiparametermodelle	15
2.4	Vierparametermodell (Burger-Modell)	17
2.5	Diskrete Spektren	18
2.5.1	Kelvin-Voigt-Kette mit Feder	19
2.5.2	Maxwell-Kette mit Feder	21
<b>3</b>	<b>Materialmodelle und deren analytische Lösungen:</b>	<b>24</b>
<b>3.1</b>	<b>Maxwell-Element</b>	<b>24</b>
3.1.1	Dehnungsgesteuerter Prozess → Relaxationsfunktion	24
3.1.1.1	Sprungfunktion	25
3.1.2	Spannungsgesteuerter Prozess → Retardationsfunktion	25
3.1.2.1	Sprungfunktion	25
<b>3.2</b>	<b>Kelvin-Voigt-Element</b>	<b>26</b>
3.2.1	Dehnungsgesteuerter Prozess → Relaxationsfunktion	26
3.2.1.1	Sprungfunktion	26
3.2.2	Spannungsgesteuerter Prozess → Retardationsfunktion	27
3.2.2.1	Sprungfunktion	27
<b>3.3</b>	<b>Modell A</b>	<b>28</b>
3.3.1	Dehnungsgesteuerter Prozess → Relaxationsfunktion	28
3.3.1.1	Trapezform:	29
3.3.1.2	Sprungfunktion:	31
3.3.1.3	Exponentialfunktion:	32
3.3.2	Spannungsgesteuerter Prozess → Retardationsfunktion	33
3.3.2.1	Trapezform:	35
3.3.2.2	Sprungfunktion:	36
3.3.2.3	Exponentialfunktion:	37

<b>3.4 Modell B</b>	<b>38</b>
3.4.1 Dehnungsgesteuerter Prozess → Relaxationsfunktion	39
3.4.1.1 Sprungfunktion	39
3.4.2 Spannungsgesteuerter Prozess → Retardationsfunktion	40
3.4.2.1 Sprungfunktion	40
<b>3.5 Diskrete Spektren</b>	<b>41</b>
3.5.1 Maxwell-Kette	41
3.5.1.1 Sprungfunktion:	42
3.5.1.2 Exponentialfunktion:	44
3.5.2 Kelvin-Voigt-Kette	45
3.5.2.1 Sprungfunktion:	46
3.5.2.2 Exponentialfunktion:	48
<b>3.6 Kontinuierliche Spektren</b>	<b>49</b>
3.6.1 Dehnungsgesteuerter Prozess	50
3.6.1.1 Sprungfunktion	50
3.6.2 Spannungsgesteuerter Prozess	52
3.6.2.1 Sprungfunktion	52
<b>4 Viskoelastisches Materialmodell mit fraktionalem Element</b>	<b>54</b>
4.1 Fraktionale Integration und Differentiation	54
4.2 Fraktionales Dämpfungselement	55
4.2.1 Dehnungsgesteuerter Prozess	55
4.2.2 Spannungsgesteuerter Prozess	57
4.2.2.1 Rückbildung nach Entlastung	58
4.3 Materialmodell mit fraktionellem Dämpfer	59
4.3.1 Fraktionelles Element in Reihe mit Feder	59
4.3.1.1 Dehnungsgesteuerter Prozess	60
4.3.1.2 Spannungsgesteuerter Prozess	60
4.3.2 Fraktionelles Element mit paralleler Feder	61
4.3.2.1 Dehnungsgesteuerter Prozess	61
4.3.2.2 Spannungsgesteuerter Prozess	62
4.4 Linearen Viskoelastizität - Volterra Integralgleichung	63
4.4.1 Volterra Integralgleichung	63
4.4.2 Fraktionale Materialmodelle	65
4.4.2.1 Fraktionales Maxwellelement	65
4.4.2.2 Fraktionales Kelvin-Voigt-Modell	68
4.4.3 Diskrete Spektren mit fraktionalen Elementen	70

4.4.3.1	Fraktionale Maxwell-Kette	71
4.4.3.2	Fraktionale Kelvin-Voigt-Kette	72
<b>5</b>	<b>Feuchte-rheologisch einfache Stoffe</b>	<b>74</b>
5.1	Feuchteabhängige Viskosität	75
5.2	Feuchteabhängiger Zeitmaßstab	75
5.3	Modell A mit feuchteabhängiger Viskosität	76
5.3.1	Dehnungsgesteuerter Prozess → Relaxationsfunktion	76
5.3.2	Spannungsgesteuerter Prozess → Retardationsfunktion	77
5.4	Maxwell-Kette	77
5.5	Kelvin-Voigt-Kette	78
5.6	Verallgemeinerung der materialeigenen feuchteabhängigen Zeit	78
5.7	Verschiebungsprinzip	78
<b>6</b>	<b>Ausblick</b>	<b>82</b>
<b>7</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>82</b>

## 1 Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der linearen Viskoelastizität im Zeitbereich und soll den Leser in die rheologische Materialmodellierung einführen. Es werden dazu die elementaren Modelle, welche aus Feder- und Dämpferelementen aufgebaut sind, formuliert und diskutiert. Anhand von graphischen Darstellungen des zeitlichen Materialverhaltens in Diagrammen soll das Verständnis für die Anwendbarkeit der unterschiedlichen Modelle unterstützt werden.

Es werden zuerst die Materialgleichungen für die klassischen Modelle, die wegen dem zeitabhängigen Dämpferverhalten als Differentialgleichungen formuliert werden, numerisch mit Hilfe von Matlab gelöst. Im anschließenden Kapitel werden die zugehörigen Lösungen analytisch hergeleitet. Nach der klassischen Materialbeschreibung folgt die Behandlung der Modelle mit fraktionalen Elementen. Die Arbeit schließt mit der Vorstellung eines Zeit-Feuchte-Verschiebungsprinzips für Werkstoffe die sich feuchte-rheologisch einfach verhalten. Mit diesem Prinzip ist das Materialverhalten eines feuchteabhängigen Werkstoffes, über das zeitliche Meßfenster hinaus, beschreibbar.

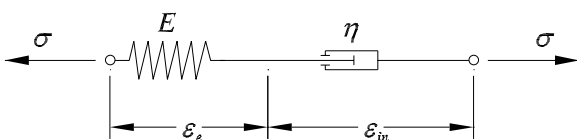
## 2 Materialmodelle

Materialmodelle zur Beschreibung des anelastischen Materialverhaltens sind in der Fachliteratur ([6],[7],[8]) bereits ausführlich behandelt worden. Trotzdem werden hier die elementaren Modelle vorgestellt, die zugehörigen Differentialgleichungen formuliert und sowohl numerisch als auch analytisch gelöst. Die Lösungen für die klassischen Modelle (Modelle ohne fraktionales Elementen) werden dafür mit Exponentialansätzen formuliert. Die Anwendung der Differentialoperator-Rechnung bzw. Laplacetransformation zur Lösung der DGL, wie sie in den Arbeiten von [7] behandelt werden, bleibt bei den klassischen Modellen unberücksichtigt. Erst bei den fraktionalen Materialmodellen wird die elegante Differentialoperator-Rechnung vorteilhaft angewandt. Die Bezeichnung der Materialmodelle folgt nicht der unterschiedlichen Benennung in der Fachliteratur, sondern wird hier auf eine neutrale Bezeichnung, die durch jene von W. Flügge [7] ergänzt wird, reduziert.

Die numerische Lösung der Modellgleichungen wird zuerst behandelt, da mit ihnen das zeitliche Verhalten über den Belastungszeitraum hinaus einfach dargestellt werden kann. Die Modellgleichungen in der Form von Differentialgleichungen wurden mit Matlab unter Anwendung des DGL-Lösers ode23 oder ode45 gelöst. Mit den gewonnenen Relaxations- und Retardationsdiagrammen sollen damit die unterschiedlichen Materialmodelle leichter nachvollziehbar werden.

### 2.1 Maxwell-Modell

Mit dem Maxwell-Modell (Maxwell fluid) kann durch die Reihenschaltung von einem Feder- und einem Dämpferelement die elastische und irreversible viskose Formänderung beschrieben werden.



Die Gesamtdehnung  $\varepsilon$  besteht dabei aus der elastischen Dehnung  $\varepsilon_e$  und der viskosen Dehnung  $\varepsilon_{in}$ :  $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{in}$  (1.1)

Das Kräftegleichgewicht (kinetische Beziehung) liefert für die Spannungen:  $\sigma = \sigma_e = \sigma_{in}$

Die konstitutiven Beziehungen werden aus der Materialgleichung für die Feder  $\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$

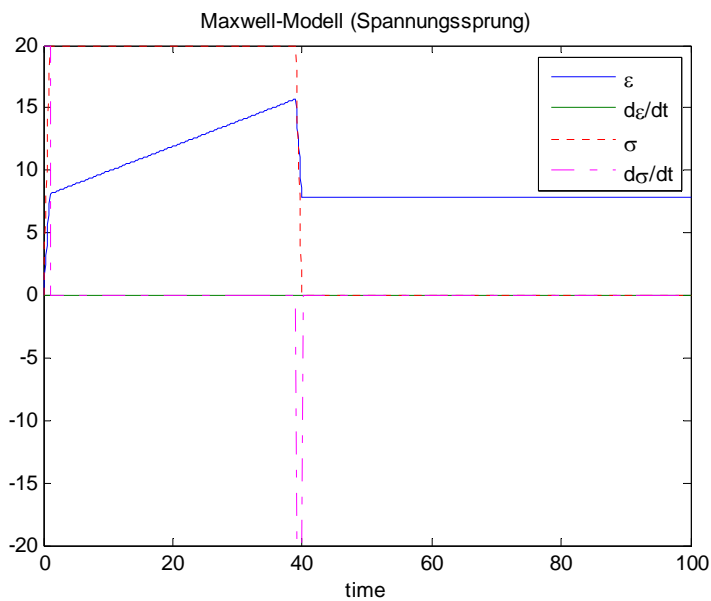
(Hooke'sche Beziehung) und dem materiellen Zusammenhang für den Dämpfer  $\dot{\varepsilon}_{in} = \frac{\sigma}{\eta}$

(Newton'sches Fließverhalten) gebildet. Mit der Zeitableitung der Gesamtdehnung

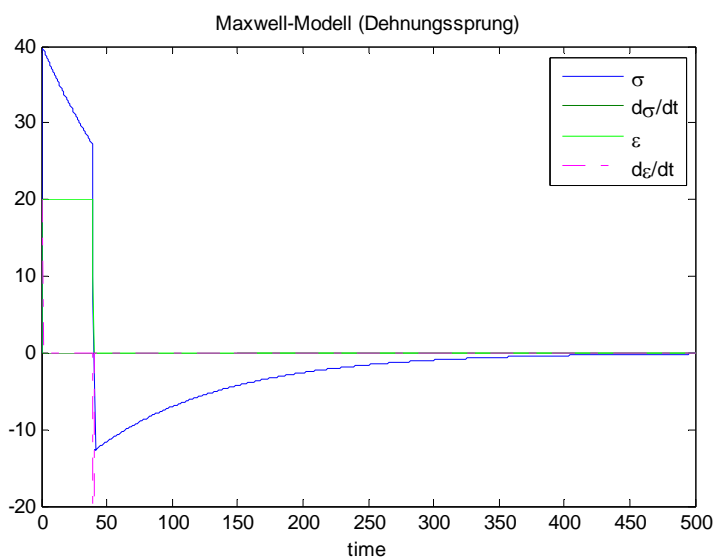
$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_{in} \text{ wird die Materialgleichung } \dot{\sigma} + \frac{E}{\eta} \cdot \sigma = E \dot{\varepsilon} \quad (1.2)$$

in der Form einer Differentialgleichung gewonnen. In Abhängigkeit von den aufgebrachtten Spannungs- bzw. Dehnungsprozessen ist die DGL analytisch (z. B. bei konstanten Spannungs- und Dehnungsprozessen) bzw. numerisch (bei komplexen Beanspruchungen) lösbar.

Nachfolgend wird das Spannungs- und Verformungsverhalten für das Maxwell-Modell bei einer Spannungs- bzw. Dehnungsbelastung, welche in Form einer Trapezbelastung (lineare Zunahme → konstanten Belastung → linearen Abnahme) aufgebracht wird, dargestellt und beschrieben.



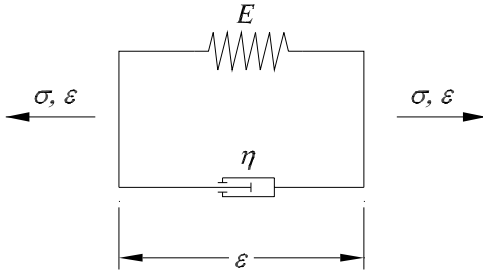
Der qualitative Dehnungsverlauf gibt sehr anschaulich die elastische Anfangsdehnung der Feder, die daran anschließende viskose Dehnung und danach die elastische Rückfederung mit einer bleibenden Deformation im Dämpfer wieder.



Der Spannungsverlauf zeigt den raschen elastischen Anstieg der Spannung und darauf folgend die Relaxation während der konstant gehaltenen Dehnung. Bei der Dehnungsentlastung geht die Spannung in den Druckbereich über und relaxiert dort gegen Null.

## 2.2 Kelvin-Voigt-Modell

Beim Kelvin-Voigt-Modell (Kelvin solid) werden ein Feder- und ein Dämpferelement parallel geschaltet.



Die Gesamtdehnung  $\varepsilon$  entspricht der elastischen Dehnung  $\varepsilon_e$  und der viskosen Dehnung  $\varepsilon_{in}$ .

$$\varepsilon = \varepsilon_e = \varepsilon_{in}$$

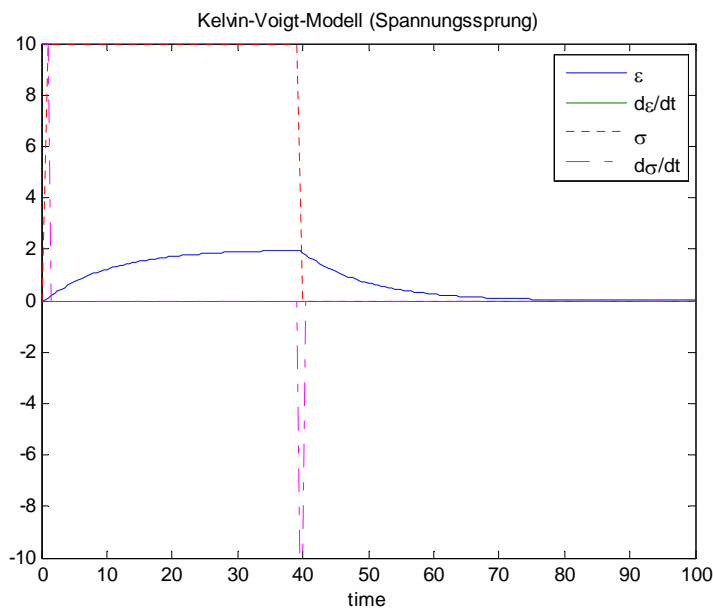
Das Kräftegleichgewicht (kinetische Beziehung) liefert für die Spannungen im Kelvin-Voigt-Element:  $\sigma = \sigma_e + \sigma_{in}$ . Die konstitutiven Beziehungen werden aus der

Materialgleichung für die Feder  $\varepsilon_e = \frac{\sigma_e}{E}$  (Hooke'sche Beziehung) und dem materiellen

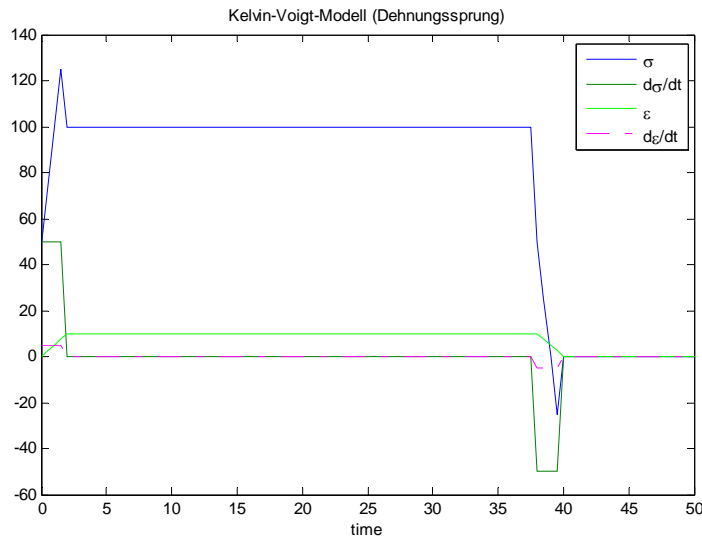
Zusammenhang für den Dämpfer  $\dot{\varepsilon}_{in} = \frac{\sigma_{in}}{\eta}$  (Newton'sches Fließverhalten) gebildet. Aus

dem Kräftegleichgewicht lässt sich somit die Materialgleichung bilden:  $\sigma = E \cdot \varepsilon_e + \eta \cdot \dot{\varepsilon}_{in} = E \cdot \varepsilon + \eta \cdot \dot{\varepsilon}$  (1.3)

Das Spannungs- und Verformungsverhalten für das Kelvin-Voigt-Modell bei einer Trapezbelastung wird nachfolgend graphisch dargestellt und beschrieben.



Die Dehnung bildet sich vom Anfang bis zum Ende der Belastung kontinuierlich aus und weist keine markante elastische Anfangsdehnung auf. Nach der Entlastung geht die Dehnung zurück auf Null.



welches durch die Feder bestimmt wird, ab. Bei der Dehnungsentlastung geht die Spannung kurzfristig in den Druckbereich und springt während der Entlastung auf Null. Durch die Entlastung geht die Federdehnung auf 0 zurück. Der Dämpfer muss den gleichen Weg zurücklegen und erzwingt somit, abhängig von seiner Viskosität und der Dehnrage, eine entsprechend hohe Spannung.

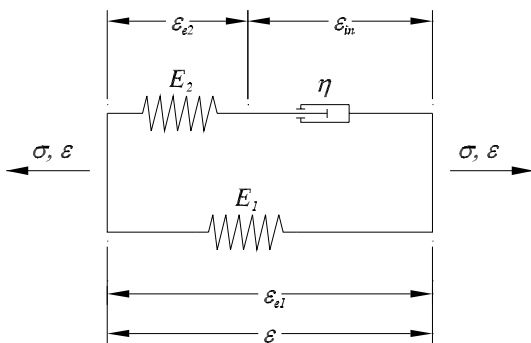
Die Spannung steigt anfangs, bedingt durch den Dämpfer stark an und fällt danach auf ein Spannungsniveau,

Mit diesen sehr einfachen Materialmodellen (Maxwell und Kelvin-Voigt) kann das viskoelastische Verhalten eines Materials nicht realistisch wiedergegeben werden. Erst durch geeignete Anordnung und Erhöhung der Anzahl der Elemente ergeben sich höherwertigere Materialmodelle, die das Materialverhalten in einem bestimmten (Zeit-) Bereich realistischer wiedergeben. Nachfolgend werden Dreiparametermodelle, ein Vierparametermodell, die Reihenschaltung von Kelvin-Voigt-Modellen und die Parallelschaltung von Kelvin-Voigt-Modellen diskutiert.

## 2.3 Dreiparametermodelle

### 2.3.1 Modell A

In diesem Modell A (Dreiparameter solid) wird ein Maxwell-Element parallel zu einer Feder geschaltet.





Die Gesamtdehnung  $\varepsilon$  entspricht der Dehnung  $\varepsilon_{e1}$  in der Feder 1 und der Summe der Dehnungen  $\varepsilon_{e2} + \varepsilon_{in}$  im Maxwell-Element:  $\varepsilon = \varepsilon_{e1} = \varepsilon_{e2} + \varepsilon_{in}$

Im Maxwell-Element liegt ein geschwindigkeitsabhängiger Anteil  $\sigma_{ov}$  der Spannung, auch Überspannung (overstress) genannt, vor. Sie ist ebenso wie die Spannung in der Feder 1  $\sigma_{eq1}$ , die auch Gleichgewichtsspannung genannt (equilibrium) wird, eine innere Spannung des Dreiparametermodells. Zusammen stehen sie mit der äußeren Spannung  $\sigma$  im Gleichgewicht:  $\sigma = \sigma_{eq1} + \sigma_{ov}$  Für die konstitutive Beziehung dieses Modells ist aus den

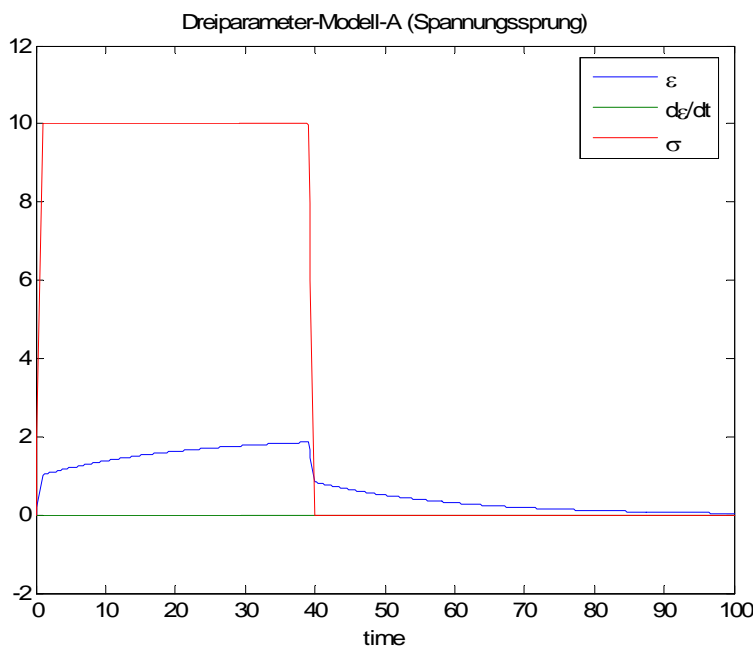
mechanischen Beziehungen der Einzelkomponenten eine Gleichung zwischen Eingangsdehnung  $\varepsilon$  und Ausgangsspannung  $\sigma$  (oder umgekehrt) herzuleiten. Ausgehend vom Kräftegleichgewicht  $\sigma = \sigma_{eq1} + \sigma_{ov}$  kann mit  $\sigma_{eq1} = \varepsilon_{e1} \cdot E_1 = \varepsilon \cdot E_1$ ,

$$\sigma_{ov} = \eta \cdot \dot{\varepsilon}_{in} = E_2 \cdot \varepsilon_{e2}, \quad \dot{\varepsilon}_{in} = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_{e2} \quad \text{und} \quad \dot{\varepsilon}_{e2} = \frac{\dot{\sigma}_{ov}}{E_2} = \frac{\dot{\sigma} - \dot{\sigma}_{eq1}}{E_2} = \frac{\dot{\sigma}}{E_2} - \frac{E_1}{E_2} \dot{\varepsilon} \quad \text{die}$$

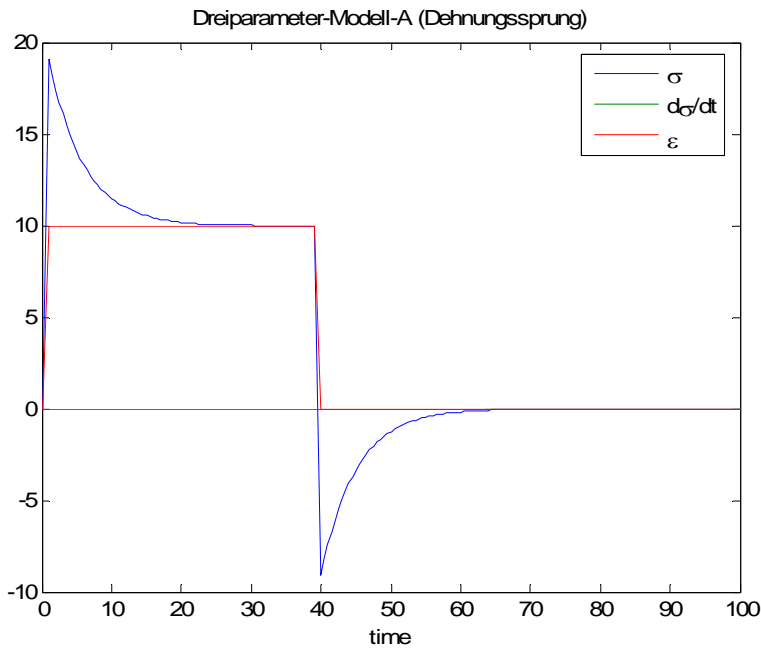
Materialgleichung in Form einer DGL gewonnen

$$\text{werden: } \dot{\sigma} + \frac{E_2}{\eta} \sigma = (E_1 + E_2) \cdot \dot{\varepsilon} + \frac{E_1 \cdot E_2}{\eta} \varepsilon \quad (1.4)$$

Das Spannungs- und Verformungsverhalten für das Dreiparametermodell bei einer Trapezbelastung wird nachfolgend graphisch dargestellt und beschrieben.



Die elastische Dehnung bei Be- und Entlastung ist deutlich erkennbar. Danach schließt jeweils eine viskos dominierte Deformation an. Es bleibt keine irreversible viskose Deformation zurück.

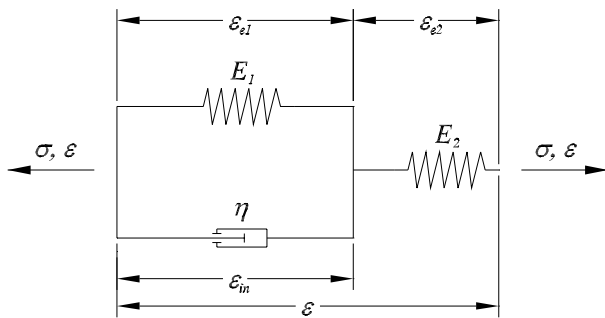


Die anfängliche Spannungszunahme zufolge des Dämpfers relaxiert auf ein Spannungsniveau welches durch die Federn bestimmt wird. Bei der Entlastung geht die Spannung in den Druckbereich über und relaxiert von dort auf Null.

Beim Modell A verbleiben somit nach der Entlastung keine Dehnungen bzw. Spannungen.

### 2.3.2 Modell B

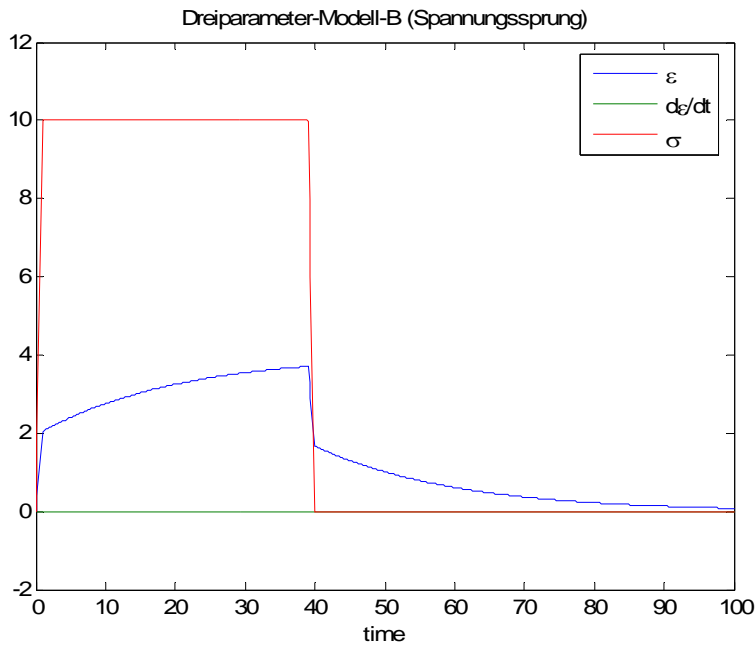
In diesem Modell B (Dreiparameter solid) wird ein Kelvin-Voigt-Element in Reihe mit einer Feder geschaltet.



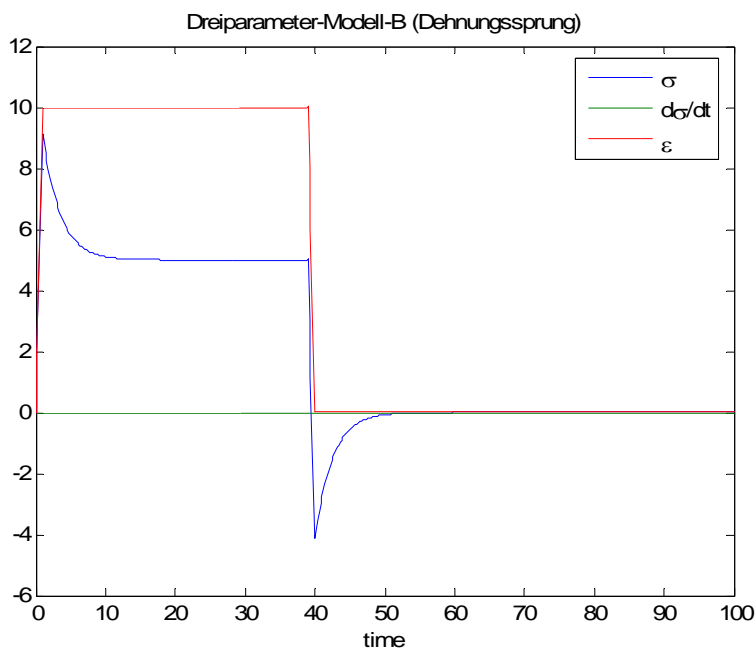
Die zugehörige Materialgleichung wird ebenso über die Kompatibilität und das Kräftegleichgewicht, in ähnlicher Form wie vorhin, hergeleitet. Sie lautet für das Modell B:

$$\dot{\sigma} + \frac{E_1 + E_2}{\eta} \sigma = E_2 \cdot \dot{\varepsilon} + \frac{E_1 \cdot E_2}{\eta} \varepsilon \quad (1.5)$$

Das Spannungs- und Verformungsverhalten für das Dreiparametermodell bei einer Trapezbelastung wird nachfolgend graphisch dargestellt und beschrieben.



Die elastische Dehnung bei Be- und Entlastung ist deutlich erkennbar. Danach schließt jeweils die viskose Deformation an. Es bleibt keine irreversible viskose Deformation zurück.

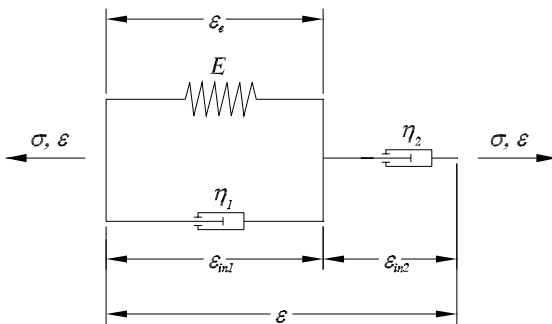


Die anfängliche Spannungszunahme zufolge des Dämpfers relaxiert auf ein Spannungsniveau welches durch die Federn bestimmt wird. Bei der Entlastung geht die Spannung in den Druckbereich über und relaxiert von dort auf Null.

Mit Hilfe der Diagramme ist das äquivalente Verhalten der linearen Dreiparameter-Modelle A und B zueinander einfach nachvollziehbar. Mathematisch begründet sich dies durch dieselbe Struktur der Differentialgleichungen (1.4) und (1.5). Ihre Materialparameter lassen sich durch Koeffizientenvergleich ineinander umrechnen.

### 2.3.3 Modell C

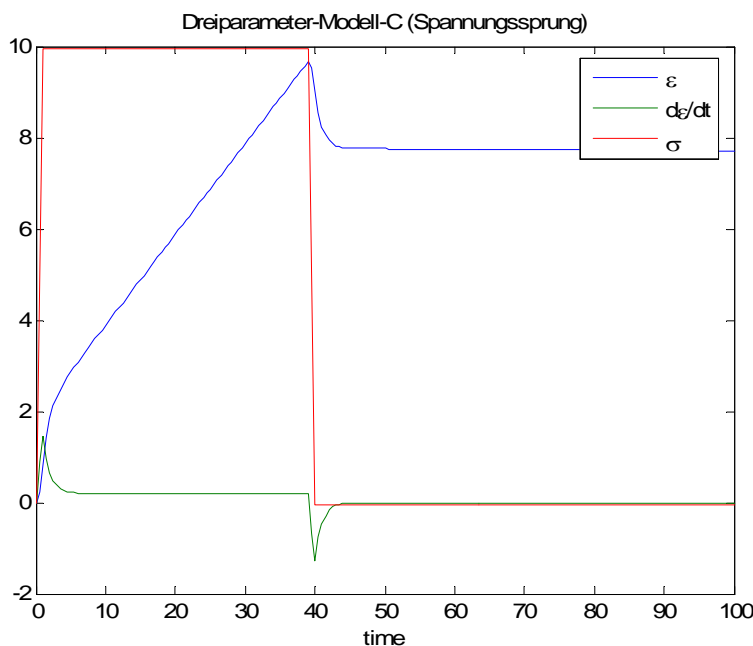
In diesem Modell C (Dreiparameter fluid) wird ein Kelvin-Voigt-Element in Reihe mit einem Dämpfer geschaltet.



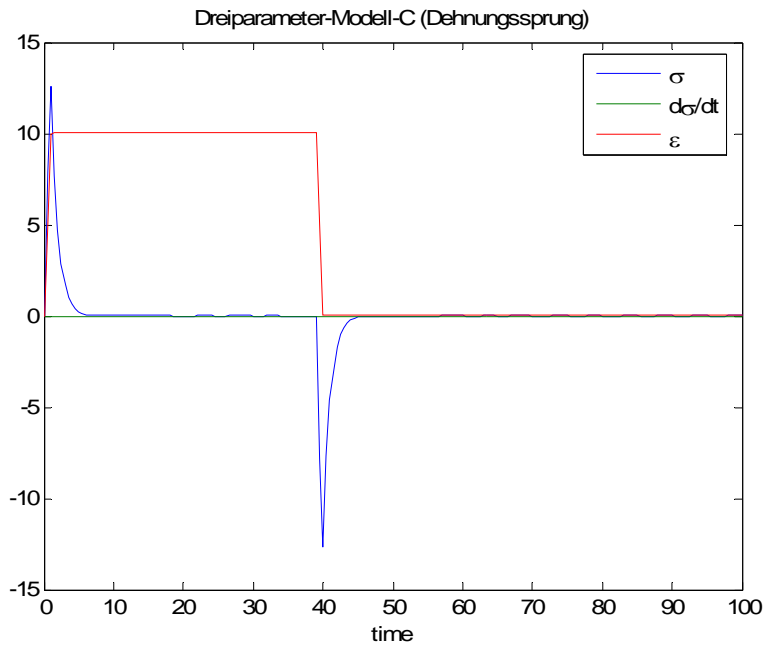
Die zugehörige Materialgleichung wird ebenso über die Kompatibilität und das Kräftegleichgewicht, in ähnlicher Form wie vorhin, hergeleitet. Sie lautet für das Modell C:

$$\dot{\sigma} + \frac{E}{\eta_1 + \eta_2} \sigma = \frac{\eta_1 \cdot \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \cdot \ddot{\varepsilon} + \frac{E \cdot \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \dot{\varepsilon} \quad (1.6)$$

Das Spannungs- und Verformungsverhalten für das Dreiparametermodell bei einer Trapezbelastung wird nachfolgend graphisch dargestellt und beschrieben.



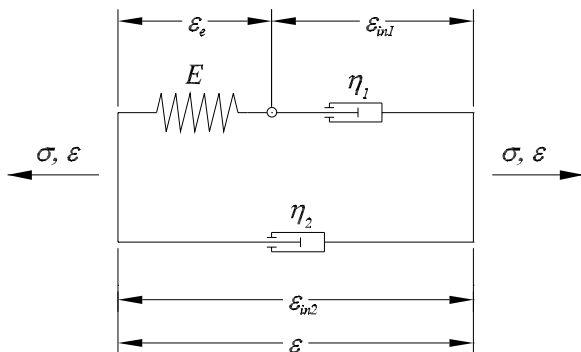
Die, bei Null beginnende, Dehnung wird anfangs durch die Feder und die Dämpfer bestimmt. Danach verformt sich nur mehr der Dämpfer  $\eta_2$ . Bei der Entlastung ist der elastische Anteil der Feder erkennbar. Die Deformation im Dämpfer  $\eta_2$  bleibt als irreversible Deformation erhalten.



Die spontane Spannungszunahme zufolge der Dämpfer relaxiert bei konstanter Dehnung auf Null. Bei Entlastung geht die Spannung in den Druckbereich über und relaxiert von dort ebenfalls auf Null.

### 2.3.4 Modell D

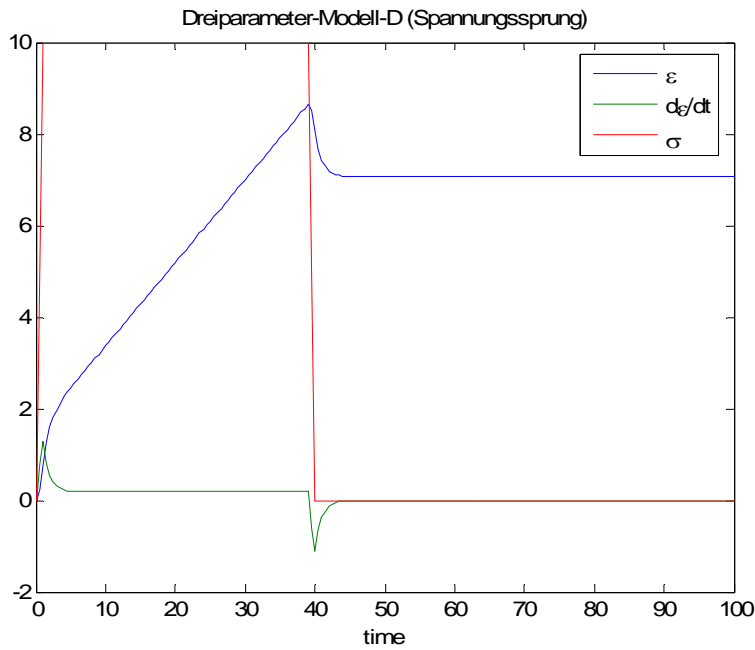
Im Modell D (Dreiparameter fluid) wird ein Dämpfer parallel zu einem Maxwell-Element geschaltet.



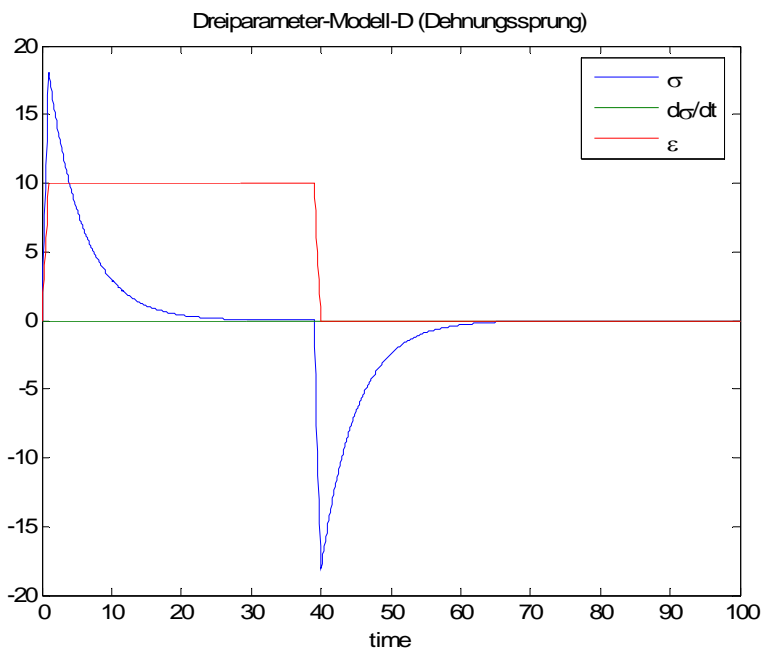
Die zugehörige Materialgleichung wird ebenso über die Kompatibilität und das Kräftegleichgewicht, in ähnlicher Form wie bei den bisherigen Modellen, hergeleitet. Sie lautet für das Modell C:

$$\dot{\sigma} + \frac{E}{\eta_1} \sigma = \eta_2 \cdot \ddot{\varepsilon} + \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1} E \cdot \dot{\varepsilon} \quad (1.7)$$

Das Spannungs- und Verformungsverhalten für das Dreiparametermodell bei einer Trapezbelastung wird nachfolgend graphisch dargestellt und beschrieben. Auch hier ist das Modellverhalten der Dreiparameter-Modelle C und D, wegen derselben Struktur der Differentialgleichungen (1.6) und (1.7), äquivalent zueinander. Ihre Materialparameter lassen sich ebenfalls durch Koeffizientenvergleich ineinander umrechnen.



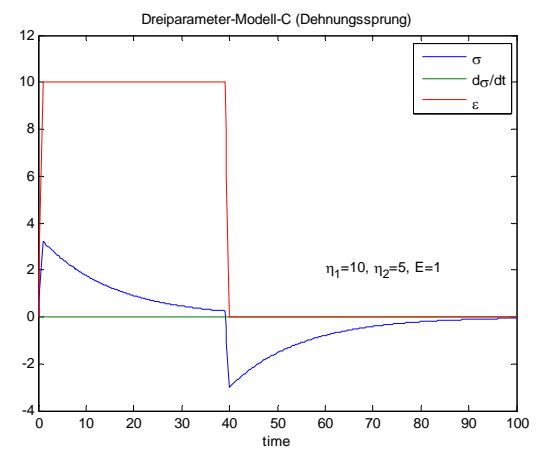
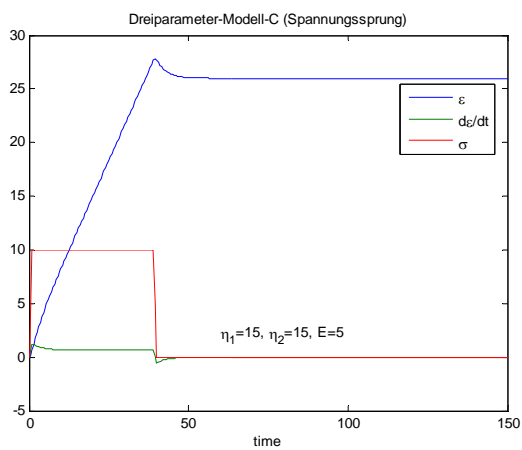
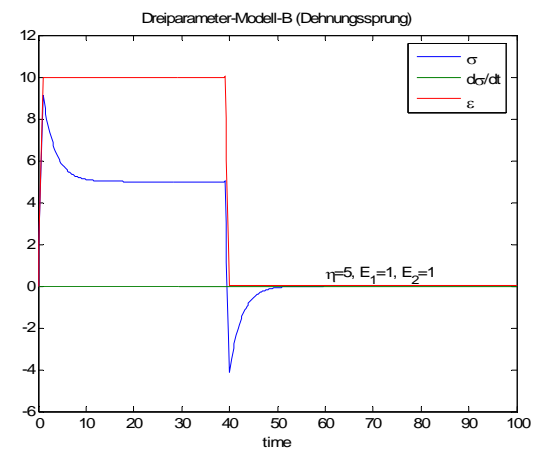
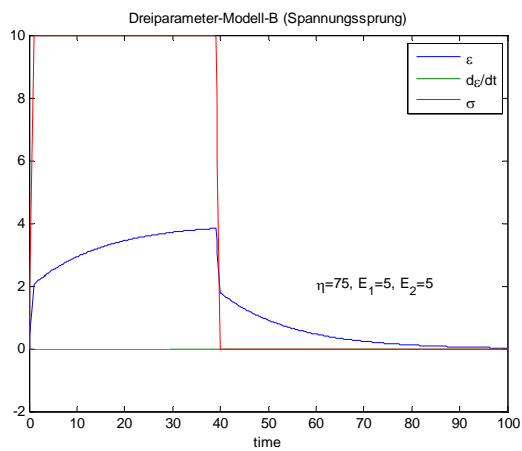
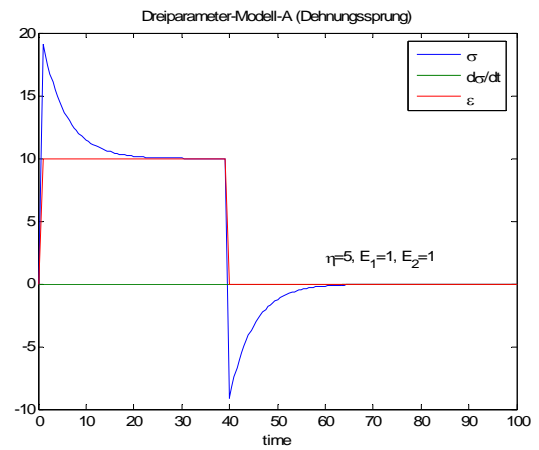
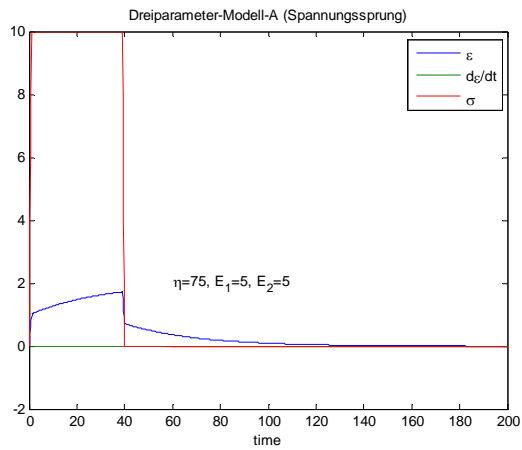
Die, bei Null beginnende, Dehnung wird anfangs durch die Feder und die Dämpfer bestimmt. Danach verformen sich nur mehr die Dämpfer  $\eta_1$  und  $\eta_2$ . Bei der Entlastung ist der elastische Anteil der Feder erkennbar. Die Deformation in den Dämpfern  $\eta_1$  und  $\eta_2$  bleibt als irreversible Deformation erhalten.

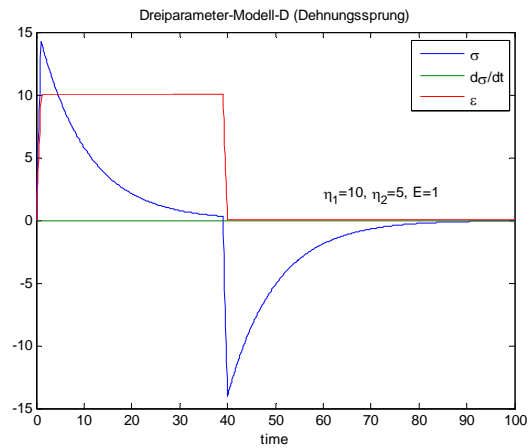
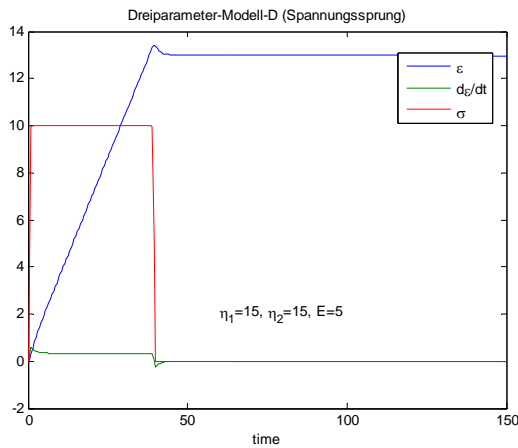


Die spontane Spannungszunahme zufolge der Dämpfer relaxiert bei konstanter Dehnung auf Null. Bei Entlastung geht die Spannung in den Druckbereich über und relaxiert von dort ebenfalls auf Null.

### 2.3.5 Diagramme der Dreiparametermodelle

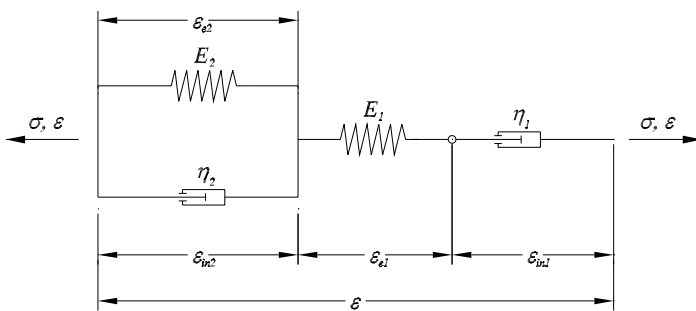
Nachfolgend werden die einzelnen Diagramme für die Dreiparametermodelle bildlich zusammengefasst um einen anschaulichen Überblick über das mechanische Verhalten der einzelnen Modelle zu bekommen.





## 2.4 Vierparametermodell (Burger-Modell)

In diesem Vierparameter-Modell (Vierparameter fluid) wird ein Kelvin-Voigt-Modell mit einem Maxwell-Element in Reihe geschaltet.

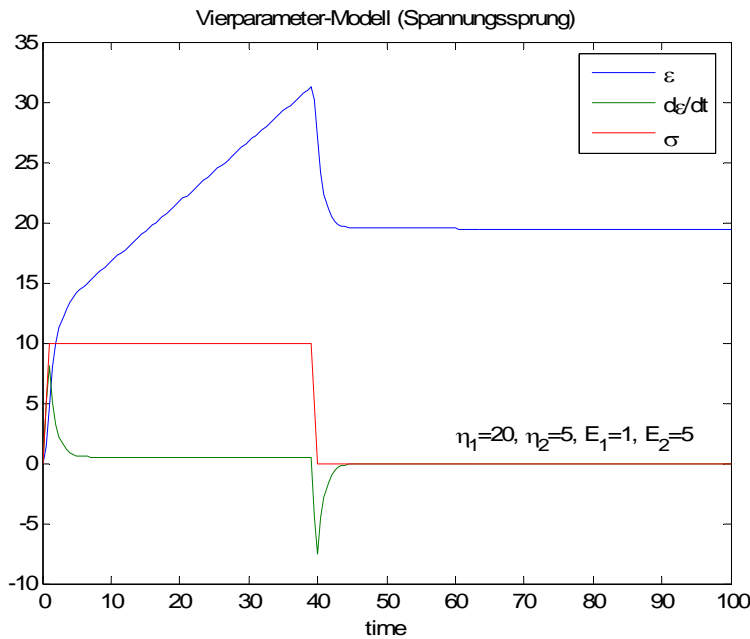


Die zugehörige Materialgleichung wird ebenso über die Kompatibilität und das Kräftegleichgewicht, in ähnlicher Form wie bei den bisherigen Modellen, hergeleitet. Sie lautet für das Burger-Modell:

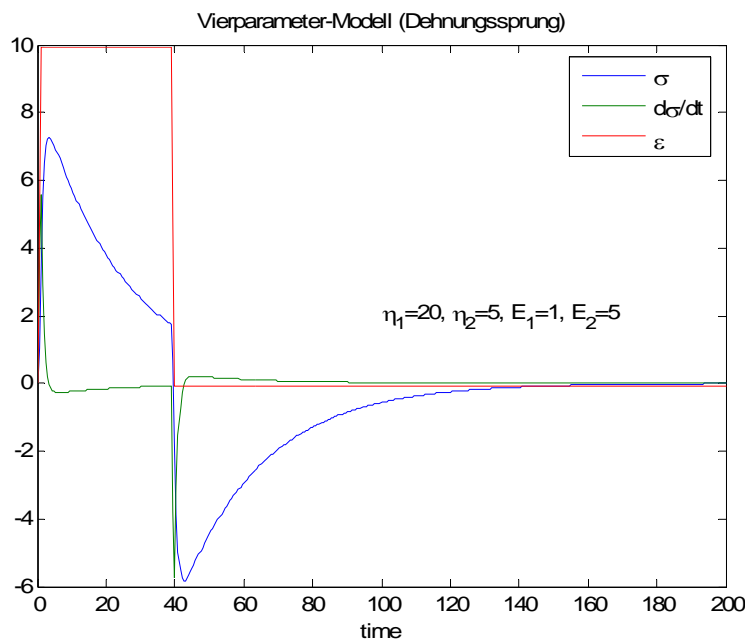
$$\ddot{\sigma} + \left( \frac{E_1}{\eta_1} + \frac{E_1 + E_2}{\eta_2} \right) \cdot \dot{\sigma} + \frac{E_1 \cdot E_2}{\eta_1 \cdot \eta_2} \sigma = E_1 \cdot \ddot{\epsilon} + \frac{E_1 \cdot E_2}{\eta_2} \dot{\epsilon} \quad (1.8)$$

Das Spannungs- und Verformungsverhalten für das Vierparametermodell bei einer Trapezbelastung wird nachfolgend graphisch dargestellt und beschrieben.





Die, bei Null beginnende, Dehnung wird anfangs durch die Federn und die Dämpfer bestimmt. Danach verformt sich nur mehr der Dämpfer  $\eta_1$ . Bei der Entlastung ist der elastische Anteil der Federn erkennbar. Die Deformation im Dämpfer  $\eta_1$  bleibt als irreversible Deformation erhalten.



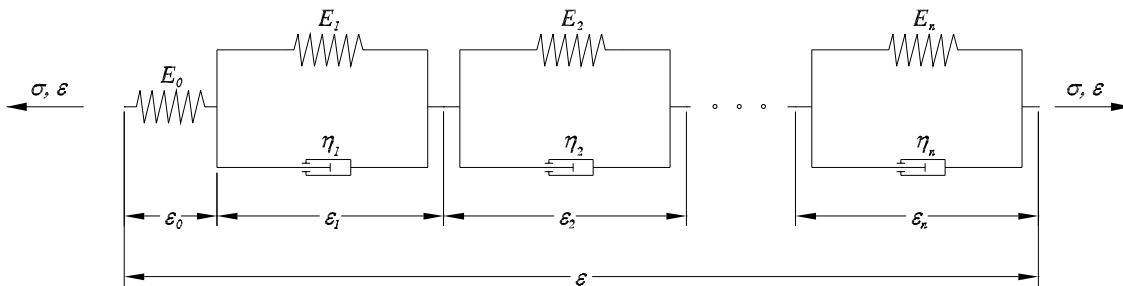
Die Spannung, welche anfänglich zufolge der Dämpfer rasch zunimmt, relaxiert stark und würde bei ausreichender Belastungsdauer auf Null relaxieren. Bei der Entlastung geht die Spannung in den Druckbereich über und relaxiert von dort auf Null.

## 2.5 Diskrete Spektren

Die bisher beschriebenen Feder-Dämpfer-Modelle beschreiben das Materialverhalten qualitativ. Für eine realistische Beschreibung des Materialverhaltens müssen diese Modelle um eine Vielzahl von Federn und Dämpfern erweitert werden. Diese Parallelschaltung von Maxwell-Elementen bzw. die Reihenschaltung von Kelvin-Voigt-Elementen mit einer weiteren Feder wird unter dem Begriff „Diskrete Spektren“ zusammengefasst.

### 2.5.1 Kelvin-Voigt-Kette mit Feder

Durch eine „Kelvin-Voigt-Kette mit Feder“, in welcher eine Feder und n Kelvin-Voigt-Elemente in Serie geschaltet sind, kann das zeitabhängige Materialverhalten über einen längeren Zeitraum beschrieben werden. Die Anzahl der Kelvin-Voigt-Elemente bestimmt dabei die Länge des Zeitbereiches. Die Kelvin-Voigt-Kette mit Feder eignet sich besonders zur Beschreibung von Kriechphänomenen.



Nachfolgend wird die Materialgleichung für die Kelvin-Voigt-Kette hergeleitet. Die Gesamtdehnung  $\varepsilon$  entspricht der Summe der Dehnung in der Feder  $\varepsilon_0$  und der

Dehnungen in den Kelvin-Voigt-Elementen  $\varepsilon_n$ :  $\varepsilon = \varepsilon_0 + \sum_{j=1}^n \varepsilon_j$

Das Kräftegleichgewicht für die Kette lautet:

$$\sigma = \sigma_0 = \sigma_1 = \dots = \sigma_n \text{ mit } \sigma_0 = E_0 \cdot \varepsilon_0 \text{ und } \sigma_j = E_j \cdot \varepsilon_j + \eta_j \cdot \dot{\varepsilon}_j \text{ für } j \geq 1$$

Mit dem Differential-Operator  $\partial_t$  lässt sich die Spannung durch  $\sigma = (E_j + \eta_j \cdot \partial_t) \cdot \varepsilon_j$  darstellen und nach Umstellung die Dehnung in den Kelvin-Voigt-Elementen

$\varepsilon_j = (E_j + \eta_j \cdot \partial_t)^{-1} \cdot \sigma$  ausrechnen. Eingesetzt in die Gesamtdehnung  $\varepsilon = \varepsilon_0 + \sum_{j=1}^n \varepsilon_j$  ergibt

dies die Materialgleichung in Form einer DGL:  $\varepsilon = \varepsilon_0 + \sum_{j=1}^n (E_j + \eta_j \cdot \partial_t)^{-1} \cdot \sigma$

Erklärend sei hier angeführt, dass die Anwendung des inversen Differentialoperators auf eine Funktion  $F(t)$  einem Integral über diese Funktion  $F(t)$  entspricht. Dies wird nachfolgend für die Dehnung  $\varepsilon_1 = (E_1 + \eta_1 \cdot \partial_t)^{-1} \cdot \sigma$  erörtert:

$$\text{Mit dem Ansatz } e^{\frac{E}{\eta} t} \text{ folgt für die DGL } \dot{\varepsilon}_1 + \frac{E_1}{\eta_1} \cdot \varepsilon_1 = \frac{1}{\eta_1} \sigma : \left( \varepsilon_1 \cdot e^{\frac{E}{\eta} t} \right)' = \frac{1}{\eta_1} \sigma \cdot e^{\frac{E}{\eta} t}$$

Zweimal nach der Zeit partiell integriert und mit der Anfangsbedingung  $\sigma(0) = 0$  folgt:

$\varepsilon_1(t) = \frac{1}{\eta_1} \int_0^t e^{-\frac{E_1}{\eta_1}(t-s)} \cdot \sigma(s) ds$  Der Bezug zwischen inversem Differentialoperator und dem

Integral kann nun leicht nachvollzogen und auf eine beliebige Funktion  $F(t)$

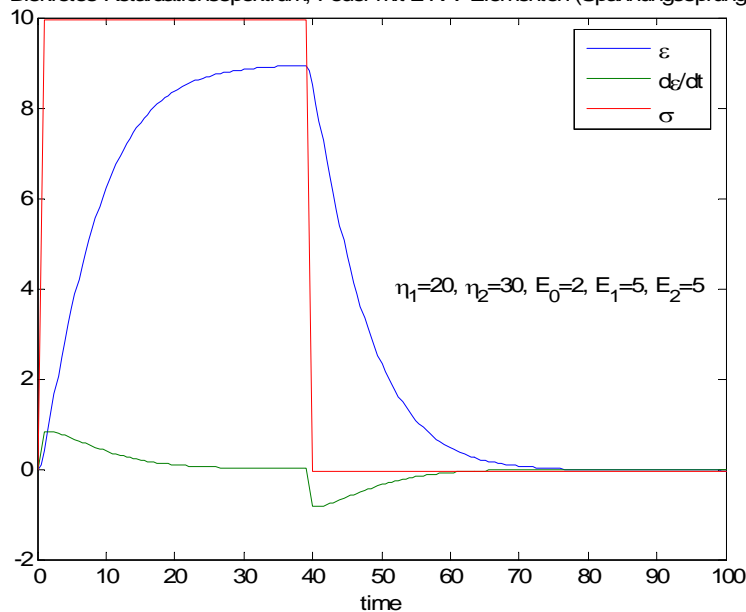
verallgemeinert werden:  $(E_1 + \eta_1 \cdot \partial_t)^{-1} \cdot F(t) = \frac{1}{\eta_1} \int_0^t e^{-\frac{E_1}{\eta_1}(t-s)} \cdot F(s) ds$

Für die Kelvin-Voigt-Kette (n=2) mit Feder lautet die zugehörige Materialgleichung:

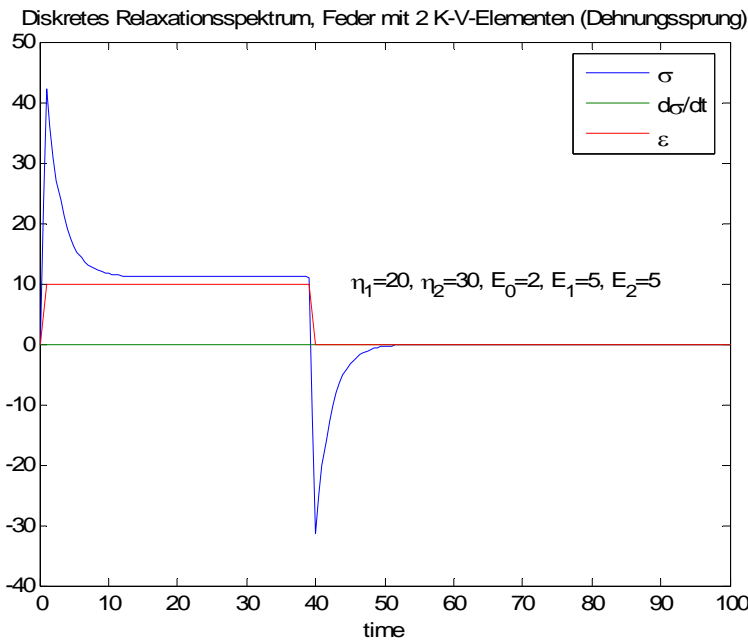
$$\ddot{\varepsilon} + \left(\frac{E_1}{\eta_1} + \frac{E_2}{\eta_2}\right) \cdot \dot{\varepsilon} + \frac{E_1 \cdot E_2}{\eta_1 \cdot \eta_2} \cdot \varepsilon = \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2}\right) \cdot \dot{\sigma} + \left(\frac{E_1 + E_2}{\eta_1 \cdot \eta_2} + \frac{E_1 \cdot E_2}{\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot E_0}\right) \cdot \sigma \quad (1.9)$$

Das Spannungs- und Verformungsverhalten für diese Kelvin-Voigt-Kette (n=2) mit Feder bei einer Belastung durch einen Spannungssprung bzw. Dehnungssprung wird nachfolgend graphisch dargestellt und beschrieben.

Diskretes Retardationsspektrum, Feder mit 2 K-V-Elementen (Spannungssprung)



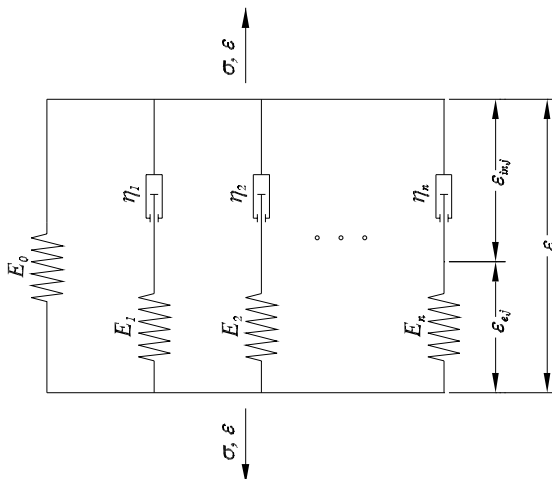
Die Dehnung würde bei ausreichend langer Belastung asymptotisch gegen einen Grenzwert konvergieren. Nach der Entlastung geht die Dehnung auf Null zurück. Es bleibt keine irreversible Deformation zurück.



Die Spannung, welche spontan zufolge der Dämpfer rasch zunimmt, relaxiert auf ein Spannungsniveau welches durch die Federn bestimmt wird. Bei der Entlastung geht die Spannung in den Druckbereich über und relaxiert von dort auf Null.

### 2.5.2 Maxwell-Kette mit Feder

Ebenso kann mit einer „Maxwell-Kette mit Feder“, in welcher eine Feder und n Maxwell-Elemente parallel geschaltet sind, das zeitabhängige Materialverhalten über einen längeren Zeitraum beschrieben werden. Die Anzahl der Maxwell-Elemente bestimmt dabei die Länge des Zeitbereiches indem sich das viskoelastische Materialverhalten quantitativ beschreiben läßt. Die Maxwell-Kette mit Feder eignet sich besonders zur Beschreibung von Relaxationserscheinungen.



Nachfolgend wird die Materialgleichung für die Maxwell-Kette hergeleitet. Die Gesamtdehnung  $\epsilon$  entspricht der Dehnung  $\epsilon_0$  in der Feder  $E_0$  und den Dehnungen  $\epsilon_n$  in den Maxwell-Elementen:  $\epsilon = \epsilon_0 = \epsilon_1 = \dots = \epsilon_n$

Das Kräftegleichgewicht für die Kette lautet:

$$\sigma = \sigma_0 + \sum_{j=1}^n \sigma_j \quad \text{mit } \sigma_0 = E_0 \cdot \varepsilon_0 \quad \text{und } \sigma_j = E_j \cdot \varepsilon_{e,j} = \eta_j \cdot \dot{\varepsilon}_{in,j} = \eta_j \cdot \partial_t \varepsilon_{in,j} \quad \text{für } j \geq 1$$

Mit der Dehnung der Maxwell-Elemente  $\varepsilon_j = \varepsilon_{e,j} + \varepsilon_{in,j}$  und dem Weg im Dämpfer

$\varepsilon_{in,j} = (\eta_j \cdot \partial_t)^{-1} \cdot \sigma_j$  kann die Spannung im Maxwell-Element aus

$$\sigma_j = E_j \cdot \varepsilon_{e,j} = E_j \cdot \varepsilon - E_j \cdot \varepsilon_{in,j} = E_j \cdot \varepsilon - E_j (\eta_j \cdot \partial_t)^{-1} \cdot \sigma_j \quad \text{durch } \sigma_j = E_j \cdot \eta_j (E_j + \eta_j \cdot \partial_t)^{-1} \cdot \dot{\varepsilon}$$

beschrieben werden. Daraus lässt sich die Materialgleichung in Form einer DGL gewinnen:

$$\sigma = E_0 \cdot \varepsilon + \sum_{j=1}^n E_j \cdot \eta_j (E_j + \eta_j \cdot \partial_t)^{-1} \cdot \dot{\varepsilon} \quad (1.10)$$

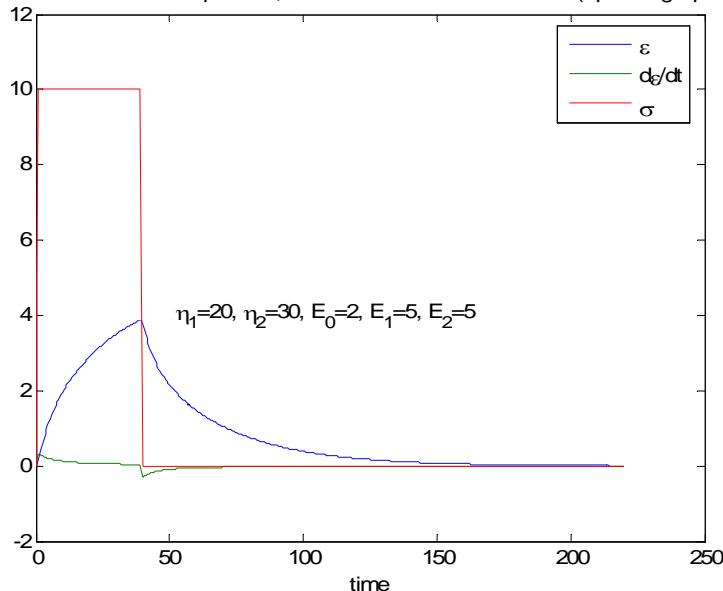
Maxwell-Kette (n=2) mit Feder

Die zugehörige Materialgleichung lautet:

$$\ddot{\sigma} + \left(\frac{E_1}{\eta_1} + \frac{E_2}{\eta_2}\right) \cdot \dot{\sigma} + \frac{E_1 \cdot E_2}{\eta_1 \cdot \eta_2} \cdot \sigma = (E_0 + E_1 + E_2) \cdot \ddot{\varepsilon} + \left[\frac{E_1}{\eta_1}(E_0 + E_2) + \frac{E_2}{\eta_2}(E_0 + E_1)\right] \cdot \dot{\varepsilon} + \frac{E_0 \cdot E_1 \cdot E_2}{\eta_1 \cdot \eta_2} \cdot \varepsilon$$

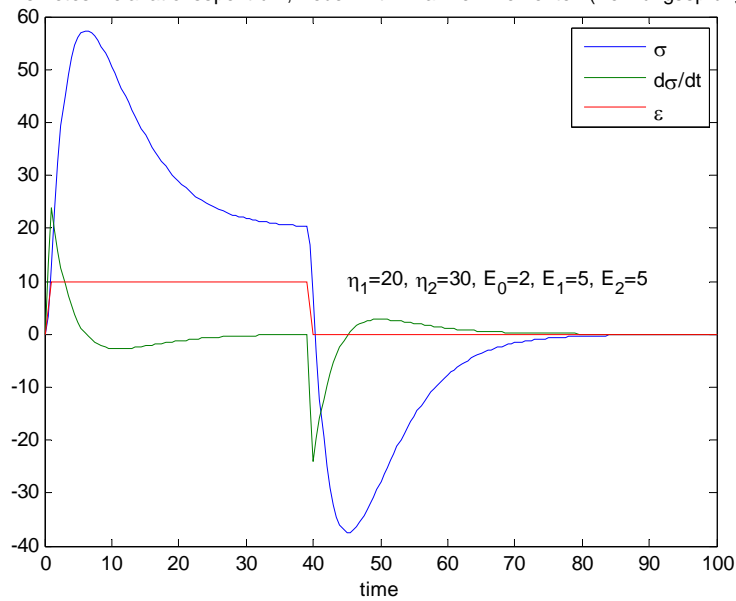
Das Spannungs- und Verformungsverhalten für diese Kelvin-Voigt-Kette (n=2) mit Feder bei einer Belastung durch einen Spannungssprung bzw. Dehnungssprung wird nachfolgend graphisch dargestellt und beschrieben.

Diskretes Retardationsspektrum, Feder mit 2 Maxwell-Elementen (Spannungssprung)



Die Dehnung würde bei ausreichend langer Belastung asymptotisch gegen einen Grenzwert konvergieren. Nach der Entlastung geht die Dehnung auf Null zurück. Es bleibt keine irreversible Deformation erhalten.

Diskretes Relaxationsspektrum, Feder mit 2 Maxwell-Elementen (Dehnungssprung)

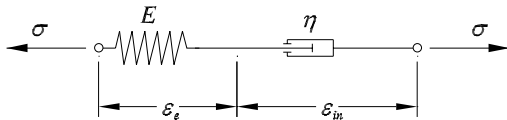


Die Spannung, welche anfänglich zufolge der Dämpfer rasch zunimmt, relaxiert auf ein Spannungsniveau welches durch die Feder  $E_0$  bestimmt wird. Bei der Entlastung geht die Spannung in den Druckbereich über und relaxiert von dort auf Null.

### 3 Materialmodelle und deren analytische Lösungen:

Die bisher formulierten Materialmodelle sind für eine nicht numerische Behandlung analytisch zu lösen. Dazu werden die Differentialgleichungen mit einem Exponentialansatz erweitert und abhängig von der Belastungsfunktion (stetig differenzierbar) durch Integration gelöst. Beispielhaft werden nachfolgend das Maxwellelement, das Kelvin-Voigt-Element und die mechanisch interessanteren Dreiparameter-Modelle A und B sowie die Maxwell- und Kelvin-Voigt-Ketten behandelt.

#### 3.1 Maxwell-Element



##### 3.1.1 Dehnungsgesteuerter Prozess → Relaxationsfunktion

Durch die Erweiterung der Material-DGL  $\dot{\sigma} + \frac{E}{\eta} \cdot \sigma = E \dot{\varepsilon}$  mit dem Ansatz  $e^{\frac{E}{\eta}t}$  wird die DGL gelöst:

$$\dot{\sigma} e^{\frac{E}{\eta}t} + \frac{E}{\eta} \cdot \sigma e^{\frac{E}{\eta}t} = E \dot{\varepsilon} e^{\frac{E}{\eta}t} \rightarrow \left( \sigma e^{\frac{E}{\eta}t} \right)' = E e^{\frac{E}{\eta}t} \dot{\varepsilon}. \text{ Aus } \left( \varepsilon e^{\frac{E}{\eta}t} \right)' = \dot{\varepsilon} e^{\frac{E}{\eta}t} + \frac{E}{\eta} \varepsilon e^{\frac{E}{\eta}t} \text{ kann für die}$$

rechte Seite der DGL  $\dot{\varepsilon} e^{\frac{E}{\eta}t} = \left( \varepsilon e^{\frac{E}{\eta}t} \right)' - \frac{E}{\eta} \varepsilon e^{\frac{E}{\eta}t}$  geschrieben werden. Durch Integration der

DGL und mit den Anfangsbedingungen ( $\sigma(t) = 0$ ,  $\varepsilon(t) = 0$ ) folgt die Lösung:

$$\sigma(t) e^{\frac{E}{\eta}t} = E \varepsilon(t) e^{\frac{E}{\eta}t} - \int_0^t \frac{E^2}{\eta} e^{\frac{E}{\eta}s} \varepsilon ds$$

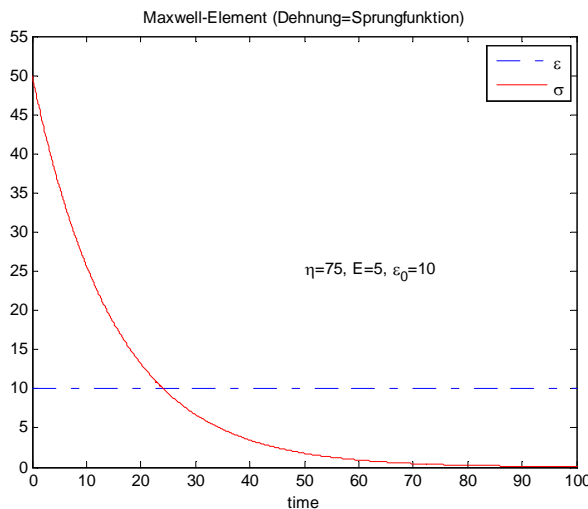
Nach partieller Integration und Multiplikation mit  $e^{-\frac{E}{\eta}t}$  erhält man:

$$\sigma(t) = \int_0^t E e^{-\frac{E}{\eta}(t-s)} \dot{\varepsilon} ds$$

### 3.1.1.1 Sprungfunktion

Für die Dehnungsbelastung  $\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0}{T_1} \cdot t & \text{für } 0 \leq t \leq T_1 \rightarrow \dot{\varepsilon}(t) = \frac{\varepsilon_0}{T_1} \\ \varepsilon_0 & \text{für } T_1 < t \rightarrow \dot{\varepsilon}(t) = 0 \end{cases}$  wird für

$T_1 \rightarrow 0$  und für  $t > T_1$  als Spannungsantwort  $\sigma(t) = Ee^{-\frac{E}{\eta}t} \varepsilon_0$ , bzw. die Relaxationsfunktion  $G(t) = Ee^{-\frac{E}{\eta}t}$  erhalten.



Die Grenzwerte sind:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sigma(t) = E\varepsilon_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = 0$$

Die Spannung relaxiert auf Null.

### 3.1.2 Spannungsgesteuerter Prozess $\rightarrow$ Retardationsfunktion

Die DGL  $\left(\sigma e^{\frac{E}{\eta}t}\right)' = Ee^{\frac{E}{\eta}t} \dot{\varepsilon}$  (s. o.) wird nach der Dehnrates  $\dot{\varepsilon}$  umgestellt und danach integriert. Mit den Anfangsbedingungen ( $\sigma(t) = 0, \varepsilon(t) = 0$ ) folgt die Lösung:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{E} e^{-\frac{E}{\eta}t} \left(\sigma e^{\frac{E}{\eta}t}\right)' \rightarrow \varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left[ \sigma(t) + \frac{E}{\eta} \int_0^t \sigma(s) ds \right]$$

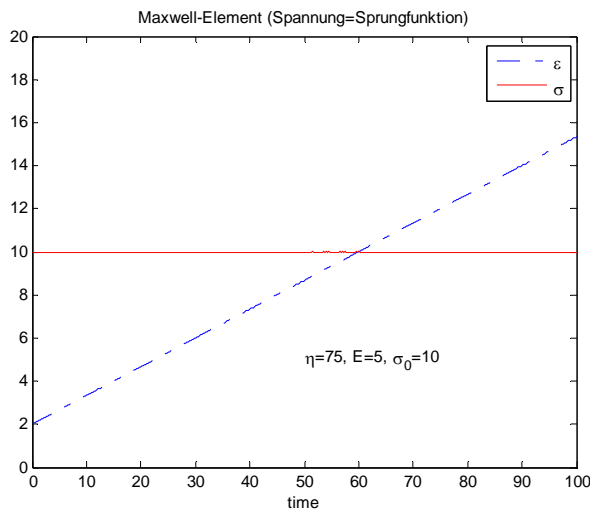
#### 3.1.2.1 Sprungfunktion

Für die Spannungsbelastung  $\sigma(t) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{T_1} \cdot t & \text{für } 0 \leq t \leq T_1 \rightarrow \dot{\sigma}(t) = \frac{\sigma_0}{T_1} \\ \sigma_0 & \text{für } T_1 < t \rightarrow \dot{\sigma}(t) = 0 \end{cases}$  wird für

$T_1 \rightarrow 0$  und für  $t > T_1$  als Dehnungsantwort  $\varepsilon(t) = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{\eta}t\right) \sigma_0$ , bzw. die

Retardationsfunktion  $J(t) = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{\eta}t\right)$  erhalten.



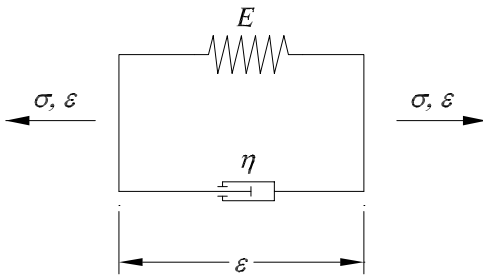


Die Grenzwerte sind:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = \infty$$

Die Dehnung ist also eine lineare Funktion der Zeit

## 3.2 Kelvin-Voigt-Element



### 3.2.1 Dehnungsgesteuerter Prozess $\rightarrow$ Relaxationsfunktion

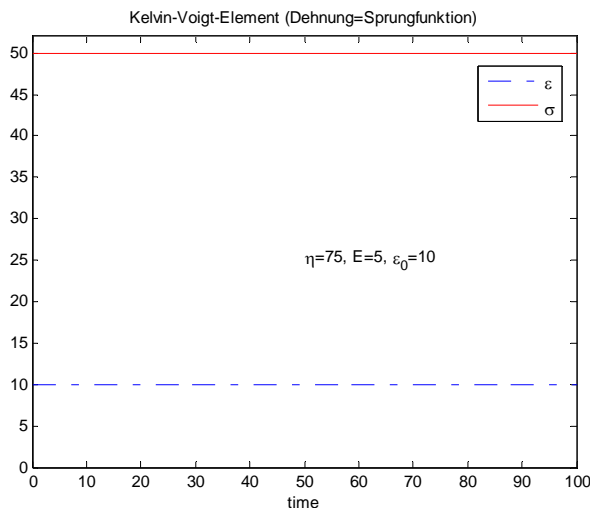
Direkt aus der DGL  $\sigma(t) = E\epsilon(t) + \eta\dot{\epsilon}(t)$  kann die Spannungsfunktion abgelesen werden.

#### 3.2.1.1 Sprungfunktion

Für die Dehnungsbelastung  $\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{\epsilon_0}{T_1} \cdot t & \text{für } 0 \leq t \leq T_1 \\ \epsilon_0 & \text{für } T_1 < t \end{cases} \rightarrow \dot{\epsilon}(t) = \frac{\epsilon_0}{T_1}$  wird für

$T_1 \rightarrow 0$  und für  $t > T_1$  als Spannungsfunktion  $\sigma(t) = E\epsilon_0$  erhalten.

Es ist dabei zu beachten, dass für den Zeitbereich  $0 \leq t \leq T_1$  der Grenzwert der Spannung für  $T_1 \rightarrow 0$  unendlich ist.



Die Grenzwerte sind:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sigma(t) = E \varepsilon_0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = E \varepsilon_0$$

Die Spannung ist konstant.

### 3.2.2 Spannungsgesteuerter Prozess → Retardationsfunktion

Die Differentialgleichung wird nach  $\dot{\varepsilon}(t) + \frac{E}{\eta} \varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{\eta}$  umgestellt und mit dem Ansatz

$e^{\frac{E}{\eta}t}$  erweitert. Die sich daraus ergebende DGL  $\left( \varepsilon e^{\frac{E}{\eta}t} \right)' = \frac{1}{\eta} \sigma e^{\frac{E}{\eta}t}$  wird integriert und mit

den Anfangsbedingungen ( $\sigma(t) = 0, \varepsilon(t) = 0$ ) erhält man:

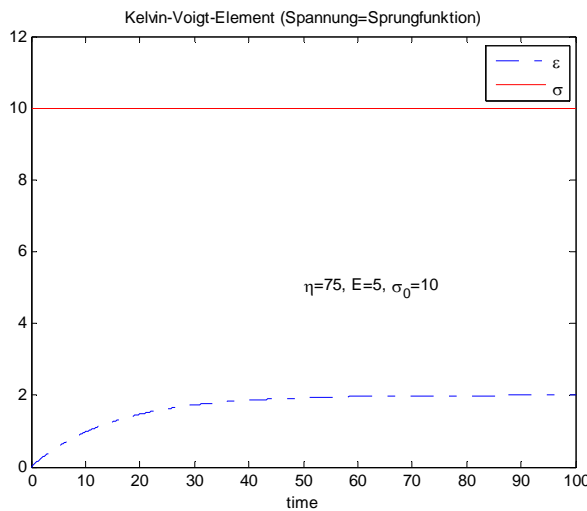
$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \sigma(t) - \int_0^t \frac{1}{E} \cdot e^{-\frac{E}{\eta}(t-s)} \cdot \dot{\sigma}(s) ds = \frac{1}{E} \int_0^t \left( 1 - e^{-\frac{E}{\eta}(t-s)} \right) \cdot \dot{\sigma}(s) ds$$

#### 3.2.2.1 Sprungfunktion

Für die Spannungsbelastung  $\sigma(t) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{T_1} \cdot t & \text{für } 0 \leq t \leq T_1 \\ \sigma_0 & \text{für } T_1 < t \end{cases} \rightarrow \dot{\sigma}(t) = \frac{\sigma_0}{T_1}$  wird für

$T_1 \rightarrow 0$  und für  $t > T_1$  als Dehnungsfunktion  $\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left( 1 - e^{-\frac{E}{\eta}t} \right) \sigma_0$ , bzw. die

Retardationsfunktion  $J(t) = \frac{1}{E} \left( 1 - e^{-\frac{E}{\eta}t} \right)$  erhalten.

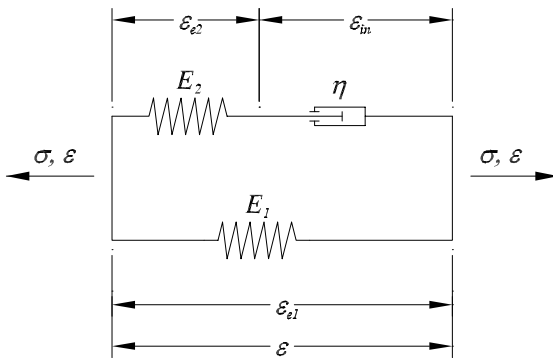


Die Grenzwerte sind:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}$$

Die Dehnung konvergiert gegen einen Grenzwert

### 3.3 Modell A



#### 3.3.1 Dehnungsgesteuerter Prozess → Relaxationsfunktion

Die zugehörige lineare DGL lautet:  $\dot{\sigma} + \frac{E_2}{\eta} \sigma = (E_1 + E_2) \cdot \dot{\varepsilon} + \frac{E_1 \cdot E_2}{\eta} \varepsilon$

Durch die Multiplikation mit  $e^{\frac{E_2 \cdot t}{\eta}}$  und unter Beachtung der Produktregel kann für die

linke Seite  $\left( \sigma \cdot e^{\frac{E_2 \cdot t}{\eta}} \right)' = \dot{\sigma} \cdot e^{\frac{E_2 \cdot t}{\eta}} + \frac{E_2}{\eta} \cdot \sigma \cdot e^{\frac{E_2 \cdot t}{\eta}}$  und für die rechte Seite

$\left( (E_1 + E_2) \cdot \dot{\varepsilon} + \frac{E_1 \cdot E_2}{\eta} \varepsilon \right) \cdot e^{\frac{E_2 \cdot t}{\eta}}$  geschrieben werden. Mit  $\left( \varepsilon \cdot e^{\frac{E_2 \cdot t}{\eta}} \right)' = \dot{\varepsilon} \cdot e^{\frac{E_2 \cdot t}{\eta}} + \frac{E_2}{\eta} \cdot \varepsilon \cdot e^{\frac{E_2 \cdot t}{\eta}}$

und daraus  $E_1 \cdot \frac{E_2}{\eta} \cdot \varepsilon \cdot e^{\frac{E_2 \cdot t}{\eta}} = E_1 \cdot \left[ \left( \varepsilon \cdot e^{\frac{E_2 \cdot t}{\eta}} \right)' - \dot{\varepsilon} \cdot e^{\frac{E_2 \cdot t}{\eta}} \right]$  folgt für die rechte Seite:

$(E_1 + E_2) \cdot \dot{\varepsilon} \cdot e^{\frac{E_2 \cdot t}{\eta}} + E_1 \cdot \left( \varepsilon \cdot e^{\frac{E_2 \cdot t}{\eta}} \right) - E_1 \cdot \dot{\varepsilon} \cdot e^{\frac{E_2 \cdot t}{\eta}}$  Die in diesem Sinn umgeformte Gleichung

lautet nun:  $\left( \sigma \cdot e^{\frac{E_2 \cdot t}{\eta}} \right) = E_1 \cdot \left( \varepsilon \cdot e^{\frac{E_2 \cdot t}{\eta}} \right) + E_2 \cdot \dot{\varepsilon} \cdot e^{\frac{E_2 \cdot t}{\eta}}$  bzw.

integriert mit  $\int_0^t$  :  $\sigma(t) \cdot e^{\frac{E_2 \cdot t}{\eta}} - \sigma(0) = E_1 \cdot \varepsilon(t) \cdot e^{\frac{E_2 \cdot t}{\eta}} - E_1 \cdot \varepsilon(0) + \int_0^t E_2 \cdot e^{\frac{E_2 \cdot s}{\eta}} \cdot \dot{\varepsilon}(s) ds$

Mit  $\sigma(0) = 0$  und  $\varepsilon(0) = 0$  geht die Gleichung über in

$\sigma(t) = E_1 \cdot \varepsilon(t) + \int_0^t E_2 \cdot e^{-\frac{E_2 \cdot (t-s)}{\eta}} \cdot \dot{\varepsilon}(s) ds$ . Durch die Erweiterung des Integranden um den 1.

Term erhält man die zeitabhängige Spannung  $\sigma(t) = \int_0^t \left( E_1 + E_2 \cdot e^{-\frac{E_2 \cdot (t-s)}{\eta}} \right) \cdot \dot{\varepsilon}(s) ds$  für

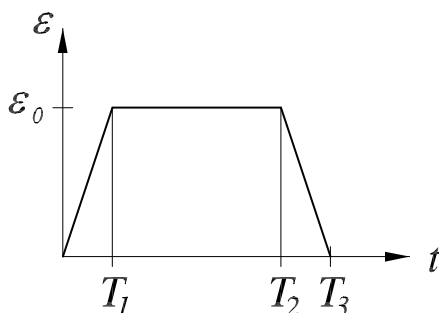
beliebige dehnungsgesteuerte Prozesse  $\varepsilon(t)$ . Sie wird auch verkürzt in der Form

$\sigma(t) = \int_0^t G(t-s) \cdot \dot{\varepsilon}(s) ds$  angegeben, wobei  $G(t-s)$  als Relaxationsfunktion bezeichnet

wird.

Das Verhalten der Spannung  $\sigma(t)$  wird nachfolgend für verschiedene Belastungen betrachtet. Dabei werden drei Arten von Belastungsfunktionen (Trapezform, Sprungfunktion und Exponentialfunktion) ausgewertet.

### 3.3.1.1 Trapezform:



Der Dehnungsverlauf wird anfangs durch eine lineare Zunahme, einer darauf folgenden konstanten Dehnung und einer anschließenden linearen Abnahme beschrieben.

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0}{T_1} \cdot t & \text{für } 0 \leq t \leq T_1 \quad \rightarrow \quad \dot{\varepsilon}(t) = \frac{\varepsilon_0}{T_1} \\ \varepsilon_0 & \text{für } T_1 < t < T_2 \quad \rightarrow \quad \dot{\varepsilon}(t) = 0 \\ \frac{\varepsilon_0}{T_1} \cdot T_3 - \frac{\varepsilon_0}{T_1} \cdot t & \text{für } T_2 \leq t \leq T_3 \quad \rightarrow \quad \dot{\varepsilon}(t) = -\frac{\varepsilon_0}{T_1} \\ 0 & \text{für } T_3 < t \end{cases}$$

Dieser nicht stetig differenzierbare, durch drei Segmente beschriebene, Dehnungsverlauf erfordert für die Berechnung des Spannungsverlaufes  $\sigma(t)$  eine Integration über die einzelnen Zeitbereiche.

$$0 \leq t \leq T_1 : \quad \sigma(t) = \int_0^t \left( E_1 + E_2 \cdot e^{-\frac{E_2 \cdot (t-s)}{\eta}} \right) \cdot \frac{\epsilon_0}{T_1} ds$$

$$\sigma(t) = \frac{\epsilon_0}{T_1} \cdot \left[ E_1 \cdot t + \eta \cdot \left( 1 - e^{-\frac{E_2 \cdot t}{\eta}} \right) \right] = f(t)$$

$$T_1 < t < T_2 : \quad \sigma(t) = \int_0^{T_1} \left( E_1 + E_2 \cdot e^{-\frac{E_2 \cdot (t-s)}{\eta}} \right) \cdot \frac{\epsilon_0}{T_1} ds + \int_{T_1}^t \left( E_1 + E_2 \cdot e^{-\frac{E_2 \cdot (t-s)}{\eta}} \right) \cdot 0 ds$$

$$\sigma(t) = \frac{\epsilon_0}{T_1} \cdot \left[ E_1 \cdot T_1 + \eta \cdot e^{-\frac{E_2 \cdot t}{\eta}} \cdot \left( e^{\frac{E_2 \cdot T_1}{\eta}} - 1 \right) \right] = f(t, T_1)$$

$$T_2 \leq t \leq T_3 :$$

$$\sigma(t) = \int_0^{T_1} \left( E_1 + E_2 \cdot e^{-\frac{E_2 \cdot (t-s)}{\eta}} \right) \cdot \frac{\epsilon_0}{T_1} ds + \int_{T_1}^{T_2} \left( E_1 + E_2 \cdot e^{-\frac{E_2 \cdot (t-s)}{\eta}} \right) \cdot 0 ds + \int_{T_2}^t \left( E_1 + E_2 \cdot e^{-\frac{E_2 \cdot (t-s)}{\eta}} \right) \cdot \left( -\frac{\epsilon_0}{T_1} \right) ds$$

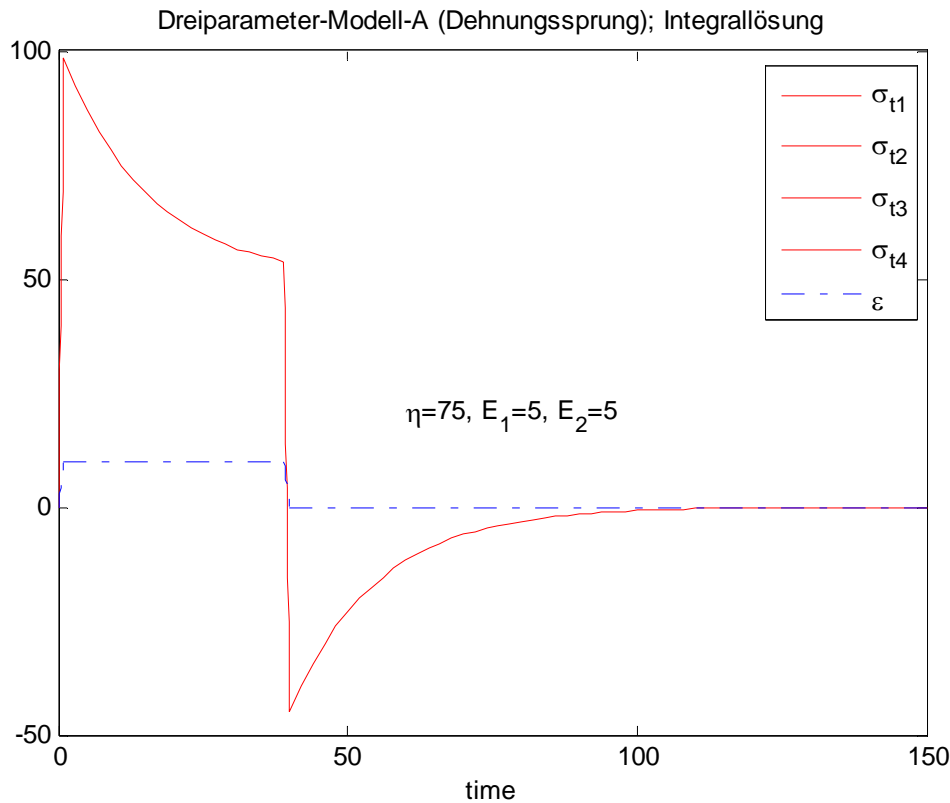
$$\sigma(t) = \frac{\epsilon_0}{T_1} \cdot \left[ E_1 \cdot T_1 + \eta \cdot e^{-\frac{E_2 \cdot t}{\eta}} \cdot \left( e^{\frac{E_2 \cdot T_1}{\eta}} - 1 \right) \right] - \frac{\epsilon_0}{T_1} \cdot \left[ E_1 (t - T_2) + \eta \cdot \left( 1 - e^{-\frac{E_2 \cdot (T_2-t)}{\eta}} \right) \right] = f(t, T_1, T_2)$$

$$T_3 < t :$$

$$\sigma(t) = \int_0^{T_1} \left( E_1 + E_2 \cdot e^{-\frac{E_2 \cdot (t-s)}{\eta}} \right) \cdot \frac{\epsilon_0}{T_1} ds + \int_{T_1}^{T_2} (\dots) \cdot 0 ds + \int_{T_2}^{T_3} \left( E_1 + E_2 \cdot e^{-\frac{E_2 \cdot (t-s)}{\eta}} \right) \cdot \left( -\frac{\epsilon_0}{T_1} \right) ds + \int_{T_3}^t (\dots) \cdot 0 ds$$

$$\sigma(t) = \frac{\epsilon_0}{T_1} \cdot \left[ E_1 \cdot T_1 + \eta \cdot e^{-\frac{E_2 \cdot t}{\eta}} \cdot \left( e^{\frac{E_2 \cdot T_1}{\eta}} - 1 \right) \right] - \frac{\epsilon_0}{T_1} \cdot \left[ E_1 (T_3 - T_2) + \eta \cdot e^{-\frac{E_2 \cdot t}{\eta}} \cdot \left( e^{\frac{E_2 \cdot T_3}{\eta}} - e^{\frac{E_2 \cdot T_2}{\eta}} \right) \right] = f(t, T_1, T_2, T_3)$$

Die graphische Auswertung der einzelnen Integrale wird im nachfolgenden Bild dargestellt. Der Relaxationsverlauf ist identisch mit der numerischen Lösung.



Da für die wichtige Fragestellung der Identifikation von Relaxations- bzw. Retardationskurven nur die Belastung erforderlich ist, wird bei den beiden folgenden Prozessen die Entlastung nicht mehr betrachtet.

### 3.3.1.2 Sprungfunktion:

Der Dehnungsverlauf wird anfangs durch eine lineare Zunahme und einer darauf folgenden konstanten Dehnung beschrieben (ähnlich der Trapezform). Durch den Grenzübergang  $T_1 \rightarrow 0$  wird die Sprungfunktion gebildet.

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0}{T_1} \cdot t & \text{für } 0 \leq t \leq T_1 \rightarrow \dot{\varepsilon}(t) = \frac{\varepsilon_0}{T_1} \\ \varepsilon_0 & \text{für } T_1 < t \rightarrow \dot{\varepsilon}(t) = 0 \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq T_1 : \quad \sigma(t) = \int_0^t \left( E_1 + E_2 \cdot e^{-\frac{E_2 \cdot (t-s)}{\eta}} \right) \cdot \frac{\varepsilon_0}{T_1} ds = \frac{\varepsilon_0}{T_1} \cdot \left[ E_1 \cdot t + \eta \cdot \left( 1 - e^{-\frac{E_2 \cdot t}{\eta}} \right) \right]$$

Mit der Bedingung  $T_1 \rightarrow 0$  bzw.  $t \rightarrow 0$  im Zeitbereich  $0 \leq t \leq T_1$  ergibt sich:  
 $\sigma(t) = \varepsilon_0 \cdot (E_1 + E_2).$

$$T_1 < t : \quad \sigma(t) = \int_0^{T_1} \left( E_1 + E_2 \cdot e^{-\frac{E_2}{\eta}(t-s)} \right) \cdot \frac{\varepsilon_0}{T_1} ds + \int_{T_1}^t \left( E_1 + E_2 \cdot e^{-\frac{E_2}{\eta}(t-s)} \right) \cdot 0 ds$$

Mit der Substitution  $s = T_1 \cdot x \rightarrow ds = T_1 \cdot dx$  geht das Integral über in

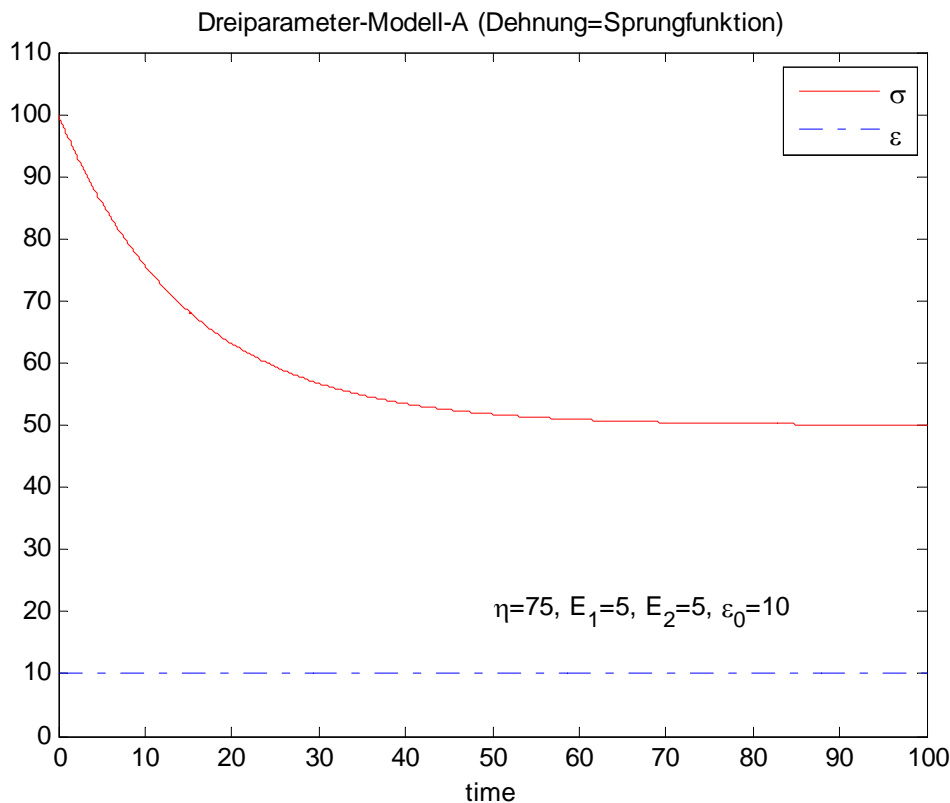
$$\sigma(t) = \int_0^1 \left( E_1 + E_2 \cdot e^{-\frac{E_2}{\eta}(t-T_1 \cdot x)} \right) \cdot \varepsilon_0 dx.$$

Durch den Grenzübergang  $T_1 \rightarrow 0$  erhält man:

$$\sigma(t) = \int_0^1 \left( E_1 + E_2 \cdot e^{-\frac{E_2}{\eta} \cdot t} \right) \cdot \varepsilon_0 dx = \varepsilon_0 \cdot \left( E_1 + E_2 \cdot e^{-\frac{E_2}{\eta} \cdot t} \right) \text{ bzw. } \sigma(t) = \varepsilon_0 \cdot G(t), \text{ mit } G(t) \text{ als}$$

Relaxationsfunktion.

Die Grenzwerte sind:  $\lim_{t \rightarrow 0} \sigma(t) = (E_1 + E_2) \varepsilon_0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = E_1 \varepsilon_0$



### 3.3.1.3 Exponentialfunktion:

Der Vorteil dieser Funktion ist, dass der Dehnungsverlauf stetig differenzierbar gegen den Grenzwert geht. Damit kann der Dehnungsverlauf realistischer nachgebildet werden, da die Dehnung im Versuch nicht schlagartig aufgebracht wird, wie dies bei der Sprungfunktion angenommen wird. Zu beachten ist, dass die tatsächliche Aufbringung der Belastung

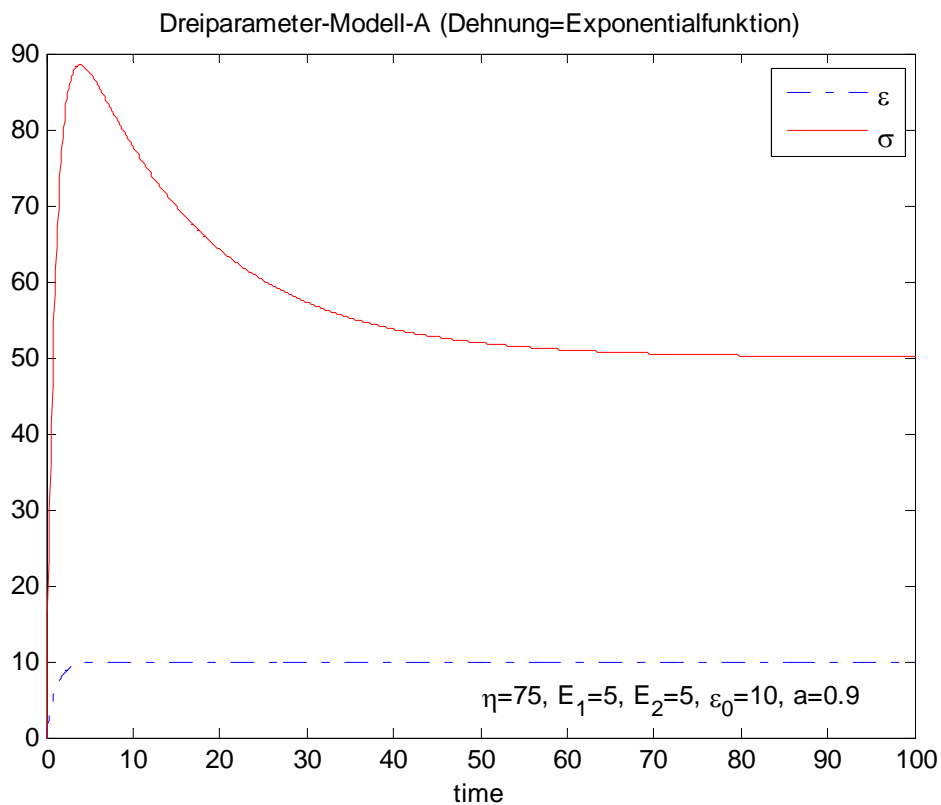
herstellerbedingt verschieden ist und nur annähernd einer Exponentialfunktion entsprechen wird.

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot (1 - e^{-a \cdot t}) \quad \text{für} \quad 0 \leq t \rightarrow \dot{\varepsilon}(t) = \varepsilon_0 \cdot a \cdot e^{-a \cdot t}$$

Der zugehörige Spannungsverlauf  $\sigma(t)$  wird durch Integration gewonnen:

$$\sigma(t) = \int_0^t \left( E_1 + E_2 \cdot e^{-\frac{E_2}{\eta}(t-s)} \right) \cdot \varepsilon_0 \cdot a \cdot e^{-a \cdot s} \, ds = \varepsilon_0 \cdot \left[ E_1 \cdot (1 - e^{-a \cdot t}) + E_2 \cdot a \cdot \frac{\eta}{E_2 - a \cdot \eta} \cdot \left( e^{-a \cdot t} - e^{-\frac{E_2}{\eta} \cdot t} \right) \right]$$

Der Spannungsverlauf  $\sigma(t)$  weist gegenüber der Trapezform einen kontinuierlichen Übergang im Anfangsbereich auf.



### 3.3.2 Spannungsgesteuerter Prozess → Retardationsfunktion

Die zugehörige lineare Material-DGL lautet:

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E_1 E_2}{\eta \cdot (E_1 + E_2)} \varepsilon = \frac{1}{E_1 + E_2} \cdot \dot{\sigma} + \frac{E_2}{\eta \cdot (E_1 + E_2)} \sigma$$



Durch die Multiplikation mit  $e^{\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t}$  und unter Beachtung der Produktregel kann für die linke Seite  $\left( \varepsilon \cdot e^{\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t} \right) = \dot{\varepsilon} \cdot e^{\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t} + \frac{E_1 E_2}{\eta \cdot (E_1 + E_2)} \cdot \varepsilon \cdot e^{\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t}$  und für die rechte Seite

$\left( \frac{1}{E_1 + E_2} \cdot \dot{\sigma} + \frac{E_2}{\eta \cdot (E_1 + E_2)} \sigma \right) \cdot e^{\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t}$  geschrieben werden. Mit der Beziehung  $\left( \sigma \cdot e^{\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t} \right) = \dot{\sigma} \cdot e^{\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t} + \frac{E_1 E_2}{\eta \cdot (E_1 + E_2)} \cdot \sigma \cdot e^{\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t}$  und der sich daraus ergebenden

Gleichung  $\frac{E_2}{\eta \cdot (E_1 + E_2)} \cdot \sigma \cdot e^{\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t} = \frac{1}{E_1} \cdot \left( \sigma \cdot e^{\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t} \right) - \frac{1}{E_1} \cdot \dot{\sigma} \cdot e^{\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t}$  folgt für die

rechte Seite  $\frac{1}{E_1 + E_2} \cdot \dot{\sigma} \cdot e^{\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t} + \frac{1}{E_1} \cdot \left( \sigma \cdot e^{\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t} \right) - \frac{1}{E_1} \cdot \dot{\sigma} \cdot e^{\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t}$ . Die DGL lautet

nun:  $\left( \varepsilon \cdot e^{\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t} \right) = \left( \frac{1}{E_1 + E_2} - \frac{1}{E_1} \right) \cdot \dot{\sigma} \cdot e^{\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t} + \frac{1}{E_1} \cdot \left( \sigma \cdot e^{\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t} \right)$  bzw. integriert

mit  $\int_0^t$  :

$$\varepsilon(t) \cdot e^{\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t} - \varepsilon(0) = \frac{1}{E_1} \cdot \sigma(s) \cdot e^{\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t} - \frac{1}{E_1} \cdot \sigma(0) + \int_0^t \left( \frac{1}{E_1 + E_2} - \frac{1}{E_1} \right) \cdot e^{\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} s} \cdot \dot{\sigma}(s) ds$$

Mit den Anfangsbedingungen  $\sigma(0) = 0$  und  $\varepsilon(0) = 0$  geht die Gleichung über in

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E_1} \cdot \sigma(t) + \int_0^t \left( \frac{1}{E_1 + E_2} - \frac{1}{E_1} \right) \cdot e^{-\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)}(t-s)} \cdot \dot{\sigma}(s) ds.$$

Durch die Erweiterung des Integranden um den 1. Term erhält man die zeitabhängige Dehnung

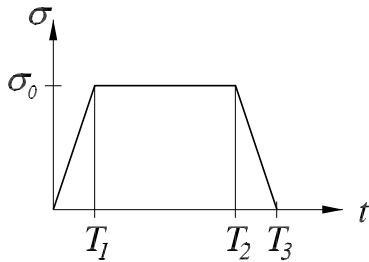
$$\varepsilon(t) = \int_0^t \left[ \frac{1}{E_1} + \left( \frac{1}{E_1 + E_2} - \frac{1}{E_1} \right) \cdot e^{-\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)}(t-s)} \right] \cdot \dot{\sigma}(s) ds$$

für beliebige spannungsgesteuerte Prozesse. Sie wird auch verkürzt in der Form  $\varepsilon(t) = \int_0^t J(t-s) \cdot \dot{\sigma}(s) ds$  angegeben, wobei

$J(t-s)$  als Retardationsfunktion bezeichnet wird.

Das Verhalten der zeitabhängigen Dehnung  $\varepsilon(t)$  wird analog zum vorhergehenden Kapitel für unterschiedliche Belastungsfunktionen (Trapezform, Sprungfunktion und Exponentialfunktion) ausgewertet.

### 3.3.2.1 Trapezform:



Der Spannungsverlauf wird anfangs durch eine lineare Zunahme, einer darauf folgenden konstanten Spannung und einer anschließenden linearen Abnahme beschrieben.

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{T_1} \cdot t & \text{für } 0 \leq t \leq T_1 \quad \rightarrow \quad \dot{\sigma}(t) = \frac{\sigma_0}{T_1} \\ \sigma_0 & \text{für } T_1 < t < T_2 \quad \rightarrow \quad \dot{\sigma}(t) = 0 \\ \frac{\sigma_0}{T_1} \cdot T_3 - \frac{\sigma_0}{T_1} \cdot t & \text{für } T_2 \leq t \leq T_3 \quad \rightarrow \quad \dot{\sigma}(t) = -\frac{\sigma_0}{T_1} \\ 0 & \text{für } T_3 < t \end{cases}$$

Dieser nicht stetig differenzierbare Spannungsverlauf erfordert zur Berechnung des zugehörigen Dehnungsverlaufs  $\varepsilon(t)$  eine Integration über die einzelnen Zeitbereiche. Die abschnittsweise Integration, analog dem vorhergehenden Kapitel durchgeführt, liefert für die einzelnen Abschnitte:

$$0 \leq t \leq T_1 : \quad \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{T_1} \cdot \left[ \frac{t}{E_1} - \frac{\eta}{E_1^2} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t} \right) \right] = f(t)$$

$$T_1 < t < T_2 : \quad \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{T_1} \cdot \left[ \frac{T_1}{E_1} - \frac{\eta}{E_1^2} \cdot e^{-\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t} \left( e^{\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} T_1} - 1 \right) \right] = f(t, T_1)$$

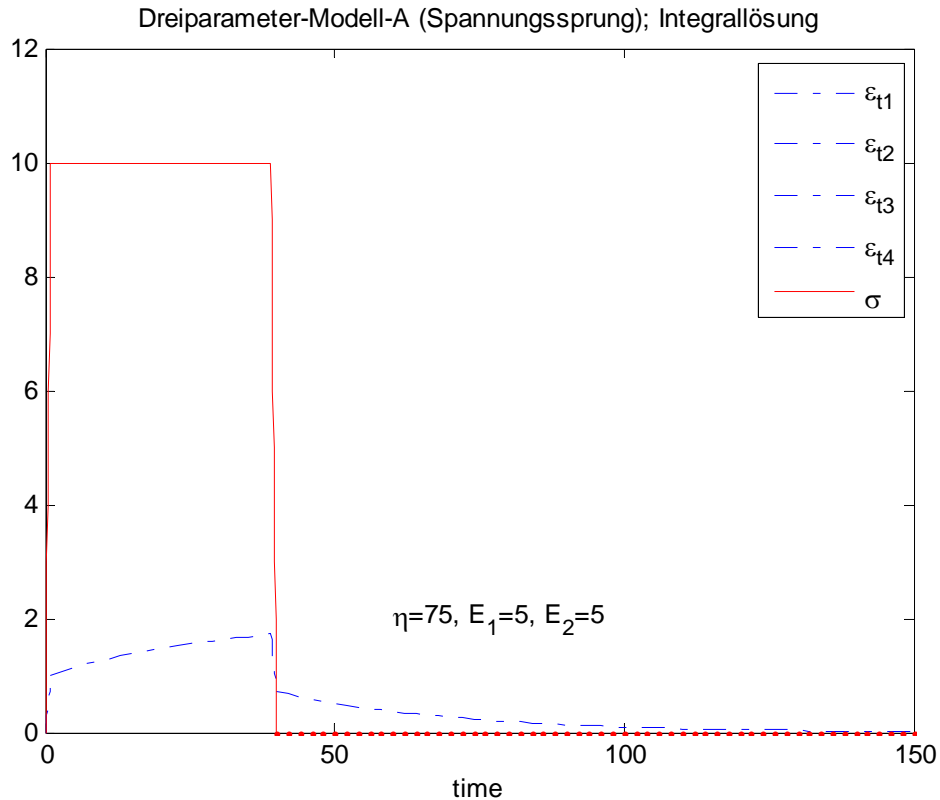
$$T_2 \leq t \leq T_3 :$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{T_1} \cdot \left[ \frac{T_1}{E_1} - \frac{\eta}{E_1^2} \cdot e^{-\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t} \left( e^{\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} T_1} - 1 \right) \right] - \frac{\sigma_0}{T_1} \cdot \left[ \frac{t - T_2}{E_1} - \frac{\eta}{E_1^2} \cdot e^{-\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} (T_2 - t)} \right) \right] = f(t, T_1, T_2)$$

$$T_3 < t :$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{T_1} \cdot \left[ \frac{T_1}{E_1} - \frac{\eta}{E_1^2} \cdot e^{-\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t} \left( e^{\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} T_1} - 1 \right) \right] - \frac{\sigma_0}{T_1} \cdot \left[ \frac{T_3 - T_2}{E_1} - \frac{\eta}{E_1^2} \cdot e^{-\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t} \cdot \left( e^{\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} T_3} - e^{\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} T_2} \right) \right] = f(t, T_1, T_2, T_3)$$

Die graphische Auswertung der einzelnen Integrale wird im nachfolgenden Bild dargestellt. Der Retardationsverlauf ist identisch mit der numerischen Lösung.



### 3.3.2.2 Sprungfunktion:

Der Spannungsverlauf wird anfangs durch eine lineare zeitliche Zunahme und einer darauf folgenden konstanten Spannung beschrieben (ähnlich der Trapezform). Durch den Grenzübergang  $T_1 \rightarrow 0$  wird die Sprungfunktion gebildet.

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{T_1} \cdot t & \text{für } 0 \leq t \leq T_1 \rightarrow \dot{\sigma}(t) = \frac{\sigma_0}{T_1} \\ \sigma_0 & \text{für } T_1 < t \rightarrow \dot{\sigma}(t) = 0 \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq T_1 : \quad \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{T_1} \cdot \left[ \frac{t}{E_1} - \frac{\eta}{E_1^2} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t} \right) \right] = f(t)$$

Nach Bildung des Grenzübergangs  $T_1 \rightarrow 0$  bzw.  $t \rightarrow 0$  ergibt sich für den Zeitbereich

$$0 \leq t \leq T_1 \text{ die Dehnung } \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1 + E_2}.$$

$$T_1 < t :$$

$$\varepsilon(t) = \int_0^{T_1} \left( \frac{1}{E_1} + \left( \frac{1}{E_1 + E_2} - \frac{1}{E_1} \right) \cdot e^{-\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)}(t-s)} \right) \cdot \frac{\sigma_0}{T_1} ds + \int_{T_1}^t \left( \frac{1}{E_1} + \left( \frac{1}{E_1 + E_2} - \frac{1}{E_1} \right) \cdot e^{-\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)}(t-s)} \right) \cdot 0 ds$$

Mit der Substitution  $s = T_1 \cdot x \rightarrow ds = T_1 \cdot dx$  geht das Integral über in

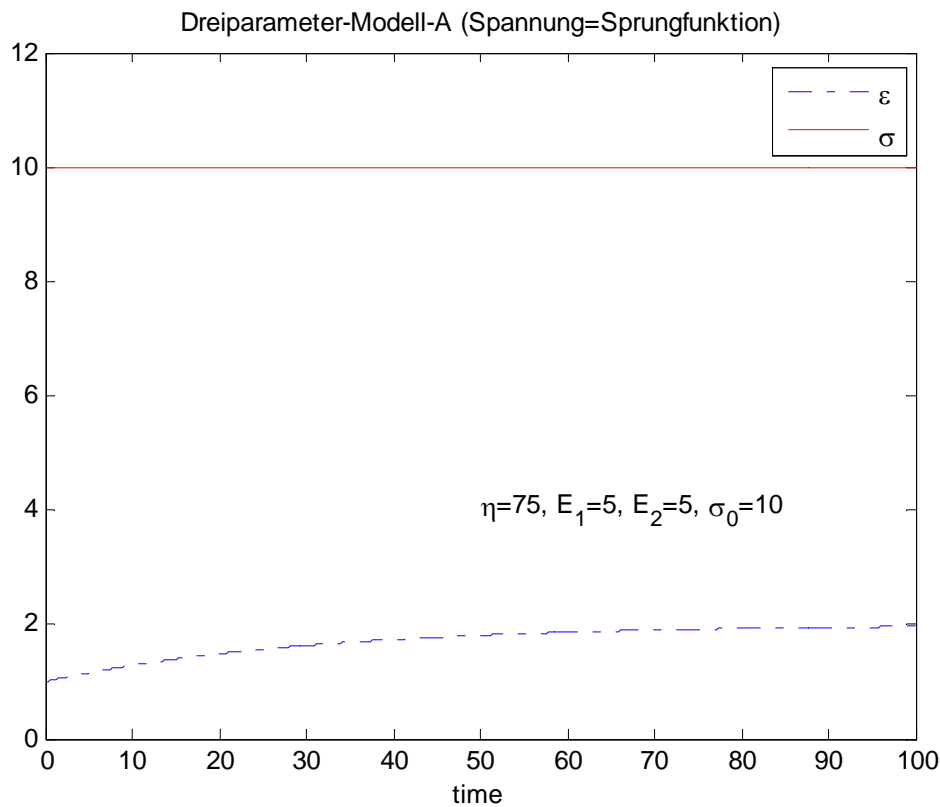
$$\varepsilon(t) = \int_0^1 \left( \frac{1}{E_1} + \left( \frac{1}{E_1 + E_2} - \frac{1}{E_1} \right) \cdot e^{-\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)}(t-T_1 \cdot x)} \right) \cdot \sigma_0 dx.$$

Durch den Grenzübergang  $T_1 \rightarrow 0$  erhält man:

$$\varepsilon(t) = \int_0^1 \left( \frac{1}{E_1} + \left( \frac{1}{E_1 + E_2} - \frac{1}{E_1} \right) \cdot e^{-\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)}t} \right) \cdot \sigma_0 dx = \sigma_0 \cdot \left( \frac{1}{E_1} + \left( \frac{1}{E_1 + E_2} - \frac{1}{E_1} \right) \cdot e^{-\frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)}t} \right)$$

bzw.  $\varepsilon(t) = \sigma_0 \cdot J(t)$ , mit  $J(t)$  als Retardationsfunktion.

Die Grenzwerte sind:  $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = \sigma_0 \left( \frac{1}{E_1 + E_2} \right)$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1}$



### 3.3.2.3 Exponentialfunktion:

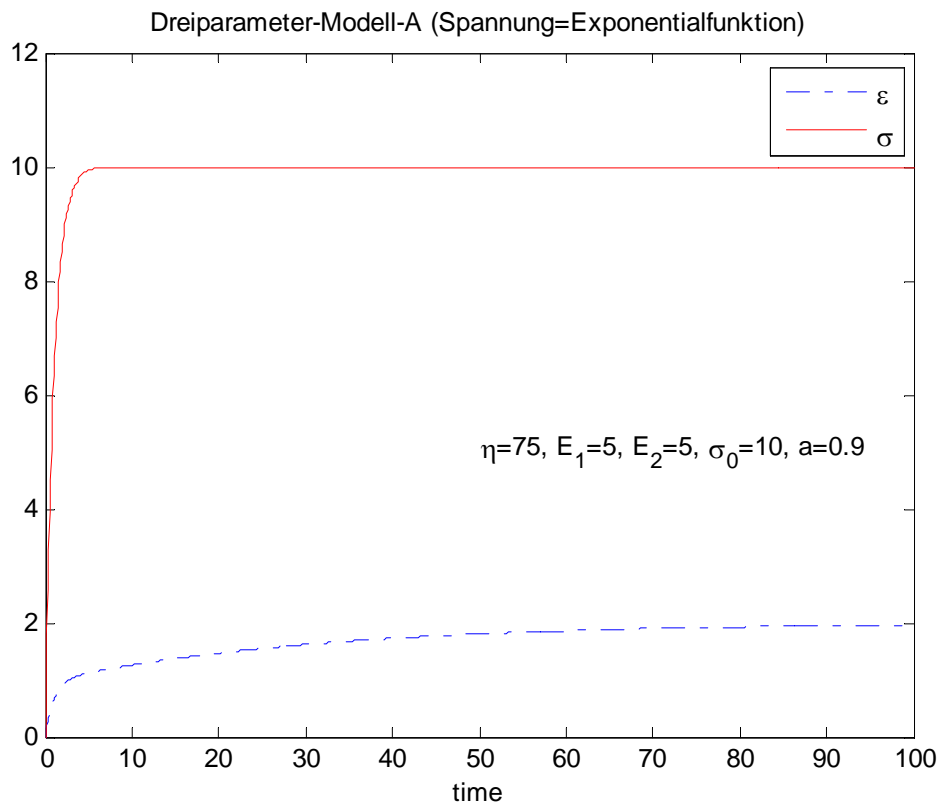
Der Vorteil dieser Funktion wurde bereits im vorherigen Kapitel erörtert. Der Spannungsverlauf wird durch nachfolgende Funktion beschrieben:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cdot (1 - e^{-at}) \quad \text{für} \quad 0 \leq t \rightarrow \dot{\sigma}(t) = \sigma_0 \cdot a \cdot e^{-at}$$

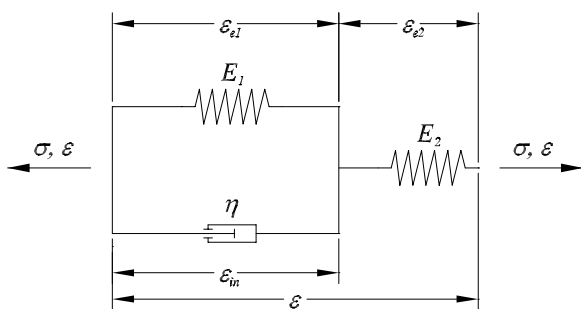
Der zugehörige Dehnungsverlauf  $\varepsilon(t)$  wird durch Integration gewonnen:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \left( \frac{1}{E_1} - \frac{E_2}{E_1(E_1 + E_2)} \cdot e^{-\frac{E_1 + E_2}{\eta}(t-s)} \right) \cdot \sigma_0 \cdot a \cdot e^{-as} ds = \sigma_0 \cdot a \cdot \left[ \frac{1}{E_1 \cdot a} (1 - e^{-at}) + \frac{E_2}{E_1 \cdot E_2 - a \cdot \eta \cdot (E_1 + E_2)} \cdot \frac{\eta}{E_1} \cdot \left( e^{-\frac{E_1 + E_2}{E_1 + E_2} \eta t} - e^{-at} \right) \right]$$

Der Spannungsverlauf  $\sigma(t)$  weist gegenüber der Trapezform einen kontinuierlichen Übergang im Anfangsbereich auf.



### 3.4 Modell B



Das Modell B wird nur für die Sprungbelastung ausgewertet, da durch die Belastung in Trapezform bzw. durch eine Exponentialfunktion analoge Resultate zu Modell A gewonnen werden.

### 3.4.1 Dehnungsgesteuerter Prozess → Relaxationsfunktion

Mit dem Ansatz  $e^{-\frac{E_1+E_2}{\eta}t}$  und den Anfangsbedingungen ( $\sigma(t) = 0$ ,  $\varepsilon(t) = 0$ ) wird die Differentialgleichung  $\dot{\sigma} + \frac{E_1 + E_2}{\eta} \sigma = E_2 \cdot \dot{\varepsilon} + \frac{E_1 \cdot E_2}{\eta} \varepsilon$  für den Spannungsverlauf gelöst:

$$\sigma(t) = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon(t) + \int_0^t \frac{E_2^2}{E_1 + E_2} e^{-\frac{E_1+E_2}{\eta}(t-s)} \dot{\varepsilon}(s) ds$$

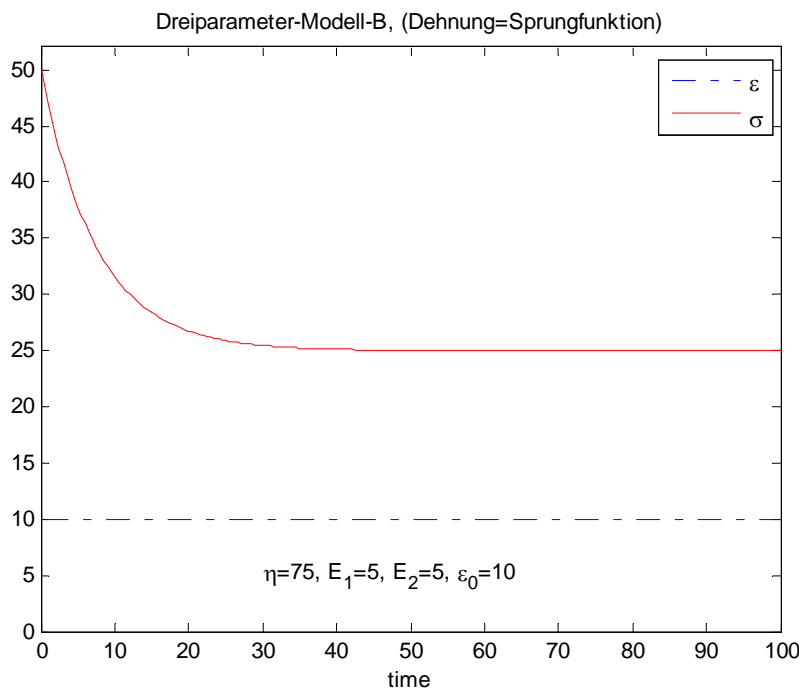
#### 3.4.1.1 Sprungfunktion

Für die Dehnungsbelastung  $\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0}{T_1} \cdot t & \text{für } 0 \leq t \leq T_1 \\ \varepsilon_0 & \text{für } T_1 < t \end{cases} \rightarrow \dot{\varepsilon}(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0}{T_1} \\ 0 \end{cases}$  wird für

$T_1 \rightarrow 0$  als Spannungsfunktion  $\sigma(t) = \left( \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} + \frac{E_2^2}{E_1 + E_2} e^{-\frac{E_1+E_2}{\eta}t} \right) \varepsilon_0$  bzw. die

Relaxationsfunktion  $G(t) = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} + \frac{E_2^2}{E_1 + E_2} e^{-\frac{E_1+E_2}{\eta}t}$  erhalten.

Die Grenzwerte sind:  $\lim_{t \rightarrow 0} \sigma(t) = \left( \frac{E_1 E_2 + E_2^2}{E_1 + E_2} \right) \varepsilon_0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = \left( \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \right) \varepsilon_0$



### 3.4.2 Spannungsgesteuerter Prozess → Retardationsfunktion

Aus der nach der Dehnung umgestellten Differentialgleichung  $\dot{\varepsilon} + \frac{E_1}{\eta} \varepsilon = \frac{1}{E_2} \dot{\sigma} + \frac{E_1 + E_2}{\eta E_2} \sigma$

wird mit dem Ansatz  $e^{-\frac{E_1+E_2}{\eta}t}$  und den Anfangsbedingungen ( $\sigma(t) = 0$ ,  $\varepsilon(t) = 0$ ) der Dehnungsverlauf bestimmt.

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E_2} \sigma(t) + \int_0^t \frac{1}{E_1} \left( 1 - e^{-\frac{E_1}{\eta}(t-s)} \right) \dot{\sigma}(s) ds$$

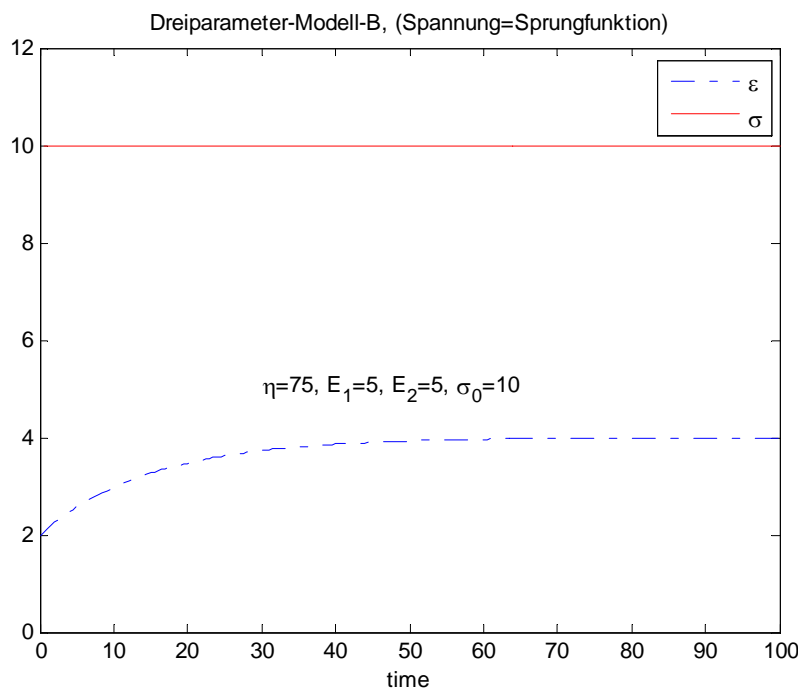
#### 3.4.2.1 Sprungfunktion

Für die Spannungsbelastung  $\sigma(t) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{T_1} \cdot t & \text{für } 0 \leq t \leq T_1 \\ \sigma_0 & \text{für } T_1 < t \end{cases} \rightarrow \dot{\sigma}(t) = \frac{\sigma_0}{T_1}$  wird für

$T_1 \rightarrow 0$  als Dehnungsfunktion  $\varepsilon(t) = \left[ \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_1} \left( 1 - e^{-\frac{E_1}{\eta}t} \right) \right] \sigma_0$ , bzw. die Retardationsfunktion

$J(t) = \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_1} \left( 1 - e^{-\frac{E_1}{\eta}t} \right)$  erhalten.

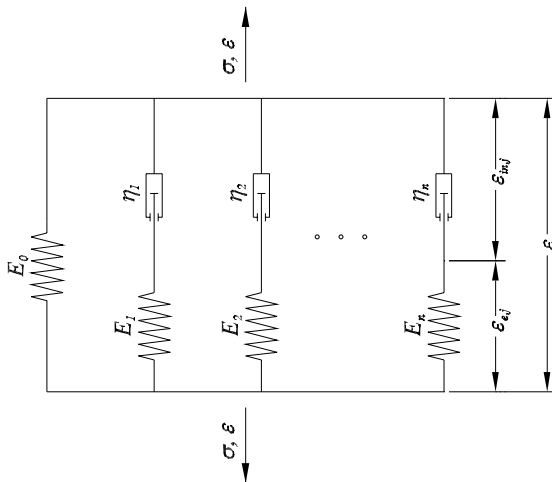
Die Grenzwerte sind:  $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_2}$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \left( \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \right) \sigma_0$



### 3.5 Diskrete Spektren

Die analytische Lösung von diskreten Spektren, damit sind die Maxwell- und die Kelvin-Voigt-Ketten gemeint, wird nachfolgend behandelt.

#### 3.5.1 Maxwell-Kette



Mit der Maxwellkette kann die Relaxation sehr gut und einfach beschrieben und analytisch ausgewertet werden. Die Berechnung der Retardation ist weniger einfach und wird daher nachfolgend nicht behandelt.

Die Gesamtdehnung für die Maxwell-Kette ist  $\varepsilon = \varepsilon_j = \varepsilon_{e,j} + \varepsilon_{in,j}$  und das

Kräftegleichgewicht ergibt, in Spannungen ausgedrückt,  $\sigma = \sigma_{eq} + \sum_{j=1}^n \sigma_{ov,j}$ . Die

Gleichgewichtsspannung  $\sigma_{eq}$  tritt dabei in der Feder  $E_0$  und die Überspannung

$\sigma_{ov} = \sum_{j=1}^n \sigma_{ov,j}$  in den Maxwell-Elementen auf. Die Überspannung in den einzelnen

Maxwell-Elementen wird durch das lineare Elastizitätsgesetz der Feder  $E_j$  bzw. die lineare

Viskosität im Dämpfer des Elementes in der Form  $\sigma_{ov,j} = E_j \cdot \varepsilon_{e,j} = \eta_j \cdot \dot{\varepsilon}_{in,j}$  beschrieben.

Die gesuchte Überspannung in den einzelnen Maxwell-Elementen in Abhängigkeit von der

Dehnung  $\varepsilon(t)$  wird aus  $\varepsilon_{e,j} = \varepsilon - \varepsilon_{in,j} \rightarrow \frac{\dot{\sigma}_{ov,j}}{E_j} = \dot{\varepsilon} - \frac{\sigma_{ov,j}}{\eta_j}$  zu

$\dot{\sigma}_{ov,j} = E_j \cdot \dot{\varepsilon} - \frac{E_j}{\eta_j} \cdot \sigma_{ov,j} = E_j \cdot \dot{\varepsilon} - \frac{1}{\tau_j} \cdot \sigma_{ov,j}$  mit  $\tau_j = \frac{\eta_j}{E_j}$  gefunden.



Durch die Erweiterung mit  $e^{\frac{t}{\tau_j}}$  folgt  $\left(\dot{\sigma}_{ov,j} + \frac{1}{\tau_j} \cdot \sigma_{ov,j}\right) \cdot e^{\frac{t}{\tau_j}} = \left(\sigma_{ov,j} \cdot e^{\frac{t}{\tau_j}}\right) \cdot \dot{\varepsilon}$ .

Integriert mit  $\int_0^t$  und  $\sigma_{ov,j}(0) = 0$  ergibt sich  $\sigma_{ov,j}(t) \cdot e^{\frac{t}{\tau_j}} - \sigma_{ov,j}(0) = E_j \int_0^t e^{\frac{s}{\tau_j}} \cdot \dot{\varepsilon}(s) ds$ . Die

Überspannung lässt sich somit durch  $\sigma_{ov,j}(t) = E_j \int_0^t e^{-\frac{(t-s)}{\tau_j}} \cdot \dot{\varepsilon}(s) ds$  ausdrücken. Durch das

Einsetzen in das Kräftegleichgewicht ergibt sich für die Spannung

$$\sigma(t) = E_0 \cdot \varepsilon(t) + \int_0^t \left( \sum_{j=1}^n E_j \cdot e^{-\frac{(t-s)}{\tau_j}} \right) \cdot \dot{\varepsilon}(s) ds = \int_0^t \left( E_0 + \sum_{j=1}^n E_j \cdot e^{-\frac{(t-s)}{\tau_j}} \right) \cdot \dot{\varepsilon}(s) ds \quad \text{bzw.}$$

$$\sigma(t) = \int_0^t G(t-s) \cdot \dot{\varepsilon}(s) ds \quad \text{mit der Relaxationsfunktion } G(t-s) = E_0 + \sum_{j=1}^n E_j \cdot e^{-\frac{(t-s)}{\tau_j}}.$$

Durch diese Relaxationsfunktion kann nun mit  $2n+1$  Materialparametern das viskoelastische Materialverhalten beschrieben werden. Mit zunehmender Anzahl von Elementen kann das Material über einen längeren Zeitraum entsprechend genauer beschrieben werden. Jedoch ist mit zunehmender Anzahl von Materialparametern ein zunehmender Aufwand zur Bestimmung dieser Parameter verbunden.

### 3.5.1.1 Sprungfunktion:

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0}{T_1} \cdot t & \text{für } 0 \leq t \leq T_1 \quad \rightarrow \quad \dot{\varepsilon}(t) = \frac{\varepsilon_0}{T_1} \\ \varepsilon_0 & \text{für } T_1 < t \quad \rightarrow \quad \dot{\varepsilon}(t) = 0 \end{cases}$$

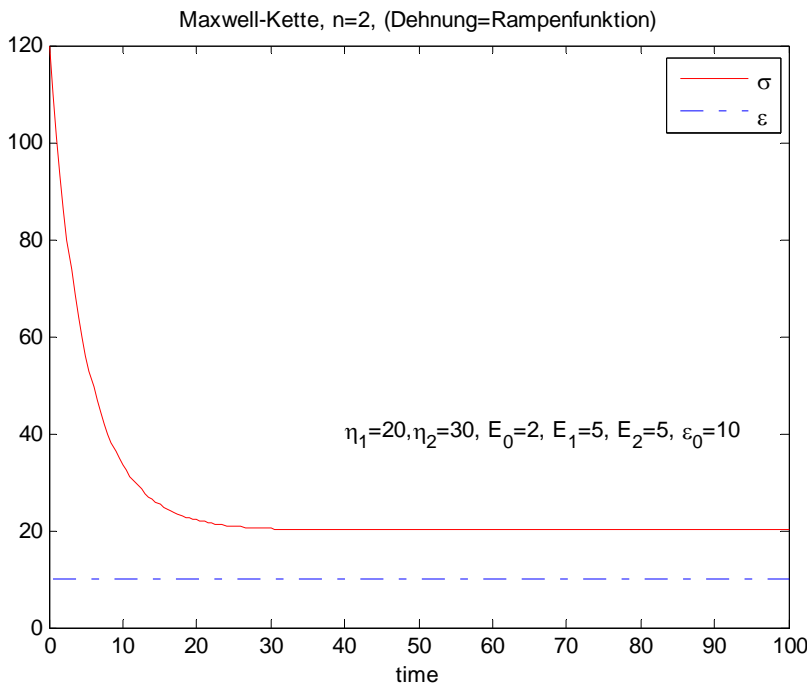
Die Auswertung des Materialmodells für eine Sprungfunktion wie im vorhergehenden Kapitel führt auf den Spannungsverlauf:

$$\sigma(t) = \int_0^t \left( E_0 + \sum_{j=1}^n E_j \cdot e^{-\frac{(t-s)}{\tau_j}} \right) \cdot \dot{\varepsilon}(s) ds = \varepsilon_0 \cdot \left( E_0 + \sum_{j=1}^n E_j \cdot e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \quad \text{bzw.} \quad \sigma(t) = \varepsilon_0 \cdot G(t) \quad \text{mit der}$$

$$\text{Relaxationsfunktion } G(t) = E_0 + \sum_{j=1}^n E_j \cdot e^{-\frac{t}{\tau_j}}$$

Im nachfolgenden Diagramm wird die Relaxation durch eine Maxwell-Kette ( $n=2$ ) wiedergegeben.

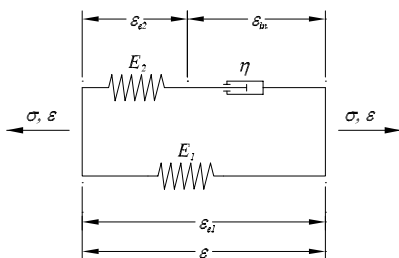
$$\text{Die Grenzwerte sind: } \lim_{t \rightarrow 0} \sigma(t) = \left( E_0 + \sum_{j=1}^n E_j \right) \varepsilon_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = E_0 \varepsilon_0$$



### 3.5.1.1.1 Ableitung der Dreiparametermodelle A und D

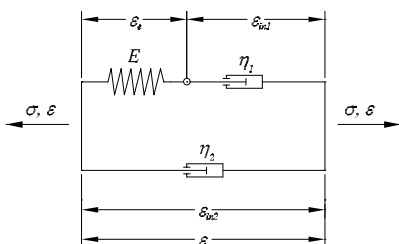
Aus der Relaxationsfunktion  $G(t) = E_0 + \sum_{j=1}^n E_j \cdot e^{-\frac{t}{\tau_j}}$  für die Maxwell-Kette können die Relaxationsfunktionen für die Dreiparametermodelle A und D sofort abgeleitet werden.

#### Modell A



Mit  $n=1$  folgt die Relaxationsfunktion:  $G(t) = E_0 + E_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} = E_0 + E_1 \cdot e^{-\frac{E_1 t}{\eta_1}}$

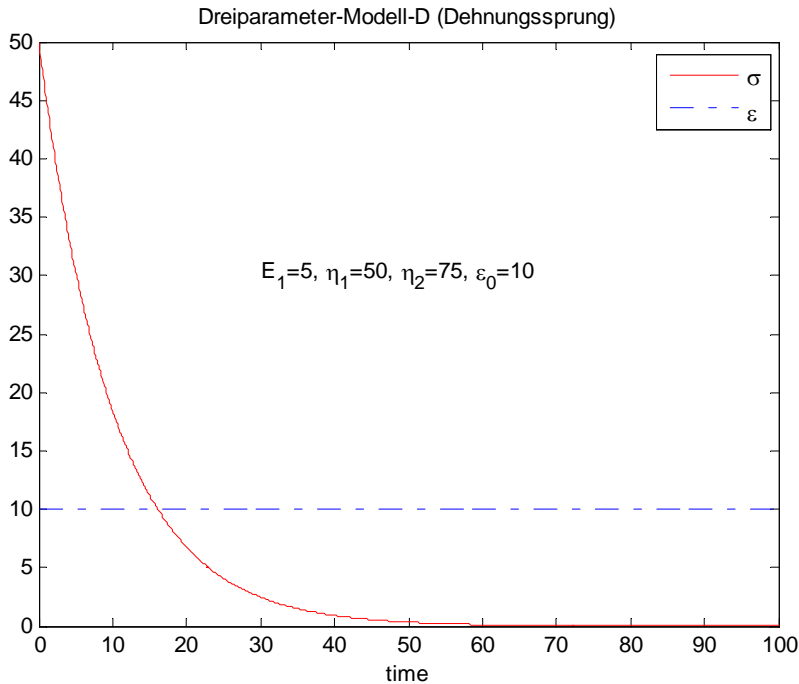
#### Modell D



Mit  $n=2$ ,  $E_0 = 0$  und  $E_2 = \infty$  folgt für die Relaxationsfunktion:  $G(t) = E_1 \cdot e^{-\frac{E_1}{\eta} t}$

Zu beachten ist, dass sie der Relaxationsfunktion des Maxwellelementes entspricht. Für  $\varepsilon = \text{const.}$  ist die Spannung im Dämpfer  $\eta_2$  null.

Die Grenzwerte sind:  $\lim_{t \rightarrow 0} \sigma(t) = E_1 \varepsilon_0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = 0$



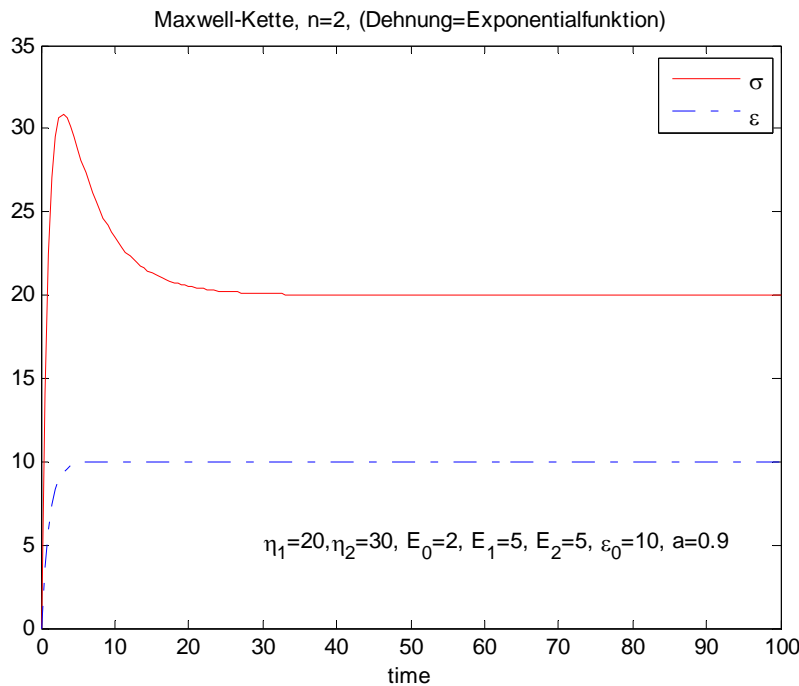
### 3.5.1.2 Exponentialfunktion:

Der Dehnungsverlauf  $\varepsilon(t)$  wird durch nachfolgende Funktion beschrieben:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot (1 - e^{-a \cdot t}) \quad \text{für} \quad 0 \leq t \quad \rightarrow \quad \dot{\varepsilon}(t) = \varepsilon_0 \cdot a \cdot e^{-a \cdot t}$$

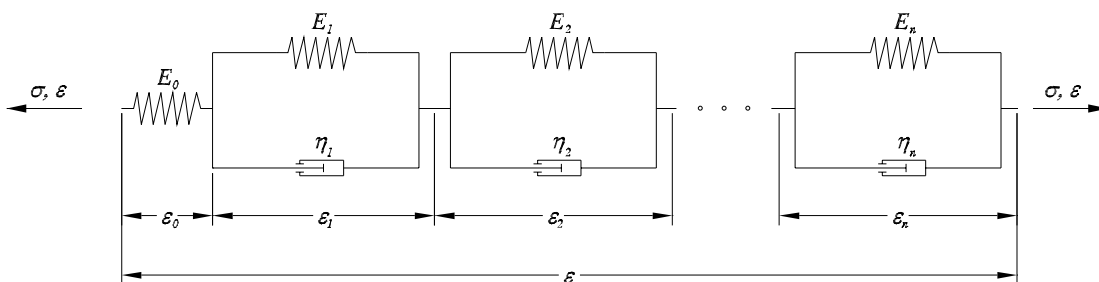
Der zugehörige Spannungsverlauf  $\sigma(t)$  wird durch Integration gewonnen:

$$\sigma(t) = \int_0^t \left( E_0 + \sum_{j=1}^n E_j \cdot e^{-\frac{(t-s)}{\tau_j}} \right) \cdot \varepsilon_0 \cdot a \cdot e^{-a \cdot s} \, ds = E_0 \cdot \varepsilon_0 - \varepsilon_0 \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \left[ E_0 - \sum_{j=1}^n a \cdot \frac{\eta_j}{1 - a \cdot \tau_j} \cdot \left( 1 - e^{-\left(\frac{a-1}{\tau_j}\right) t} \right) \right]$$



Die Spannung  $\sigma(t)$  beginnt im Anfangsbereich bei Null, durchläuft ein Maximum und relaxiert im Anschluss. Verglichen mit der Sprungfunktion, bei der die Spannung von einem Maximum startet, wird durch die Anregung in Form der Exponentialfunktion ein anderer Spannungsverlauf beschrieben.

### 3.5.2 Kelvin-Voigt-Kette



Konträr zur Maxwell-Kette lässt sich mit der Kelvin-Voigt-Kette die Retardation sehr gut und einfach beschreiben. Die Relaxation hingegen lässt sich damit weniger einfach beschreiben und analytisch auswerten. Daher wird sie nachfolgend nicht behandelt.

Die Gesamtdehnung  $\epsilon$  entspricht der Summe der Dehnung  $\epsilon_0$  in der Feder  $E_0$  und der Dehnungen  $\epsilon_j$  in den Kelvin-Voigt -Elementen  $\epsilon_n$ :  $\epsilon = \epsilon_0 + \sum_{j=1}^n \epsilon_j = \epsilon_0 + \sum_{j=1}^n \epsilon_{in,j}$

Die Dehnung  $\varepsilon_j$  in den Kelvin-Voigt-Elementen entspricht wegen des Dämpfers einer inelastischen Dehnung  $\varepsilon_j = \varepsilon_{in,j}$ .

Das Kräftegleichgewicht für die Kette lautet:

$$\sigma = \sigma_0 = \sigma_1 = \dots = \sigma_n \text{ mit } \sigma_0 = E_0 \cdot \varepsilon_0 \text{ und } \sigma = \sigma_j = E_j \cdot \varepsilon_{in,j} + \eta_j \cdot \dot{\varepsilon}_{in,j} \text{ für } j \geq 1.$$

Daraus folgt mit  $\dot{\varepsilon}_{in,j} + \frac{1}{\tau_j} \cdot \varepsilon_{in,j} = \frac{\sigma_j}{\eta_j}$ ,  $\tau_j = \frac{\eta_j}{E_j}$  und Multiplikation mit  $e^{\frac{t}{\tau_j}}$ :

$$\left( \varepsilon_{in,j} \cdot e^{\frac{t}{\tau_j}} \right)' = \frac{\sigma(t)}{\eta_j} \cdot e^{\frac{t}{\tau_j}} = \frac{\sigma(t)}{E_j \cdot \tau_j} \cdot e^{\frac{t}{\tau_j}}$$

Mit

$$\left( \sigma(t) \cdot e^{\frac{t}{\tau_j}} \right)' = \dot{\sigma}(t) \cdot e^{\frac{t}{\tau_j}} + \frac{\sigma(t)}{\tau_j} \cdot e^{\frac{t}{\tau_j}} \rightarrow \frac{1}{E_j \tau_j} \cdot \sigma(t) \cdot e^{\frac{t}{\tau_j}} = \frac{1}{E_j} \cdot \left( \sigma(t) \cdot e^{\frac{t}{\tau_j}} \right)' - \frac{1}{E_j} \cdot \dot{\sigma}(t) \cdot e^{\frac{t}{\tau_j}}$$

$$\text{folgt: } \left( \varepsilon_{in,j} \cdot e^{\frac{t}{\tau_j}} \right)' = \frac{1}{E_j} \cdot \left( \sigma(t) \cdot e^{\frac{t}{\tau_j}} \right)' - \frac{1}{E_j} \cdot \dot{\sigma}(t) \cdot e^{\frac{t}{\tau_j}}$$

Die Integration  $\int_0^t$  mit den Anfangsbedingungen  $\varepsilon_{in,j}(0) = 0$ ,  $\sigma_{in,j}(0) = 0$  führt auf die

zeitabhängige inelastische Dehnung:

$$\varepsilon_{in,j}(t) = \frac{\sigma(t)}{E_j} - \int_0^t \frac{1}{E_j} \cdot e^{-\frac{(t-s)}{\tau_j}} \cdot \dot{\sigma}(s) \, ds = \int_0^t \frac{1}{E_j} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{(t-s)}{\tau_j}} \right) \cdot \dot{\sigma}(s) \, ds$$

Für die zeitabhängige Gesamtdehnung ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{\sigma(t)}{E_0} + \int_0^t \sum_{j=1}^n \frac{1}{E_j} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{(t-s)}{\tau_j}} \right) \cdot \dot{\sigma}(s) \, ds = \int_0^t \left[ \frac{1}{E_0} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{E_j} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{(t-s)}{\tau_j}} \right) \right] \cdot \dot{\sigma}(s) \, ds \\ &= \int_0^t J(t-s) \cdot \dot{\sigma}(s) \, ds \end{aligned}$$

### 3.5.2.1 Sprungfunktion:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{T_1} \cdot t & \text{für } 0 \leq t \leq T_1 \quad \rightarrow \quad \dot{\sigma}(t) = \frac{\sigma_0}{T_1} \\ \sigma_0 & \text{für } T_1 < t \quad \rightarrow \quad \dot{\sigma}(t) = 0 \end{cases}$$

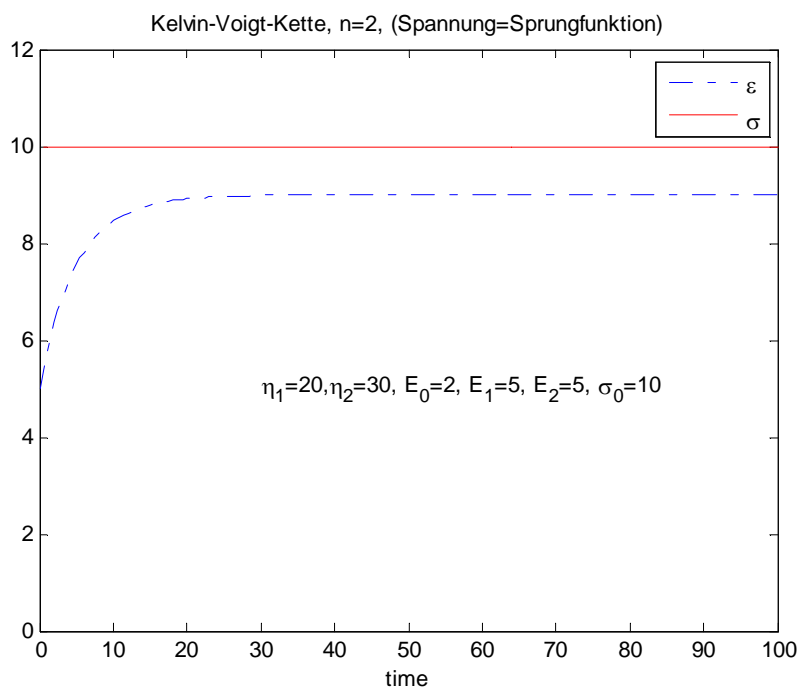
Die analoge Anwendung der Sprungfunktion wie im vorhergehenden Kapitel führt auf den Dehnungsverlauf:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \left[ \frac{1}{E_0} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{E_j} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{(t-s)}{\tau_j}} \right) \right] \cdot \dot{\sigma}(t) \, ds = \sigma_0 \cdot \left[ \frac{1}{E_0} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{E_j} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \right] \text{ bzw.}$$

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \cdot J(t) \text{ mit der Retardationsfunktion } J(t) = \frac{1}{E_0} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{E_j} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right)$$

Im nachfolgenden Diagramm wird die Retardation durch eine Kelvin-Voigt-Kette (n=2) wiedergegeben.

Die Grenzwerte sind:  $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0}$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \left( \frac{1}{E_0} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{E_j} \right) \sigma_0$

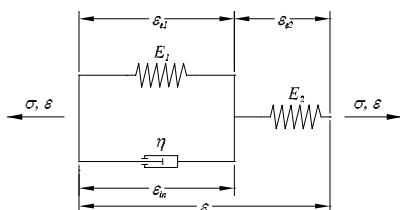


### 3.5.2.1.1 Ableitung der Dreiparametermodelle B und C

Aus der Retardationsfunktion  $J(t) = \frac{1}{E_0} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{E_j} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right)$  für die Kelvin-Voigt-Kette

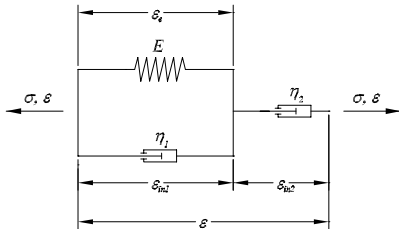
können die Retardationsfunktionen für die Dreiparametermodelle B und C sofort abgeleitet werden.

#### Modell B



Mit  $n=1$  folgt die Retardationsfunktion:  $J(t) = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1} \cdot \left(1 - e^{-\frac{E_1}{\eta} t}\right)$

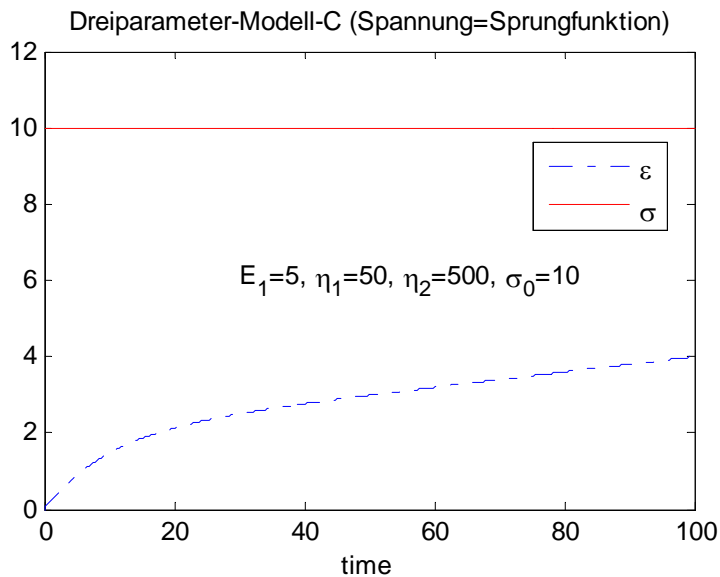
### Modell C



Mit  $n=2$ ,  $E_0 = \infty$  und  $E_2 = 0$  folgt für die Retardationsfunktion:

$$J(t) = \frac{1}{E_1} \cdot \left(1 - e^{-\frac{E_1}{\eta_1} t}\right) + \frac{t}{\eta_2}$$

Die Grenzwerte sind:  $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \infty$



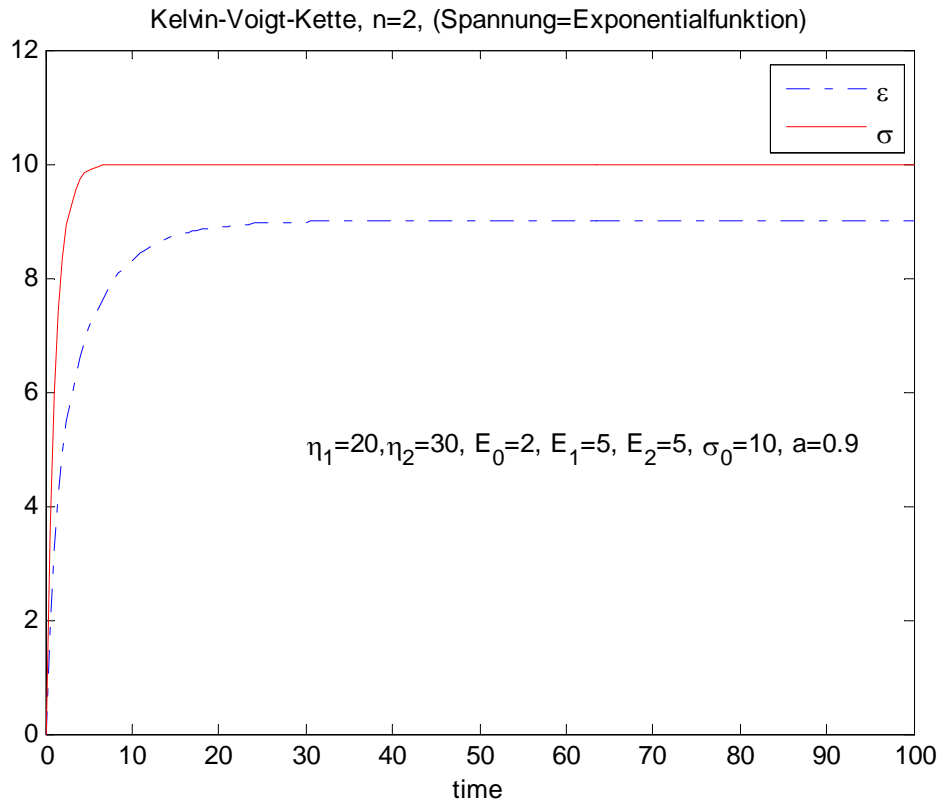
### 3.5.2.2 Exponentialfunktion:

Der als Beanspruchung vorgegebene Spannungsverlauf  $\sigma(t)$  wird durch nachfolgende Funktion beschrieben:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cdot (1 - e^{-a \cdot t}) \quad \text{für} \quad 0 \leq t \rightarrow \dot{\sigma}(t) = \sigma_0 \cdot a \cdot e^{-a \cdot t}$$

Der zugehörige Dehnungsverlauf  $\varepsilon(t)$  wird durch Integration gewonnen:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \cdot \left\{ \frac{1}{E_0} \cdot (1 - e^{-a \cdot t}) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{E_j} \cdot \left[ (1 - e^{-a \cdot t}) - \frac{a \cdot \tau_j}{1 - a \cdot \tau_j} \cdot \left( e^{-a \cdot t} - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \right] \right\}$$



Die Dehnung startet bei Null und geht asymptotisch einem horizontalen Endwert entgegen. Im Vergleich zur Sprungfunktion, bei welcher die Dehnung von einem Grenzwert größer Null startet, ergibt sich hier ein anderer Verlauf.

### 3.6 Kontinuierliche Spektren

Anstelle von diskreten Spektren, die für eine umfassende Approximation eine hohe Anzahl von Maxwell- bzw. Kelvin-Voigt-Elementen erfordern, können kontinuierliche Spektren verwendet werden. Ihr Vorteil besteht darin, dass nur wenige Parameter und eine Verteilungsfunktion eingeführt werden, um viskoelastische Materialeigenschaften zu beschreiben.

Die Anwendung von kontinuierlichen Spektren beschränkt sich hier auf die Sprungfunktion, da für die Exponentialfunktion keine anwendungsfreundliche Lösung gefunden werden konnte.



### 3.6.1 Dehnungsgesteuerter Prozess

#### 3.6.1.1 Sprungfunktion

Als Alternative zu einer durch ein diskretes Spektrum  $(E_j, \tau_j)$  beschriebenen Relaxationsfunktion  $G(t) = E_0 + \sum_{j=1}^n E_j \cdot e^{-\frac{t}{\tau_j}}$  kann mit der Verteilungsfunktion  $g(\tau)$  die Relaxationsfunktion durch ein kontinuierliches Spektrum gemäß  $G(t) = E_0 + \int_0^\infty g(\tau) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau$  dargestellt werden.

Nachfolgend werden die drei Verteilungsfunktionen  $g_1(\tau) = \frac{g_{01}}{\tau}$ ,  $g_2(\tau) = \frac{g_{02}}{\tau^2}$  und  $g_3(\tau) = \frac{g_{03}}{\tau^3}$  in ihrem gültigen Wertebereich  $\tau_{\min} \leq \tau \leq \tau_{\max}$  diskutiert. Außerhalb dieses Bereiches wird  $g_1(\tau) = g_2(\tau) = g_3(\tau) = 0$  gesetzt.

$$\underline{g_1(\tau) = \frac{g_{01}}{\tau} :}$$

Durch Einsetzen der Verteilungsfunktion wird aus  $G(t) = E_0 + g_{01} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau$  die zugehörige Relaxationsfunktion

$$G(t) = E_0 + g_{01} \int_{-t/\tau_{\min}}^{-t/\tau_{\max}} \frac{1}{s} \cdot e^s ds = E_0 + g_{01} \left( \int_{-\infty}^{-t/\tau_{\max}} \frac{1}{s} \cdot e^s ds - \int_{-\infty}^{-t/\tau_{\min}} \frac{1}{s} \cdot e^s ds \right) = E_0 - g_{01} \left( \text{Ei} \left( \frac{-t}{\tau_{\min}} \right) - \text{Ei} \left( \frac{-t}{\tau_{\max}} \right) \right)$$

mit der Substitution  $-\frac{t}{\tau} = s \rightarrow \frac{t}{\tau^2} d\tau = ds$  als Integraleponentialfunktion oder

als Reihenlösung  $G(t) = E_0 + g_0 \cdot \left[ \ln s + \frac{-ts}{1 \cdot 1!} + \frac{(-ts)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(-ts)^3}{3 \cdot 3!} + \dots \right]_{\frac{1}{\tau_{\max}}}^{\frac{1}{\tau_{\min}}}$  mit der

Substitution  $\frac{1}{\tau} = s \rightarrow -\frac{1}{\tau^2} d\tau = ds$  erhalten. Diese Lösungen werden aufgrund ihrer komplizierten Darstellungsformeln nicht weiter behandelt.

$$\underline{g_2(\tau) = \frac{g_{02}}{\tau^2} :}$$

Das Integral der Relaxationsfunktion  $G(t) = E_0 + g_{02} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \frac{1}{\tau^2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau$  wird durch die

Substitution  $\frac{1}{\tau} = s$  gelöst:  $G(t) = E_0 + \frac{g_{02}}{t} \left[ e^{-\frac{t}{\tau_{\max}}} - e^{-\frac{t}{\tau_{\min}}} \right]$  Der Parameter  $g_{02}$  wird aus dem

Grenzwert  $G(0)$  bestimmt. Die Zahlenwerte für  $\tau_{\min}$  und  $\tau_{\max}$  werden hier gemäß

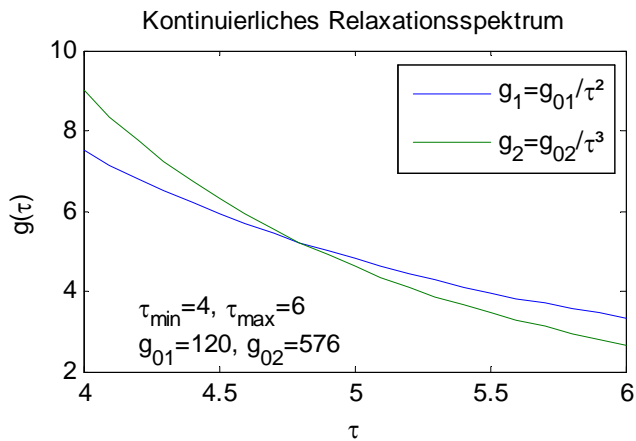
$\tau_{\min} = \frac{\eta_1}{E_1}$  und  $\tau_{\max} = \frac{\eta_2}{E_2}$  gewählt. Die kontinuierliche Relaxationsfunktion, abgeleitet von der diskreten Relaxationsfunktion lautet somit:

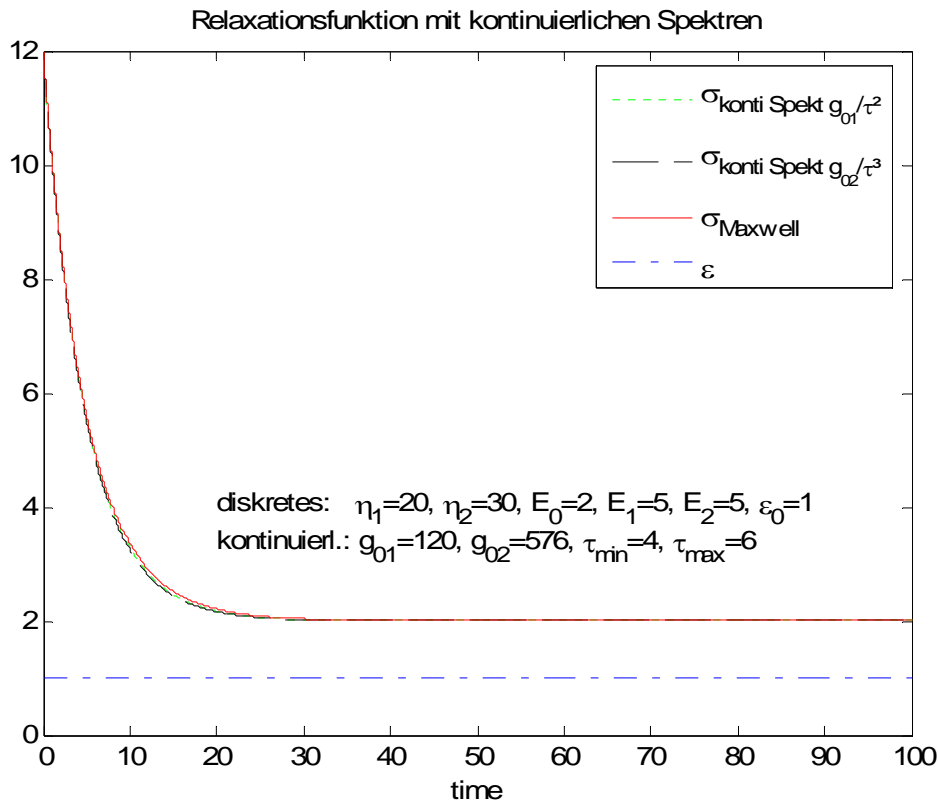
$$G(t) = E_0 + \frac{(G(0) - E_0) \cdot \tau_{\min} \cdot \tau_{\max}}{t \cdot (\tau_{\max} - \tau_{\min})} \left[ e^{-\frac{t}{\tau_{\max}}} - e^{-\frac{t}{\tau_{\min}}} \right]$$

$$g_3(\tau) = \frac{g_{03}}{\tau^3} :$$

Nach dem Einsetzen, der Substitution  $\frac{1}{\tau} = s$  und der Parameterbestimmung, in analoger Weise wie vorhin, wird die Relaxationsfunktion erhalten:

$$G(t) = E_0 + \frac{2 \cdot G(0) \cdot \tau_{\min}^2 \cdot \tau_{\max}^2}{t^2 \cdot (\tau_{\max}^2 - \tau_{\min}^2)} \left[ e^{-\frac{t}{\tau_{\max}}} \left( \frac{t}{\tau_{\max}} + 1 \right) - e^{-\frac{t}{\tau_{\min}}} \left( \frac{t}{\tau_{\min}} + 1 \right) \right]$$





Weitere Verteilungsfunktionen in Form einer Geraden, einer Parabel und einer Exponentialfunktion wurden untersucht. Sie führten jeweils auf eine Reihenlösung, deren Anwendung wegen der komplizierten Darstellung nicht in Betracht gezogen wurde.

### 3.6.2 Spannungsgesteuerter Prozess

#### 3.6.2.1 Sprungfunktion

Aus der durch ein diskretes Spektrum dargestellten Retardationsfunktion

$$J(t) = \frac{1}{E_0} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{E_j} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right)$$

wird mit der Verteilungsfunktion  $j(\tau)$  bzw. dem

kontinuierlichen Spektrum die Retardationsfunktion  $J(t) = \frac{1}{E_0} + \int_0^{\infty} j(\tau) \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) d\tau$

gefunden.

Mit der Erkenntnis aus dem vorhergehenden Kapitel werden nun die Verteilungsfunktionen

$$j_2(\tau) = \frac{j_{02}}{\tau^2} \text{ und } j_3(\tau) = \frac{j_{03}}{\tau^3} \text{ behandelt.}$$

$$j_2(\tau) = \frac{j_{02}}{\tau^2} :$$

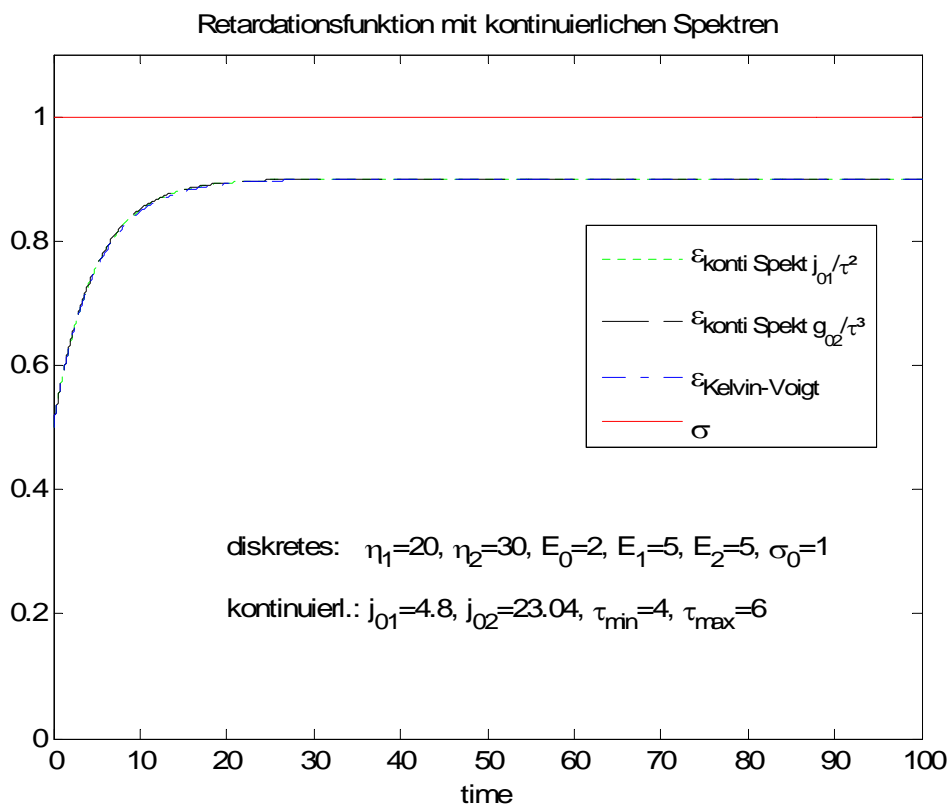
Nach dem Einsetzen, der Substitution  $\frac{1}{\tau} = s$  und der Parameterbestimmung für  $j_{02}$ ,  $\tau_{\min}$  und  $\tau_{\max}$  wird die Retardationsfunktion erhalten:

$$J(t) = \frac{1}{E_0} + \left( J(\infty) - \frac{1}{E_0} \right) \cdot \left[ 1 + \frac{\tau_{\min} \cdot \tau_{\max}}{t \cdot (\tau_{\max} - \tau_{\min})} \left( e^{-\frac{t}{\tau_{\min}}} - e^{-\frac{t}{\tau_{\max}}} \right) \right]$$

$$\underline{j_3(\tau) = \frac{j_{03}}{\tau^3} :}$$

Ebenso nach dem Einsetzen, der Substitution  $\frac{1}{\tau} = s$  und der Parameterbestimmung für  $j_{03}$ ,  $\tau_{\min}$  und  $\tau_{\max}$  wird die Retardationsfunktion erhalten:

$$J(t) = \frac{1}{E_0} + \left( J(\infty) - \frac{1}{E_0} \right) \cdot \left[ 1 + \frac{2 \cdot \tau_{\min}^2 \cdot \tau_{\max}^2}{t^2 \cdot (\tau_{\max}^2 - \tau_{\min}^2)} \left( e^{-\frac{t}{\tau_{\min}}} \cdot \left( \frac{t}{\tau_{\min}} + 1 \right) - e^{-\frac{t}{\tau_{\max}}} \cdot \left( \frac{t}{\tau_{\max}} + 1 \right) \right) \right]$$



Abschließend ist anzumerken, dass die Approximation von diskreten Spektren durch kontinuierliche Spektren ein relativ einfacher Prozess ist. Umgekehrt kann ebenfalls ein kontinuierliches Spektrum durch ein Diskretes approximiert werden.

Auch die Berechnung der Relaxationsfunktion  $G(t)$  und Retardationsfunktion  $J(t)$  ist bei bekannter Form der Verteilungsfunktionen  $g(\tau)$  und  $j(\tau)$  relativ einfach. Umgekehrt ist die Berechnung von  $g(\tau)$  und  $j(\tau)$  aus experimentell ermittelten Funktionen  $G(t)$  und  $J(t)$  wesentlich schwieriger [6].

## 4 Viskoelastisches Materialmodell mit fraktionalem Element

Die linearen Materialgleichungen für die Elastizität  $\sigma = E \cdot \varepsilon$  und Viskosität  $\sigma = \eta \cdot \dot{\varepsilon}$  können auch in Form einer Ableitung ausgedrückt werden [3]:

$$\sigma = E \cdot \tau^n \cdot \frac{d^n \varepsilon}{dt^n} \quad n = \begin{cases} 0 \triangleq \text{Elastizität} \\ 1 \triangleq \text{Viskosität} \end{cases}$$

Die Einschränkung der Ordnung der Ableitung auf natürliche Zahlen einschließlich 0 ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) soll fallen gelassen werden und auf reelle Zahlen  $0 < n < 1$  erweitert werden. Dadurch kann ein hybrides Materialmodell, welches sich zwischen einem reinen elastischen und viskosen Verhalten bewegt, beschrieben werden. Die zugehörigen Relaxations- und Retardationsfunktionen sind Potenzfunktionen, welche die Eigenschaften von vielen Werkstoffen mit wenigen Parametern über einen großen Zeitbereich beschreiben können.

### 4.1 Fraktionale Integration und Differentiation

Das fraktionale Integral [3] der Ordnung  $\beta$ ,  $F_\beta(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \cdot f(s) ds$ , mit der

Euler'schen Gammafunktion  $\Gamma(\beta)$ , lässt sich aus der wiederholten Integration der Funktion  $f(t) = \begin{cases} \varphi(t) \text{ für } 0 < t < \infty \\ 0 \text{ für } t \leq 0 \end{cases}$  herleiten. Dabei stellt die Stammfunktion  $F_n(t)$  das n-

fache Integral von  $f(t)$  dar. Die Verallgemeinerung  $F_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} \cdot f(s) ds$

lässt sich aus  $F_1(t) = \int_0^t f(s) ds$  und  $F_{n+1}(t) = \int_0^t F_n(s) ds$ , unter Berücksichtigung der Produktregel und der Integration nach variablen Integrationsgrenzen [4], entwickeln. Die

zweite und dritte Stammfunktion,  $F_2(t) = \int_0^t (t-s) \cdot f(s) ds$  und

$F_3(t) = \frac{1}{2!} \int_0^t (t-s)^2 \cdot f(s) ds$ , lassen diese Verallgemeinerung einfach nachvollziehen.

Durch die Euler'sche Gammafunktion  $\Gamma(n) = (n-1)!$  und die Einschränkung  $n = \beta$ ,  $\beta > 0$  und  $\beta \in \mathbb{R}$  wird das fraktionale Integral der Ordnung  $\beta$  zu

$F_\beta(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \cdot f(s) ds$  erhalten. Durch die Substitution  $(t-s) = u$  und der

anschließenden Rückbenennung der Integrationsvariable  $u \rightarrow s$  kann für das fraktionale

Integral der Ordnung  $\beta$  auch  $F_\beta(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (s)^{\beta-1} \cdot f(t-s) ds$  geschrieben werden.

Die Funktion  $F_\beta(t)$  wurde somit durch die Integration  $F_\beta(t) = \int_0^t F_{\beta-1}(t) ds$  erhalten.

Umgekehrt kann auch eine Funktion  $F_{-\alpha}(t)$  durch gewöhnliche Differentiation,

$$F_{-\alpha}(t) = \frac{d[F_{-\alpha+1}(t)]}{dt}, \quad \text{bzw.} \quad \text{fraktionelle Differentiation,}$$

$$F_{-\alpha}(t) = \frac{d^m[F_{-\alpha+m}(t)]}{dt^m} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m)} \cdot \frac{d^m}{dt^m} \cdot \int_0^t (s)^{-\alpha+m-1} \cdot f(t-s) ds, \text{ gebildet werden. Es ist}$$

dabei zu beachten, dass nun  $-\alpha$  die Ordnung der Ableitung ausdrückt. Für die lineare Viskoelastizität ist  $0 < \alpha < 1$  (analog  $0 < n < 1$ ) gefordert und mit  $-\alpha + m > 0$  (damit das Integral  $\int_0^t (s)^{-\alpha+m-1} ds$  existiert muss  $-\alpha + m - 1 > -1$  sein; das Integral ist somit schwach singular) ist  $m = 1$  zu setzen. Die fraktionelle Differentiation kann nun formuliert werden:

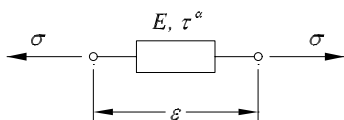
$$F_{-\alpha}(t) = \frac{d^\alpha[F_{-\alpha+1}(t)]}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \frac{d^1}{dt^1} \cdot \int_0^t (s)^{-\alpha} \cdot f(t-s) ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \frac{d^1}{dt^1} \cdot \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \cdot f(s) ds$$

oder nach t differenziert:

$$F_{-\alpha}(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \int_0^t (s)^{-\alpha} \cdot \dot{f}(t-s) ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \cdot \dot{f}(s) ds$$

## 4.2 Fraktionales Dämpfungselement

Das fraktionelle Dämpfungselement wird nachfolgend symbolisch dargestellt und diskutiert. Seine konstitutive Beziehung ist abhängig von den Parametern  $E$  und  $\alpha$  ( $\tau = 1s$  stellt eine Normierungsgröße dar). Für  $\alpha = 0$  ergibt sich das linear elastische Verhalten einer Feder, für  $\alpha = 1$  das viskose Verhalten des Dämpfers und für  $0 < \alpha < 1$  ein viskoelastisches Materialverhalten.



### 4.2.1 Dehnungsgesteuerter Prozess

Das Materialgesetz  $\sigma = E \cdot \tau^n \cdot \frac{d^n \epsilon}{dt^n}$   $n = \begin{cases} 0 \hat{=} \text{Elastizität} \\ 1 \hat{=} \text{Viskosität} \end{cases}$  wird nun durch eine

Differentialgleichung beschrieben. Daraus lässt sich das Materialgesetz für das fraktionale Dämpfungselement ableiten:

$$\sigma(t) = E \cdot \tau^\alpha \cdot \frac{d^\alpha[\epsilon(t)]}{dt^\alpha} = \frac{E \cdot \tau^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \cdot \dot{\epsilon}(s) ds = \int_0^t G(t-s) \cdot \dot{\epsilon}(s) ds$$

Als Belastungsfunktion wird nur die Sprungfunktion betrachtet, da die Exponentialfunktion keine praktisch anwendbare analytische Lösung zulässt. Beispielhaft für die Lösung weiterer Materialmodelle mit fraktionalem Dämpfungselement wird nachfolgend der Lösungsweg mit der Sprungfunktion als Belastung beschrieben.

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0}{T_1} \cdot t & \text{für } 0 \leq t \leq T_1 \rightarrow \dot{\varepsilon}(t) = \frac{\varepsilon_0}{T_1} \\ \varepsilon_0 & \text{für } T_1 < t \rightarrow \dot{\varepsilon}(t) = 0 \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq T_1 : \quad \sigma(t) = \frac{E \cdot \tau^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \cdot \frac{\varepsilon_0}{T_1} ds \quad \text{mit } 0 < \alpha < 1$$

$$\text{Substitution: } u = (t-s) \rightarrow \sigma(t) = \frac{E \cdot \tau^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \frac{\varepsilon_0}{T_1} \cdot \int_0^t u^{-\alpha} du$$

$$\sigma(t) = \frac{E \cdot \tau^\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} \cdot \frac{\varepsilon_0}{T_1} \cdot t^{1-\alpha} \quad \text{mit } T_1 \rightarrow 0 \text{ bzw. } t \rightarrow 0 \text{ für } 0 \leq t \leq T_1 \text{ folgt:}$$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ T_1 \rightarrow 0}} \sigma(t) \begin{cases} \alpha = 0 \rightarrow \sigma(0) = \frac{E \cdot \varepsilon_0}{\Gamma(2)} \\ \alpha = 1 \rightarrow \sigma(0) = \infty \end{cases}$$

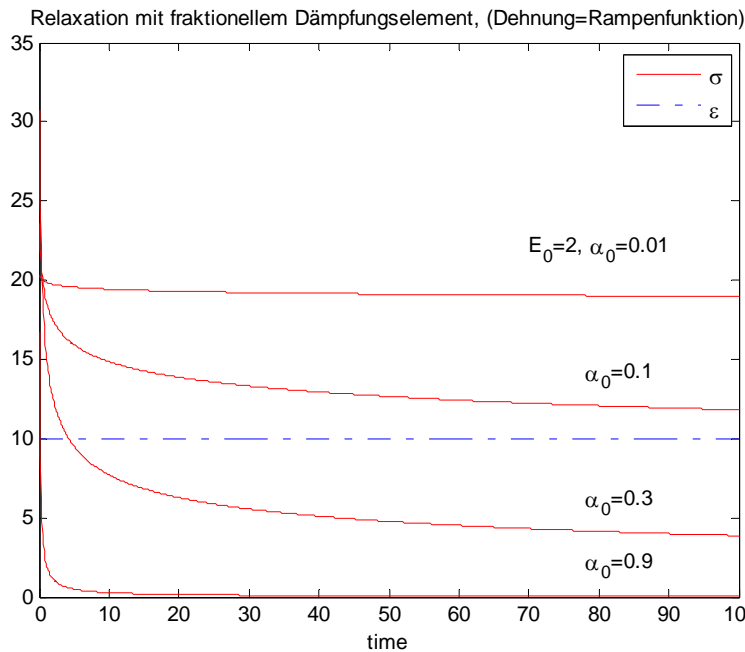
$$T_1 < t : \quad \sigma(t) = \frac{E \cdot \tau^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \int_0^{T_1} (t-s)^{-\alpha} \cdot \frac{\varepsilon_0}{T_1} ds + \frac{E \cdot \tau^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \int_{T_1}^t (t-s)^{-\alpha} \cdot 0 ds$$

$$\text{Substitution: } u = (t-s) \rightarrow \sigma(t) = \frac{E \cdot \tau^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \frac{\varepsilon_0}{T_1} \cdot \int_{t-T_1}^t u^{-\alpha} du$$

$$\sigma(t) = \frac{E \cdot \tau^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \frac{\varepsilon_0}{T_1} \cdot \frac{t^{1-\alpha} - (t-T_1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad \text{mit } T_1 \rightarrow 0 \text{ folgt:}$$

$$\sigma(t) = \frac{E \cdot \varepsilon_0}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \left(\frac{\tau}{t}\right)^\alpha = \varepsilon_0 \cdot G(t)$$

Somit wird für die Belastung durch eine Sprungfunktion die Relaxationsfunktion  $G(t) = \frac{E}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \left(\frac{\tau}{t}\right)^\alpha$  erhalten. Sie ist eine monoton fallende Potenzfunktion, die für  $t \rightarrow 0$  gegen  $\infty$  und  $t \rightarrow \infty$  gegen 0 geht.



Die Grenzwerte sind:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sigma(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = 0$$

Die unendliche Spannung fällt anfangs sprunghaft ab und relaxiert, stark von  $\alpha_0$  abhängig rasch bzw. sehr langsam gegen Null.

Das Verhalten des fraktionellen Elementes entspricht einem fluidartigen Element.

#### 4.2.2 Spannungsgesteuerter Prozess

Das, durch die fraktionelle Ableitung beschriebene, Materialgesetz  $\sigma(t) = E \cdot \tau^n \cdot \frac{d^n [\varepsilon(t)]}{dt^n}$

lässt sich alternativ auch durch ein fraktionelles Integral  $\int^n \sigma(t) = E \cdot \tau^n \int^n \frac{d^n [\varepsilon(t)]}{dt^n}$  bzw.

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E \cdot \tau^n} \cdot \int^n \sigma(t) \quad n = \begin{cases} 0 \hat{=} \text{Elastizität} \rightarrow \varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} \\ 1 \hat{=} \text{Viskosität} \rightarrow \dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma(t)}{\eta} \end{cases} \text{ ausdrücken. Wie vorhin bereits}$$

gezeigt, wird das fraktionelle Integral der Ordnung  $\beta$  einer Funktion  $f(t)$  durch

$$F_\beta(t) = \frac{d^m [F_{\beta+m}(t)]}{dt^m} = \frac{1}{\Gamma(\beta+m)} \cdot \frac{d^m}{dt^m} \cdot \int_0^t (s)^{\beta+m-1} \cdot f(t-s) ds \quad \text{beschrieben. Für das}$$

lineare Materialgesetz muss  $-1 < \beta < 0$  und  $m = 1$  gelten. Damit lässt sich die Dehnung  $\varepsilon(t)$  des fraktionellen Dämpfungselementes in Form von

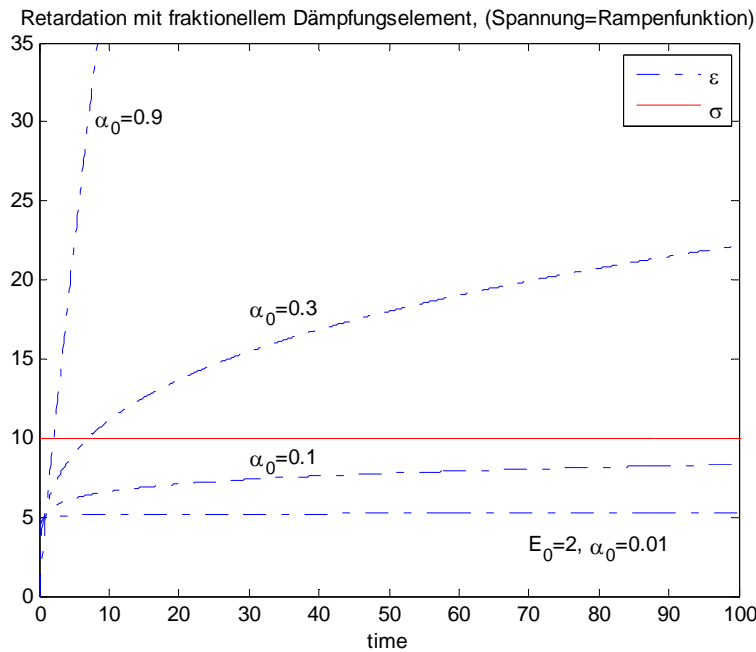
$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E \cdot \tau^\beta} \cdot \frac{1}{\Gamma(1+\beta)} \cdot \int_0^t (t-s)^\beta \cdot \dot{\sigma}(s) ds = \int_0^t J(t-s) \cdot \dot{\sigma}(s) ds \quad \text{schreiben.}$$

Mit der Sprungfunktion als Belastungsfunktion für die Spannung wird für die Dehnung

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E \cdot \Gamma(1+\alpha)} \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha \cdot \sigma_0 \quad \text{und die Nachgiebigkeitsfunktion } J(t) = \frac{1}{E \cdot \Gamma(1+\alpha)} \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha$$

erhalten. Die Dehnungsfunktion  $\varepsilon(t)$  und die Nachgiebigkeit  $J(t)$  stellen eine monoton steigende Potenzfunktion dar.





Die Grenzwerte sind:  
 $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \infty$

Die Dehnung beginnt bei Null und nimmt mit steigendem Wert des fraktionellen Ableitungsparameters  $\alpha_0$  zu. Die Dehnung wächst über alle Grenzen, da die Potenzfunktion für  $t \rightarrow \infty$  den Grenzwert  $\infty$  besitzt. An dieser Stelle ist das fluide Verhalten des fraktionellen Elementes erkennbar.

#### 4.2.2.1 Rückbildung nach Entlastung

Die, bei Betrachtung einer Gesamtbelastung (Be- und Entlastung), aufkommende Frage, wie sich das fraktionale Element nach der Entlastung verhält wird nachfolgend beantwortet.

Die besondere Eigenschaft des fraktionellen Elementes ist, dass es bei Belastung ein fluidartiges und bei Entlastung ein solidartiges Verhalten besitzt. Das bedeutet, dass die Dehnung bei Entlastung zur Gänze reversibel ist. Dieses Verhalten wird nachfolgend auch analytisch gezeigt.

Für die gegebenen Gesamtbelastung in Trapezform

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{T_1} \cdot t & \text{für } 0 \leq t \leq T_1 \rightarrow \dot{\sigma}(t) = \frac{\sigma_0}{T_1} \\ \sigma_0 & \text{für } T_1 < t < T_2 \rightarrow \dot{\sigma}(t) = 0 \\ \frac{\sigma_0}{T_1} \cdot T_3 - \frac{\sigma_0}{T_1} \cdot t & \text{für } T_2 \leq t \leq T_3 \rightarrow \dot{\sigma}(t) = -\frac{\sigma_0}{T_1} \\ 0 & \text{für } T_3 < t \end{cases}$$

wird das zeitliche Verhalten des fraktionellen Elementes für die Zeit  $T_3 < t$  betrachtet.

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E \cdot \tau^\alpha} \cdot \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \cdot \int_0^t (t - s)^\alpha \cdot \dot{\sigma}(s) ds \rightarrow \varepsilon(t) \cdot E \cdot \tau^\alpha \cdot \Gamma(1 + \alpha) = \int_0^t (t - s)^\alpha \cdot \dot{\sigma}(s) ds$$

$$\varepsilon(t) \cdot E \cdot \tau^\alpha \cdot \Gamma(1 + \alpha) = \int_0^{T_1} (t-s)^\alpha \cdot \frac{\sigma_0}{T_1} ds + \int_{T_1}^{T_2} (t-s)^\alpha \cdot 0 ds + \int_{T_2}^{T_3} (t-s)^\alpha \cdot \left(-\frac{\sigma_0}{T_1}\right) ds + \int_{T_3}^t (t-s)^\alpha \cdot 0 ds$$

$$\varepsilon(t) \cdot E \cdot \tau^\alpha \cdot \Gamma(1 + \alpha) = \int_0^{T_1} (t-s)^\alpha \cdot \frac{\sigma_0}{T_1} ds + \int_{T_2}^{T_3} (t-s)^\alpha \cdot \left(-\frac{\sigma_0}{T_1}\right) ds$$

Mit der Substitution  $s = T_1 x \rightarrow ds = T_1 dx$  folgt:

$$\varepsilon(t) \cdot E \cdot \tau^\alpha \cdot \Gamma(1 + \alpha) = \int_0^1 (t - T_1 x)^\alpha \cdot \sigma_0 dx - \int_{T_2/T_1}^{T_3/T_1} (t - T_1 x)^\alpha \cdot \sigma_0 dx$$

Für den Grenzübergang  $T_1 \rightarrow 0$  wird für den ersten Term  $\lim_{T_1 \rightarrow 0} \int_0^1 (t - T_1 x)^\alpha \cdot \sigma_0 dx = t^\alpha \sigma_0$

erhalten. Der zweite Term ist wegen seiner Integrationsgrenzen einer Grenzwertbildung zu unterziehen. Dazu wird eine weitere Substitution  $t - T_1 x = u \rightarrow -T_1 dx = du$  durchgeführt:

$$\int_{T_2/T_1}^{T_3/T_1} (t - T_1 x)^\alpha \cdot \sigma_0 dx = \int_{t-T_3}^{t-T_2} u^\alpha du = \frac{-1}{T_1(\alpha+1)} \left[ (t-T_3)^{\alpha+1} - (t-T_2)^{\alpha+1} \right]$$

Die Grenzwertbildung  $T_3 \rightarrow T_2$  und  $T_1 \rightarrow 0$  liefert den unbestimmten Ausdruck  $\frac{0}{0}$ . Mit

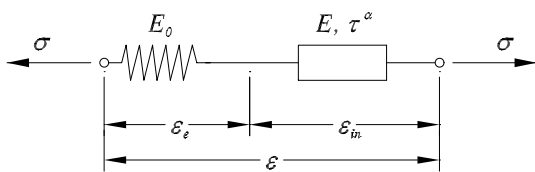
Hilfe der Regel von de l'Hospital wird der Grenzwert  $(t - T_2)^\alpha$  für den zweiten Term gefunden. Die gesamte Dehnung wird somit durch  $\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E \cdot \tau^\alpha \cdot \Gamma(1 + \alpha)} \cdot \left[ t^\alpha - (t - T_2)^\alpha \right]$

beschrieben. Für  $t \rightarrow \infty$  ist ihr Grenzwert, unter Anwendung der Regel von de l'Hospital, gleich Null. Damit ist das solidartigen Verhalten des fraktionellen Elementes nachgewiesen.

### 4.3 Materialmodell mit fraktionellem Dämpfer

Durch die Kombination des fraktionellen Dämpfers mit Federn und Dämpfern können erweiterte Materialmodelle mit höherer Parameteranzahl gebildet werden.

#### 4.3.1 Fraktionelles Element in Reihe mit Feder



Für  $\alpha = 1$  entspricht das Modell dem Maxwell-Element. Aus  $\sigma = \sigma_e = \sigma_{in}$  und

$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{in}$ , mit  $\varepsilon_{in}(t) = \frac{1}{E \cdot \tau^\alpha} \cdot \int \sigma(t)$  und  $\varepsilon_e(t) = \frac{\sigma(t)}{E_0}$ , wird folgende Materialgleichung

gewonnen:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_0} + \frac{1}{E \cdot \tau^\alpha} \cdot \int \sigma(t) = \frac{\sigma(t)}{E_0} + \frac{1}{E \cdot \tau^\alpha} \cdot \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \cdot \int_0^t (t-s)^\alpha \cdot \dot{\sigma}(s) ds$$

#### 4.3.1.1 Dehnungsgesteuerter Prozess

Die Dehnung wird in Form einer Sprungfunktion aufgebracht.

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0}{T_1} \cdot t & \text{für } 0 \leq t \leq T_1 \rightarrow \dot{\varepsilon}(t) = \frac{\varepsilon_0}{T_1} \\ \varepsilon_0 & \text{für } T_1 < t \rightarrow \dot{\varepsilon}(t) = 0 \end{cases}$$

Die zugehörige Spannungsantwort wird nachfolgend behandelt.

Der zweite Term  $\frac{1}{E \cdot \tau^\alpha} \cdot \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \cdot \int_0^t (t-s)^\alpha \cdot \dot{\sigma}(s) ds$  aus der Materialgleichung wird partiell integriert,

$$\frac{1}{E \cdot \tau^\alpha} \cdot \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \cdot \int_0^t (t-s)^\alpha \cdot \dot{\sigma}(s) ds = \frac{1}{E \cdot \tau^\alpha} \cdot \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \cdot \left[ (t-s)^\alpha \cdot \sigma(s) \Big|_0^t + \int_0^t \alpha \cdot (t-s)^{\alpha-1} \cdot \sigma(s) ds \right]$$

und nach dem Einsetzen der Integrationsgrenzen erhält man den Term zu

$$\frac{1}{E \cdot \tau^\alpha} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \cdot \sigma(s) ds.$$

Aus der umgeformten Materialgleichung

$$\sigma(t) + \frac{E_0}{E \cdot \tau^\alpha} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \cdot \sigma(s) ds = E_0 \cdot \varepsilon(t)$$
 lässt sich  $\sigma(t)$  nicht explizit

ausdrücken. Diese implizite Materialgleichung stellt eine Volterra-Integralgleichung mit schwach singulärer Kernfunktion dar. Die zugehörige Lösung lautet [3]:

$$\sigma(t) = E_0 \cdot \int_0^t \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} \cdot \left[ -\left( \frac{t-s}{\tau} \right)^\alpha \right]^k \right\} \cdot \dot{\varepsilon}(s) ds \quad \text{mit} \quad \frac{1}{\tau^\alpha} = \frac{E_0}{E \cdot \tau^\alpha}$$

Sie kann mit Hilfe der Mittag-Leffler-Funktion  $E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$  in die Form

$$\sigma(t) = E_0 \cdot \int_0^t E_\alpha \left( -\left( \frac{t-s}{\tau} \right)^\alpha \cdot \frac{E_0}{E} \right) \cdot \dot{\varepsilon}(s) ds$$
 gebracht werden.

Für die oben angenommene Sprungfunktion wird die Spannungsantwort

$$\sigma(t) = E_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} \cdot \left[ -\left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right]^k \right\} = E_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot E_\alpha \left( -\left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right) \quad \text{und} \quad \text{die}$$

$$\text{Relaxationsfunktion } G(t) = E_0 \cdot \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} \cdot \left[ -\left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right]^k \right\} = E_0 \cdot E_\alpha \left( -\left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right) \text{ erhalten.}$$

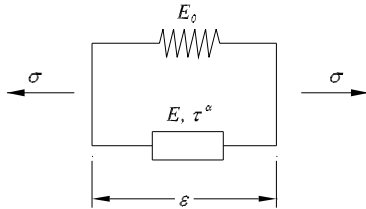
#### 4.3.1.2 Spannungsgesteuerter Prozess

Direkt aus der Materialgleichung kann die Dehnungsantwort auf die Spannungsbelastung gewonnen werden. Für die Sprungfunktion lautet die Dehnung:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} + \frac{\sigma_0}{E \cdot \Gamma(1 + \alpha)} \cdot \left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha = \left[ \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E \cdot \Gamma(1 + \alpha)} \cdot \left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right] \cdot \sigma_0 = J(t) \cdot \sigma_0$$

Die Dehnungsfunktion  $\varepsilon(t)$  bzw. die Nachgiebigkeit  $J(t)$  stellen eine monoton steigende Potenzfunktion dar.

### 4.3.2 Fraktionelles Element mit paralleler Feder



Dieses Modell ähnelt, bzw. entspricht für  $\alpha = 1$ , dem Kelvin-Voigt-Modell. Die zugehörige Materialgleichung wird aus dem Kräftegleichgewicht  $\sigma = \sigma_e + \sigma_{ov}$  mit  $\sigma_e = E_0 \cdot \varepsilon$  und  $\sigma_{ov}(t) = E \cdot \tau^\alpha \cdot \frac{d^\alpha [\varepsilon(t)]}{dt^\alpha}$  gewonnen:  $\sigma(t) = E_0 \cdot \varepsilon(t) + \frac{E \cdot \tau^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \cdot \dot{\varepsilon}(s) ds$

#### 4.3.2.1 Dehnungsgesteuerter Prozess

Für die Belastung mit einer Sprungfunktion in der Dehnung wird die im folgenden beschriebene Spannungsantwort erhalten:

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0}{T_1} \cdot t & \text{für } 0 \leq t \leq T_1 \rightarrow \dot{\varepsilon}(t) = \frac{\varepsilon_0}{T_1} \\ \varepsilon_0 & \text{für } T_1 < t \rightarrow \dot{\varepsilon}(t) = 0 \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq T_1 : \quad \sigma(t) = E_0 \cdot \frac{\varepsilon_0}{T_1} \cdot t + \frac{E \cdot \tau^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \cdot \frac{\varepsilon_0}{T_1} ds \quad \text{mit } 0 < \alpha < 1$$

$$\text{Substitution: } u = (t-s) \rightarrow \sigma(t) = E_0 \cdot \frac{\varepsilon_0}{T_1} \cdot t + \frac{E \cdot \tau^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \frac{\varepsilon_0}{T_1} \cdot \int_0^t u^{-\alpha} du$$

$$\sigma(t) = E_0 \cdot \frac{\varepsilon_0}{T_1} \cdot t + \frac{E \cdot \tau^\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} \cdot \frac{\varepsilon_0}{T_1} \cdot t^{1-\alpha}$$

Für die Grenzfälle  $t = T_1$ ,  $T_1 \rightarrow 0$  und  $\alpha = 0$  bzw.  $\alpha = 1$  folgt:

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ T_1 \rightarrow 0}} \sigma(t) \begin{cases} \alpha = 0 \rightarrow \sigma(0) = E_0 \cdot \varepsilon_0 + \frac{E \cdot \varepsilon_0}{\Gamma(2)} \\ \alpha = 1 \rightarrow \sigma(0) = \infty \end{cases}$$

$T_1 < t$ :

$$\sigma(t) = E_0 \cdot \varepsilon_0 + \frac{E \cdot \tau^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \int_0^{T_1} (t-s)^{-\alpha} \cdot \frac{\varepsilon_0}{T_1} ds + \frac{E \cdot \tau^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \int_{T_1}^t (t-s)^{-\alpha} \cdot 0 ds$$

$$\text{Substitution: } u = (t - s) \rightarrow \sigma(t) = E_0 \cdot \varepsilon_0 + \frac{E \cdot \tau^\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)} \cdot \frac{\varepsilon_0}{T_1} \cdot \int_{t-T_1}^t u^{-\alpha} du$$

$$\sigma(t) = E_0 \cdot \varepsilon_0 + \frac{E \cdot \tau^\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)} \cdot \frac{\varepsilon_0}{T_1} \cdot \frac{t^{1-\alpha} - (t - T_1)^{1-\alpha}}{1 - \alpha} \text{ mit } T_1 \rightarrow 0 \text{ folgt:}$$

$$\sigma(t) = E_0 \cdot \varepsilon_0 + \frac{E \cdot \varepsilon_0}{\Gamma(1 - \alpha)} \cdot \left(\frac{\tau}{t}\right)^\alpha = \varepsilon_0 \cdot \left[ E_0 + \frac{E}{\Gamma(1 - \alpha)} \cdot \left(\frac{\tau}{t}\right)^\alpha \right] = \varepsilon_0 \cdot G(t)$$

Somit wird für die Belastung durch eine Sprungfunktion die Relaxationsfunktion

$$G(t) = E_0 + \frac{E}{\Gamma(1 - \alpha)} \cdot \left(\frac{\tau}{t}\right)^\alpha \text{ erhalten. Sie ist eine monoton fallende Potenzfunktion.}$$

#### 4.3.2.2 Spannungsgesteuerter Prozess

Für den spannungsgesteuerten Prozess ist der zweite Term der Materialgleichung

$$\sigma_{ov}(t) = E \cdot \tau^\alpha \cdot \frac{d^\alpha [\varepsilon(t)]}{dt^\alpha} \text{ durch fraktionelle Integration umzuformen:}$$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E \cdot \tau^\alpha} \cdot \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \cdot \int_0^t (t - s)^\alpha \cdot \dot{\sigma}_{ov}(s) ds. \quad \text{Durch das Einsetzen von}$$

$$\dot{\sigma}_{ov}(t) = \dot{\sigma}(t) - E_0 \cdot \dot{\varepsilon}(t) \text{ erhält man:}$$

$$\varepsilon(t) + \frac{1}{E \cdot \tau^\alpha} \cdot \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \cdot \int_0^t (t - s)^\alpha \cdot E_0 \cdot \dot{\varepsilon}(s) ds = \frac{1}{E \cdot \tau^\alpha} \cdot \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \cdot \int_0^t (t - s)^\alpha \cdot \dot{\sigma}(s) ds$$

Die partielle Integration

$$\int_0^t (t - s)^\alpha \cdot E_0 \cdot \dot{\varepsilon}(s) ds = (t - s)^\alpha \cdot E_0 \cdot \varepsilon(s) \Big|_0^t - \int_0^t (-\alpha) \cdot (t - s)^{\alpha-1} \cdot E_0 \cdot \varepsilon(s) ds \text{ liefert:}$$

$$\varepsilon(t) + \frac{E_0}{E \cdot \tau^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} \cdot \varepsilon(s) ds = \frac{1}{E \cdot \tau^\alpha \cdot \Gamma(1 + \alpha)} \cdot \int_0^t (t - s)^\alpha \cdot \dot{\sigma}(s) ds = \hat{E} \cdot \Omega(t)$$

Diese Materialgleichung stellt wieder eine Volterra-Integralgleichung mit schwach singulärer Kernfunktion dar. Ihre Lösung lautet:

$$\varepsilon(t) = \hat{E} \cdot \int_0^t \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} \cdot \left[ -\frac{(t - s)}{\tau} \right]^{\alpha k} \right\} \cdot \int_0^t \alpha \cdot (t - s)^{\alpha-1} \cdot \dot{\sigma}(s) ds \text{ mit } \frac{1}{\tau^\alpha} = \frac{E_0}{E \cdot \tau^\alpha}$$

Mit Hilfe der Mittag-Leffler-Funktion  $E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$  wird sie in die explizite Form

$$\varepsilon(t) = \hat{E} \cdot \int_0^t E_\alpha \left( -\left(\frac{t - s}{\tau}\right)^\alpha \cdot \frac{E_0}{E} \right) \cdot \int_0^t \frac{\alpha}{(t - s)^{1-\alpha}} \dot{\sigma}(s) ds \text{ gebracht. Wegen des Integrals}$$

$\int_0^t \frac{\alpha}{(t-s)^{1-\alpha}} \dot{\sigma}(s) ds$  ist die Lösung nicht vorteilhaft anwendbar und es wird daher an dieser Stelle auf das nächste Kapitel verwiesen.

## 4.4 Linearen Viskoelastizität - Volterra Integralgleichung

Wie im vorhergehenden Abschnitt (4.3.2) gezeigt wurde, ist eine explizite Lösung für die Dehnungsantwort des fraktionalen Kelvin-Voigt-Modells nicht direkt bestimmbar. Daher wird in diesem Kapitel für den Zeitbereich ein Lösungsansatz für Integralgleichungen mit Hilfe von Operatoren [5] beschrieben. Damit können die Lösungen zu fraktionalen Maxwell- bzw. Kelvin-Voigt-Ketten, und davon abgeleitet zu den Dreiparametermodellen A und B, einfach hergeleitet werden.

### 4.4.1 Volterra Integralgleichung

Die allgemeine Form der Volterra Integralgleichung der zweiten Art [4] lautet:

$$u(t) = v(t) + \lambda \int_0^t K_1(t-s)u(s)ds \quad (3.1)$$

Mit der Neumannschen Näherung kann die Integralgleichung schrittweise gelöst werden:

Schritt:  $u_0(t) = v(t)$

Schritt:  $u_1(t) = v(t) + \lambda \int_0^t K_1(t-s)u_0(s)ds = v(t) + \lambda \int_0^t K_1(t-s)v(s)ds$

Schritt:  $u_2(t) = v(t) + \lambda \int_0^t K_1(t-s)u_1(s)ds$

$$u_2(t) = v(t) + \lambda \int_0^t K_1(t-s)v(s)ds + \lambda^2 \int_0^t K_1(t-s) \int_0^s K_1(s-\tau)v(\tau)d\tau ds$$

$$u_2(t) = v(t) + \lambda \int_0^t K_1(t-s)v(s)ds + \lambda^2 \int_0^t \left( \int_s^t K_1(\tau-s)K_1(t-\tau)d\tau \right) \cdot v(s)ds$$

$$u_2(t) = v(t) + \lambda \int_0^t K_1(t-s)v(s)ds + \lambda^2 \int_0^t K_2(t-s) \cdot v(s)ds$$

mit  $K_2(t-s) = \int_s^t K_1(\tau-s)K_1(t-\tau)d\tau$

Schritt:  $u_3(t) = v(t) + \lambda \int_0^t K_1(t-s)u_2(s)ds$

$$u_3(t) = v(t) + \lambda \int_0^t K_1(t-s)v(s)ds + \lambda^2 \int_0^t K_2(t-s)v(s)ds$$

$$+ \lambda^3 \int_0^t K_1(t-s) \int_0^s K_2(s-\tau)v(\tau)d\tau ds$$

$$u_3(t) = v(t) + \lambda \int_0^t K_1(t-s)v(s)ds + \lambda^2 \int_0^t K_2(t-s)v(s)ds + \lambda^3 \int_0^t K_3(t-s)v(s)ds$$

$$\text{mit } K_3(t-s) = \int_s^t K_2(\tau-s)K_1(t-\tau)d\tau$$

Für die Lösung kann nun angegeben werden:

$$u(t) = v(t) + \lambda \int_0^t K_1(t-s)v(s)ds + \lambda^2 \int_0^t K_2(t-s)v(s)ds + \lambda^3 \int_0^t K_3(t-s)v(s)ds + \dots$$

$$u(t) = v(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_0^t K_n(t-s)v(s)ds = v(t) + \int_0^t R(t-s)v(s)ds = (1 + R^*) \cdot v(t) \quad (3.2)$$

$$\text{mit der Resolvente } R(t-s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K_n(t-s) \quad (3.3) \text{ bzw.}$$

$$\text{dem Volterra Operator } R^* : R^* \cdot v(t) = \int_0^t R(t-s)v(s)ds \quad (3.4)$$

Für die Gleichung (3.1) gilt:

$$v(t) = u(t) - \lambda \int_0^t K_1(t-s)u(s)ds = (1 - \lambda K^*) \cdot u(t) \text{ bzw. } u(t) = (1 - \lambda K^*)^{-1} \cdot v(t) \quad (3.5)$$

$$\text{mit dem Volterra Operator } K^* : K^* \cdot u(t) = \int_0^t K_1(t-s)u(s)ds.$$

Für die Resolvente  $R(t-s)$  gilt ebenso:

$$R(t-s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K_n(t-s) = \lambda K_1(1 + K_1 + K_2 + \dots)$$

$$R(t-s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K_n(t-s) = \lambda K_1 \left( 1 + K_1 + \int_s^t K_1(\tau-s)K_1(t-\tau)d\tau + \int_s^t K_2(\tau-s)K_1(t-\tau)d\tau \dots \right)$$

$$R(t-s) = \lambda K_1 [1 + R(t-s)] \text{ bzw. } R^* = \lambda K^* (1 + R^*)$$

Durch Gleichsetzen von (3.2) und (3.5) wird eine weitere Beziehung zwischen den Volterra Operatoren  $K^*$  und  $R^*$  geschaffen.

$$(1 - \lambda K^*)^{-1} = (1 + R^*) \quad (3.6)$$

Mit ihr kann für  $R^*$  auch geschrieben werden:

$$R^* = \lambda K^* (1 + R^*) = \lambda K^* (1 - \lambda K^*)^{-1} \quad (3.7)$$

Der Kern des Volterra Operators  $K^*$  lautet in unserem Fall:  $K_1(t-s) = \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$  und

die daraus zu bildenden Produkte:

$$K_2(t-s) = \int_s^t K_1(\tau-s)K_1(t-\tau)d\tau = \frac{1}{(\Gamma(\alpha))^2} \int_s^t (\tau-s)^{\alpha-1} (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau = \frac{(t-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)},$$

$$K_3(t-s) = \int_s^t K_2(\tau-s)K_1(t-\tau)d\tau = \int_s^t \frac{(\tau-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau = \frac{(t-s)^{3\alpha-1}}{\Gamma(3\alpha)} \dots$$

$$K_n(t-s) = \frac{(t-s)^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)}.$$

Damit kann die Resolvente, auch lösender Kern genannt, bestimmt werden:

$$R(t-s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \frac{(t-s)^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)} \quad (3.8)$$

#### 4.4.2 Fraktionale Materialmodelle - Volterra Integralgleichung

Das fraktionale Integral bzw. Differential kann durch den Kern des Volterra Operators  $K^*$  beschrieben werden:

$$\int_0^t f(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s) ds = \int_0^t K_{1-\alpha}(t-s) f(s) ds = K_{\alpha}^* \cdot f(t) \dots \text{fraktionales Integral} \quad (3.9)$$

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(t-s)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} f(s) ds = \frac{d}{dt} \int_0^t K_{1-\alpha}(t-s) f(s) ds = K_{1-\alpha}^* \cdot f(t) \dots \text{frakt. Differentiation} \quad (3.10)$$

Die Beziehungen der Operatoren  $K^*$  und  $R^*$  in (3.6) und (3.7) gehen somit über in:

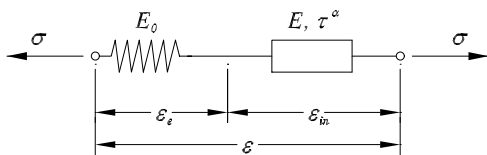
$$(1 - \lambda K_{\alpha}^*)^{-1} = 1 + R^* \Leftrightarrow \left(1 - \lambda \int_0^\alpha\right)^{-1} = 1 + R^* \quad (3.11)$$

$$R^* = \lambda K_{\alpha}^* (1 + R^*) = \lambda K_{\alpha}^* (1 - \lambda K_{\alpha}^*)^{-1} \Leftrightarrow R^* = \lambda \int_0^\alpha (1 + R^*) = \lambda \int_0^\alpha \left(1 - \lambda \int_0^\alpha\right)^{-1} \quad (3.12)$$

Damit sind Materialmodelle mit fraktionalen Elementen im Zeitbereich mathematisch einfach zu beschreiben. Dies wird im nachfolgenden Kapitel ausführlich diskutiert.

#### 4.4.3 Fraktionale Materialmodelle

##### 4.4.3.1 Fraktionales Maxwellelement



Die konstitutive Beziehungen sind für die elastische Dehnung  $\epsilon_e(t) = \frac{\sigma(t)}{E_0}$  und die

inelastische Dehnung  $\epsilon_{in}(t) = \frac{1}{E \cdot \tau^\alpha} \cdot \int_0^\alpha \sigma(t)$ .

##### 4.4.3.1.1 Spannungsgesteuerter Prozess → Retardationsfunktion



Aus der Gesamtdehnung  $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{in}$  ergibt sich  $\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_0} + \frac{1}{E \cdot \tau^\alpha} \cdot \int_0^t \sigma(s) ds$  und mit

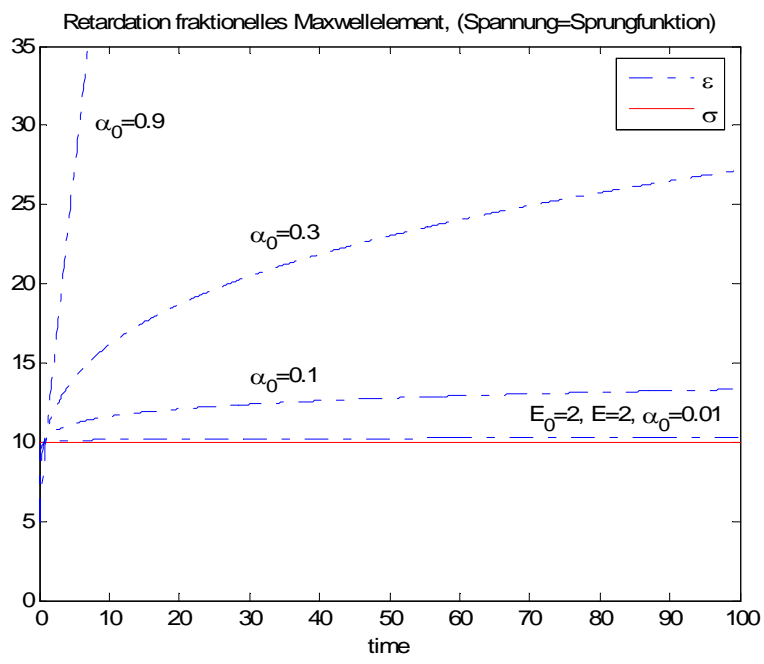
(3.9) wird  $\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_0} + \frac{1}{E \cdot \tau^\alpha} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \sigma(s) ds$  erhalten. Partielle Integration führt

die Dehnung über zu:  $\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_0} + \frac{1}{E \cdot \tau^\alpha} \int_0^t \frac{(t-s)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \cdot \dot{\sigma}(s) ds$  (3.13)

Für einen Spannungssprung  $\sigma(t) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{T_1} \cdot t & \text{für } 0 \leq t \leq T_1 \\ \sigma_0 & \text{für } T_1 < t \end{cases} \rightarrow \dot{\sigma}(t) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{T_1} \\ 0 \end{cases}$  ergibt sich

die Gesamtdehnung:  $\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} + \frac{\sigma_0}{E \cdot \Gamma(1+\alpha)} \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha = J(t) \cdot \sigma_0$  (3.14)

mit der Retardationsfunktion  $J(t) = \left[ \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E \cdot \Gamma(1+\alpha)} \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha \right]$  (3.15)



Die Grenzwerte sind:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \infty$$

Die Dehnung beginnt mit einem von  $E_0$  abhängigen Dehnungssprung und nimmt mit steigendem Ableitungsparameter  $\alpha_0$  zu. Die Dehnung geht gegen  $\infty$ , da die Potenzfunktion den Grenzwert  $\infty$  besitzt. Das Verhalten des fraktionales Maxwell-Elements entspricht einem fluidartigen Element.

**4.4.3.1.2 Dehnungsgesteuerter Prozess → Relaxationsfunktion**

Aus der Gleichung  $\sigma(t) = E_0 \cdot \varepsilon_e(t) = E_0 (\varepsilon(t) - \varepsilon_{in}(t)) = E_0 \varepsilon(t) - \frac{E_0}{E \cdot \tau^\alpha} \cdot \int_0^t \sigma(s) ds$  folgt die

explizite Form für die Spannung:  $\sigma(t) = E_0 \left( 1 + \frac{E_0}{E \cdot \tau^\alpha} \cdot \int_0^t \right)^{-1} \varepsilon(t)$

Mit (3.11) und  $-\lambda = \frac{E_0}{E \cdot \tau^\alpha}$  lässt sich für die Spannung

$$\sigma(t) = E_0 (1 + R^*) \varepsilon(t) = E_0 \left( \varepsilon(t) + \int_0^t R(t-s) \varepsilon(s) ds \right)$$

und weiter durch das Einsetzen der Resolvente

$$\sigma(t) = E_0 \cdot \left[ \varepsilon(t) + \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \frac{(t-s)^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)} \cdot \varepsilon(s) ds \right] = E_0 \cdot \left[ \varepsilon(t) + \int_0^t \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{-E_0}{E \cdot \tau^\alpha} \right)^n \frac{(t-s)^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)} - 1 \right) \cdot \varepsilon(s) ds \right]$$

schreiben. Durch partielle Integration wird für die Spannung der Ausdruck

$$\sigma(t) = E_0 \cdot \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{-E_0}{E \cdot \tau^\alpha} \right)^n \frac{(t-s)^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} \cdot \dot{\varepsilon}(s) ds \quad (3.16)$$

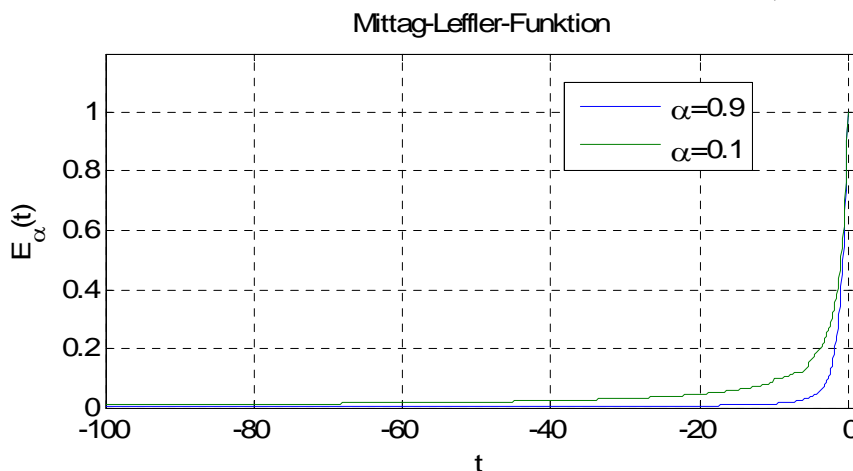
Für den Dehnungssprung  $\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0}{T_1} \cdot t & \text{für } 0 \leq t \leq T_1 \\ \varepsilon_0 & \text{für } T_1 < t \end{cases} \rightarrow \dot{\varepsilon}(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0}{T_1} \\ 0 \end{cases}$  ergibt sich die

$$\sigma(t) = E_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{E_0}{E} \right)^n \frac{1}{\Gamma(n\alpha+1)} \left( \frac{t}{\tau} \right)^{n\alpha} \cdot \varepsilon_0 = E_0 \cdot E_\alpha \left[ -\frac{E_0}{E} \left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right] \cdot \varepsilon_0 \quad (3.17)$$

und die Relaxationsfunktion zu

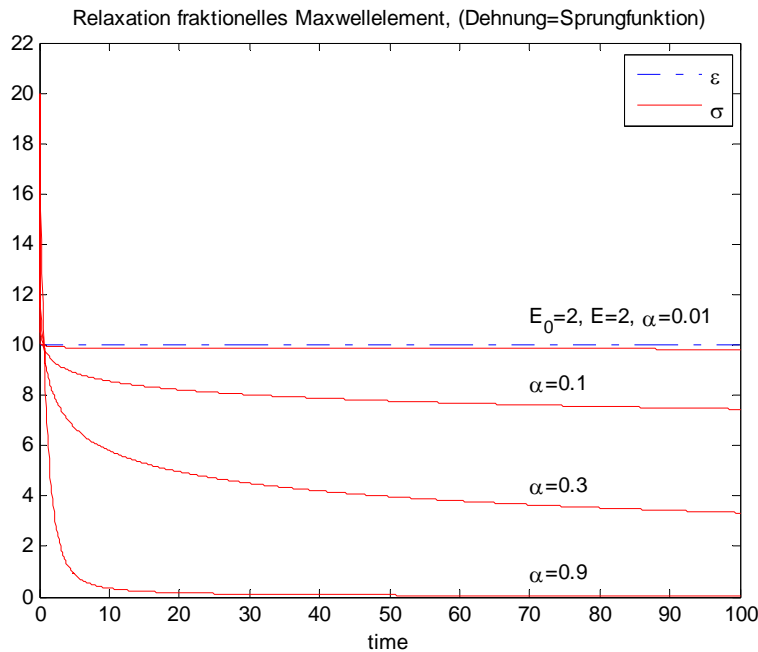
$$G(t) = E_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{E_0}{E} \right)^n \frac{1}{\Gamma(n\alpha+1)} \left( \frac{t}{\tau} \right)^{n\alpha} = E_0 \cdot E_\alpha \left[ -\frac{E_0}{E} \left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right]. \quad (3.18)$$

Dabei wurde die Mittag-Leffler-Funktion  $E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$  berücksichtigt.



Die für die fraktionalen Modelle interessanten Grenzwerte der Mittag-Leffler-Funktion sind:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} E_\alpha(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} E_\alpha(t) = 1$$

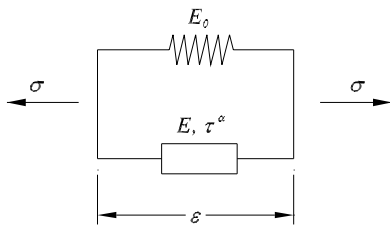


Die Grenzwerte sind:  
 $\lim_{t \rightarrow 0} \sigma(t) = E_0 \varepsilon_0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = 0$

Die Spannung fällt anfangs sprunghaft ab und relaxiert, stark von  $\alpha_0$  abhängig rasch bzw. sehr langsam gegen Null.

Auch hier ist das fluidartige Verhalten des fraktionales Maxwell-Elements erkennbar.

#### 4.4.3.2 Fraktionales Kelvin-Voigt-Modell



Die konstitutiven Beziehungen lauten für die Gleichgewichtsspannung  $\sigma_e(t) = E_0 \cdot \varepsilon(t)$  und die Überspannung  $\sigma_{ov}(t) = E \cdot \tau^\alpha \cdot \frac{d^\alpha [\varepsilon(t)]}{dt^\alpha}$ . Aus dem Kräftegleichgewicht folgt die Spannung  $\sigma(t) = \sigma_e(t) + \sigma_{ov}(t) = E_0 \cdot \varepsilon(t) + E \cdot \tau^\alpha \cdot \frac{d^\alpha [\varepsilon(t)]}{dt^\alpha}$ .

##### 4.4.3.2.1 Spannungsgesteuerter Prozess → Retardationsfunktion

Durch fraktionale Integration kann die Dehnung  $\varepsilon(t) = \frac{1}{E \cdot \tau^\alpha} \cdot \int \left( 1 + \frac{E_0}{E \cdot \tau^\alpha} \int \right)^{-1} \sigma(t)$  gewonnen werden. Mit (3.12) und der Abkürzung  $-\lambda = \frac{E_0}{E \cdot \tau^\alpha}$  folgt

$\varepsilon(t) = -\frac{1}{E_0} R^* \sigma(t) = -\frac{1}{E_0} \int_0^t R(t-s) \sigma(s) ds$  und weiter durch das Einsetzen der Resolvente

$$\varepsilon(t) = -\frac{1}{E_0} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \frac{(t-s)^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)} \cdot \sigma(s) ds = -\frac{1}{E_0} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-E_0}{E \cdot \tau^\alpha} \right)^n \frac{(t-s)^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)} \cdot \sigma(s) ds.$$

Mit partieller Integration wird für die Dehnung der Ausdruck

$$\varepsilon(t) = -\frac{1}{E_0} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-E_0}{E \cdot \tau^\alpha} \right)^n \frac{(t-s)^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} \cdot \dot{\sigma}(s) ds \quad \text{erhalten.} \quad (3.19)$$

Für einen Spannungssprung  $\sigma(t) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{T_1} \cdot t & \text{für } 0 \leq t \leq T_1 \\ \sigma_0 & \text{für } T_1 < t \end{cases} \rightarrow \dot{\sigma}(t) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{T_1} \\ 0 \end{cases}$  ergibt sich

die Gesamtdehnung:

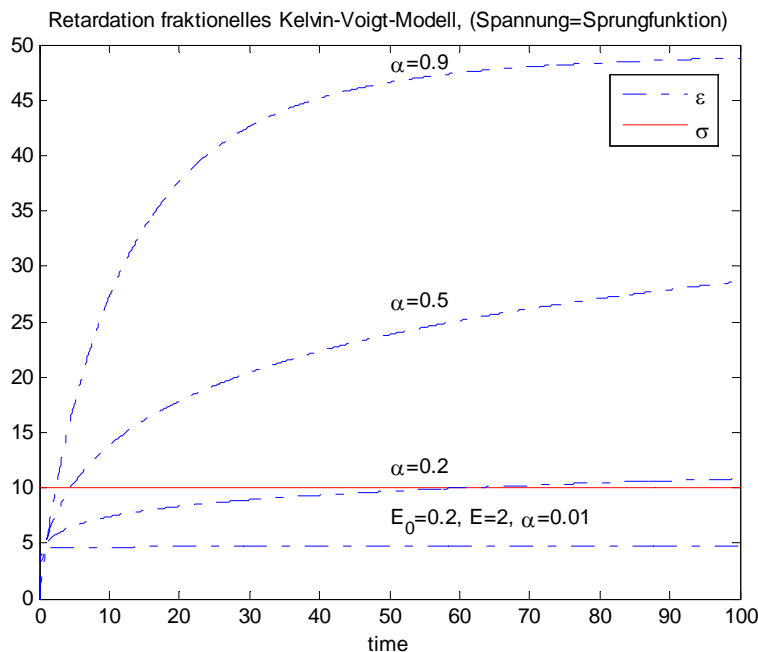
$$\varepsilon(t) = -\frac{\sigma_0}{E_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-E_0}{E} \right)^n \frac{1}{\Gamma(n\alpha+1)} \cdot \left( \frac{t}{\tau} \right)^{n\alpha} = \frac{\sigma_0}{E_0} \left\{ 1 - E_\alpha \left[ -\frac{E_0}{E} \left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right] \right\} = J(t) \cdot \sigma_0 \quad (3.20)$$

mit der Retardationsfunktion

$$J(t) = -\frac{1}{E_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-E_0}{E} \right)^n \frac{1}{\Gamma(n\alpha+1)} \cdot \left( \frac{t}{\tau} \right)^{n\alpha} = \frac{1}{E_0} \left\{ 1 - E_\alpha \left[ -\frac{E_0}{E} \left( \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right] \right\} \quad (3.21)$$

Die Mittag-Leffler-Funktion wurde nun in der Form

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad \text{berücksichtigt.}$$



Die Grenzwerte sind:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0}$$

Die Dehnung beginnt bei Null. Mit steigendem  $\alpha_0$  geht sie früher dem, von  $E_0$  abhängigen, Grenzwert entgegen.

Das Verhalten des fraktionales Kelvin-Voigt-Elementes entspricht einem solid Element.

#### 4.4.3.2.2 Dehnungsgesteuerter Prozess → Relaxationsfunktion

Die aus dem Kräftegleichgewicht folgende Spannung  $\sigma(t) = E_0 \cdot \varepsilon(t) + E \cdot \tau^\alpha \cdot \frac{d^\alpha [\varepsilon(t)]}{dt^\alpha}$

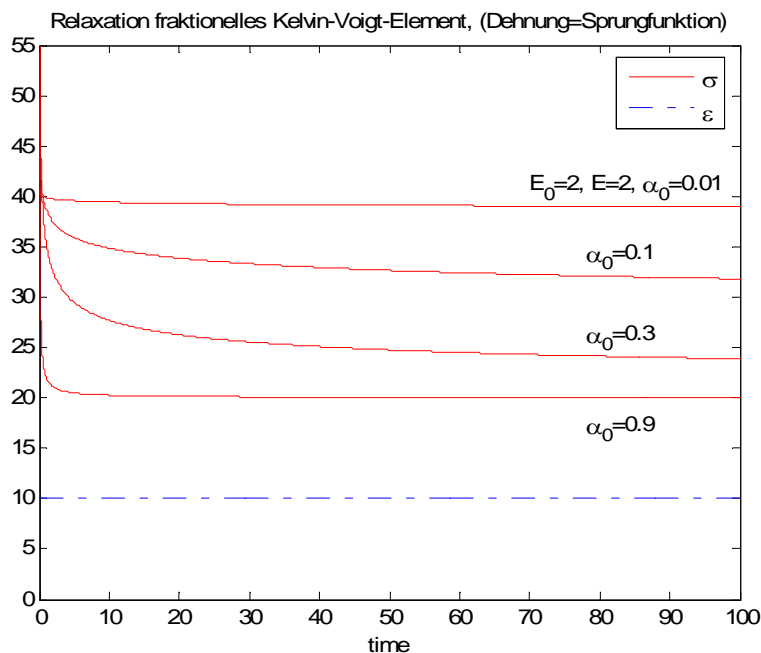
wird mit (3.10) in  $\sigma(t) = E_0 \cdot \varepsilon(t) + E \cdot \tau^\alpha \cdot \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(t-s)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \varepsilon(s) ds$  und weiter in

$$\sigma(t) = E_0 \cdot \varepsilon(t) + E \cdot \tau^\alpha \int_0^t \frac{(t-s)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \dot{\varepsilon}(s) ds \quad \text{überführt.} \quad (3.22)$$

Für den Dehnungssprung  $\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0}{T_1} \cdot t & \text{für } 0 \leq t \leq T_1 \\ \varepsilon_0 & \text{für } T_1 < t \end{cases} \rightarrow \dot{\varepsilon}(t) = \frac{\varepsilon_0}{T_1}$  ergibt sich die

$$\text{Spannung zu } \sigma(t) = \left[ E_0 + \frac{E}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \left( \frac{\tau}{t} \right)^\alpha \right] \cdot \varepsilon_0 = G(t) \cdot \varepsilon_0 \quad (3.23)$$

$$\text{und die Relaxationsfunktion zu } G(t) = E_0 + \frac{E}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \left( \frac{\tau}{t} \right)^\alpha. \quad (3.24)$$



Die Grenzwerte sind:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sigma(t) = \infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = E_0 \varepsilon_0$$

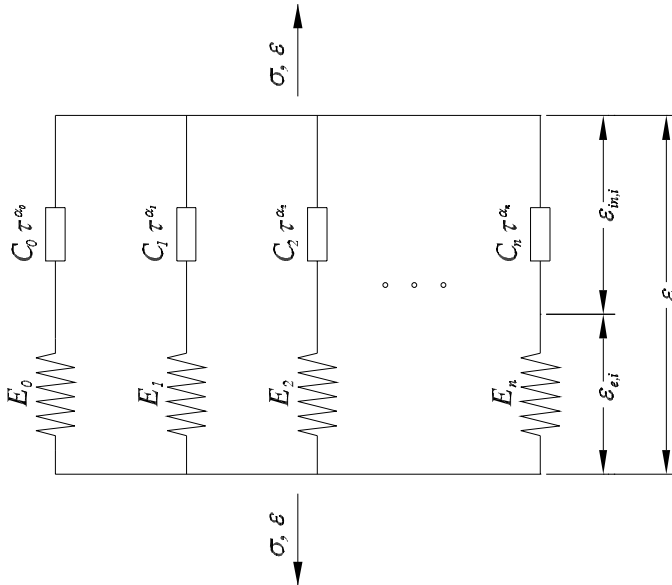
Die Spannung fällt anfangs sprunghaft ab und relaxiert, stark von  $\alpha_0$  abhängig rasch bzw. sehr langsam, gegen den, von  $E_0$  abhängigen, Grenzwert.

Auch hier ist das solidartig Verhalten des fraktionales Kelvin-Voigt-Elementes erkennbar.

#### 4.4.4 Diskrete Spektren mit fraktionalen Elementen

Analog zu den diskreten Spektren aus Maxwell- und Kelvin-Voigt-Elementen (siehe Kapitel 3.5) können fraktionelle Ketten gebildet werden. Von ihnen lassen sich, analog zu den klassischen Dreiparametermodellen A und B, fraktionale Modelle A und B ableiten. Wie bereits unter Kapitel 3.5 festgestellt, sind die Dreiparametermodelle C und D für die lineare Viskoelastizität weniger interessant und werden deswegen auch bei den nachfolgenden fraktionalen Modellen nicht weiter behandelt.

#### 4.4.4.1 Fraktionale Maxwell-Kette



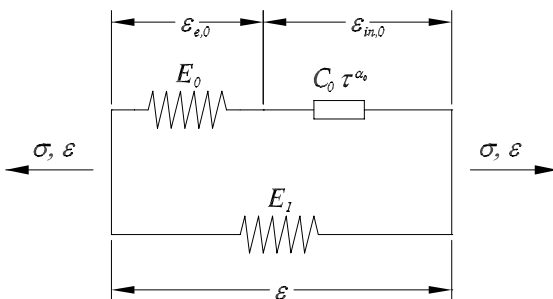
Mit dem Kräftegleichgewicht  $\sigma = \sum_{i=0}^k \sigma_i$  und der Spannung in den einzelnen Maxwell-  
elementen  $\sigma_i(t) = E_i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{E_i}{C_i}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n\alpha_i + 1)} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{n\alpha_i} \cdot \epsilon_0 = E_i \cdot E_{\alpha_i} \left[-\frac{E_i}{C_i} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha_i}\right] \cdot \epsilon_0$  folgt für  
die Spannungsantwort der fraktionalen Maxwell-Kette:

$$\sigma(t) = \sum_{i=0}^k E_i E_{\alpha_i} \left[-\frac{E_i}{C_i} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha_i}\right] \cdot \epsilon_0 = \sum_{i=0}^k G_i(t) \cdot \epsilon_0 \text{ bzw.}$$

$$\sigma(t) = \left\{ E_0 E_{\alpha_0} \left[-\frac{E_0}{C_0} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha_0}\right] + \sum_{i=1}^k E_i E_{\alpha_i} \left[-\frac{E_i}{C_i} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha_i}\right] \right\} \cdot \epsilon_0$$

mit der Relaxationsfunktion  $G_i(t)$  in den einzelnen Maxwellelementen.

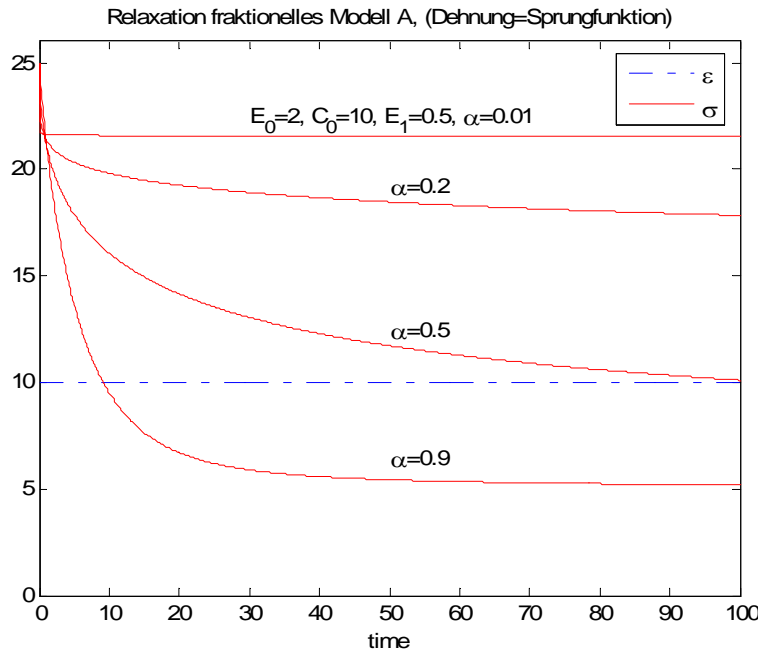
##### 4.4.4.1.1 Fraktionales Modell A



Mit  $k = 1$ ,  $\alpha_1 = 0$  und  $C_1 = \infty$  (d. h. wegen  $\alpha_1 = 0$  geht das fraktionale Element vorerst in  
eine elastische Feder und mit dem Grenzübergang  $C_1 = \infty$  weiter in eine unendlich steife  
Feder über) folgt die entsprechende Spannungsantwort:

$$\sigma(t) = \left\{ E_0 E_{\alpha_0} \left[ -\frac{E_0}{C_0} \left( \frac{t}{\tau} \right)^{\alpha_0} \right] + E_1 \right\} \cdot \varepsilon_0 \text{ bzw.}$$

$$\sigma(t) = \left\{ E_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{E_0}{C_0} \right)^n \frac{1}{\Gamma(n\alpha_0 + 1)} E_{\alpha_0} \left( \frac{t}{\tau} \right)^{n\alpha_0} + E_1 \right\} \cdot \varepsilon_0 = G(t) \cdot \varepsilon_0$$



Die Grenzwerte sind:

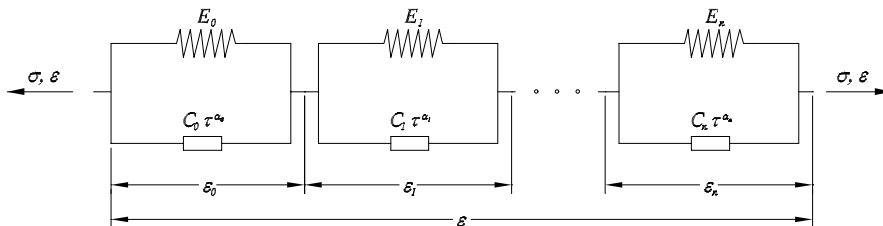
$$\lim_{t \rightarrow 0} \sigma(t) = (E_0 + E_1) \varepsilon_0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = E_1 \varepsilon_0$$

Die Spannung fällt anfangs sprunghaft ab und relaxiert, stark von  $\alpha_0$  abhängig, rasch bzw. sehr langsam, gegen den, von  $E_1$  abhängigen, Grenzwert.

Auch hier ist das solidartige Verhalten des fraktionales Modells A erkennbar.

#### 4.4.4.2 Fraktionale Kelvin-Voigt-Kette



Mit der Gesamtdehnung  $\varepsilon = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i$  und der Dehnung in den einzelnen Kelvin-Voigt-

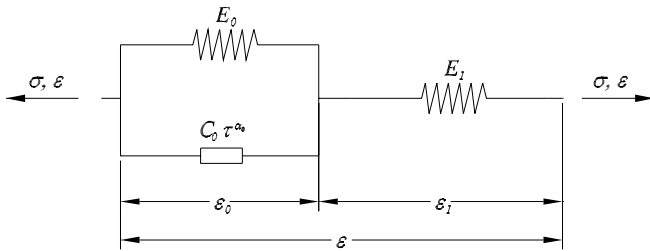
Elementen  $\varepsilon_i(t) = -\frac{\sigma_0}{E_i} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-E_i}{C_i} \right)^n \frac{1}{\Gamma(n\alpha_i + 1)} \cdot \left( \frac{t}{\tau} \right)^{n\alpha_i} = \frac{\sigma_0}{E_i} \left\{ 1 - E_{\alpha_i} \left[ \frac{-E_i}{C_i} \left( \frac{t}{\tau} \right)^{\alpha_i} \right] \right\}$  lautet die

Dehnungsfunktion für die fraktionale Kelvin-Voigt-Kette:

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=0}^k \frac{1}{E_i} \left\{ 1 - E_{\alpha_i} \left[ \frac{-E_i}{C_i} \left( \frac{t}{\tau} \right)^{\alpha_i} \right] \right\} \cdot \sigma_0 = \sum_{i=0}^n J_i(t) \cdot \sigma_0$$

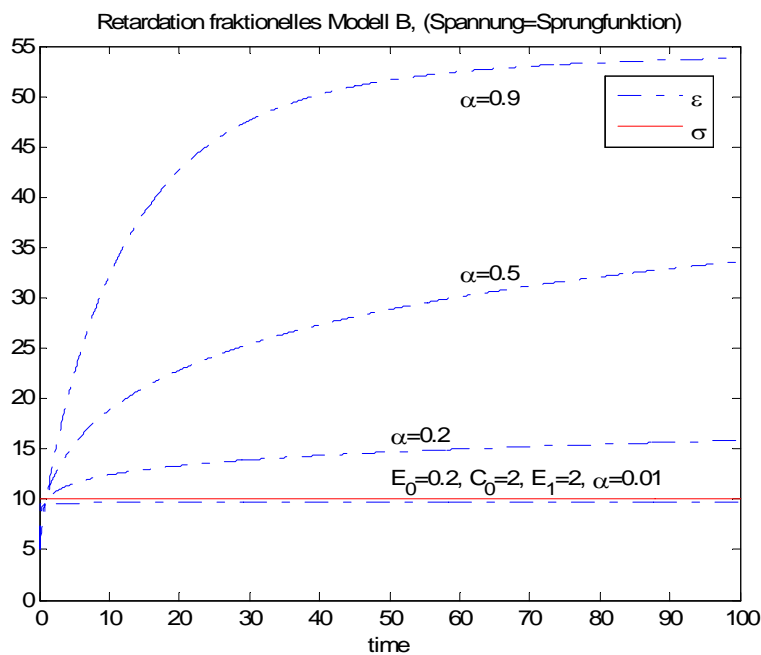
mit der Retardationsfunktion  $J_i(t)$  in den einzelnen Kelvin-Voigt-Elementen.

#### 4.4.4.2.1 Fraktionales Modell B



Mit  $k=1$ ,  $\alpha_1 = 0$  und  $C_1 = 0$  (auch hier geht das fraktionale Element durch  $\alpha_1 = 0$  in eine elastische Feder über jedoch wird durch  $C_1 = 0$  die Feder eliminiert) folgt für die Spannungsfunktion:

$$\varepsilon(t) = \left\{ \frac{1}{E_0} \left( 1 - E_{\alpha_0} \left[ \frac{-E_0}{C_0} \left( \frac{t}{\tau} \right)^{\alpha_0} \right] \right) + \frac{1}{E_1} \right\} \cdot \sigma_0$$



Die Grenzwerte sind:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \left( \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1} \right) \sigma_0$$

Die Dehnung beginnt mit einem von  $E_1$  abhängigen Dehnungssprung. Mit steigendem  $\alpha_0$  geht sie früher dem, von  $E_0$  und  $E_1$  abhängigen, Grenzwert entgegen.

Das Verhalten des fraktionales Modells B entspricht ebenfalls einem solid Element.



## 5 Feuchte-rheologisch einfache Stoffe

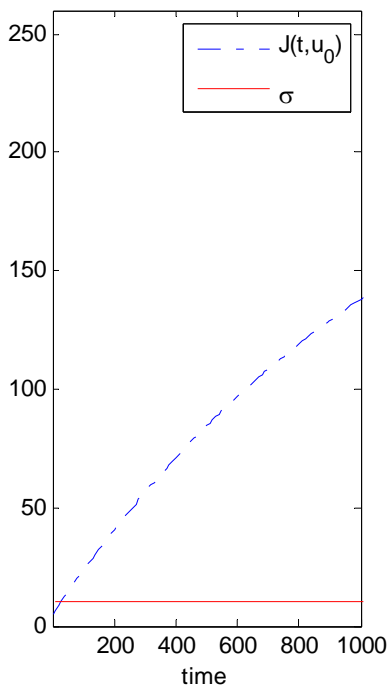
In Anlehnung an das bekannte und sehr etablierte Zeit-Temperatur-Verschiebungsprinzip in der Materialtheorie der linearen Viskoelastizität für Polymere ([3],[6]) soll nun ein Zeit-Feuchte-Verschiebungsprinzip eingeführt werden.

Voraussetzung für diese Theorie ist, dass sich der Werkstoff feuchte-rheologisch einfach verhält. D. h. es wird angenommen, dass sich nur die viskosen Stoffanteile feuchteabhängig verhalten. Die elastischen Anteile hingegen werden als feuchteresistent betrachtet. Dies bedeutet, z. B. für Maxwell- oder Kelvin-Ketten, dass alle viskosen Dämpfer dieselbe Abhängigkeit von der Feuchtigkeit aufweisen.

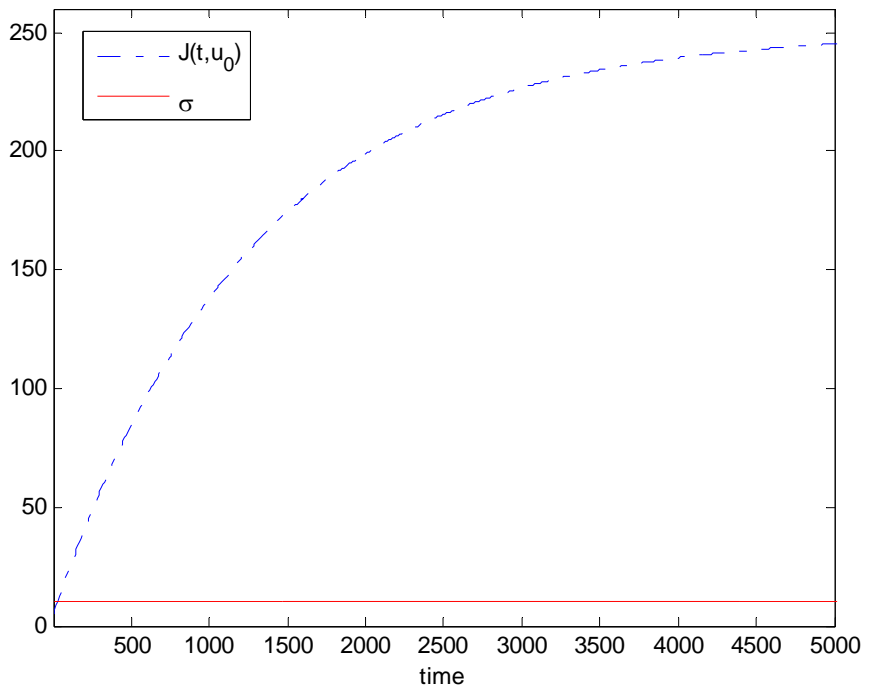
Für Werkstoffe mit einem solchen feuchte-rheologisch einfachen Verhalten kann durch das Verschiebungsprinzip eine Hauptkurve (Mastercurve) gebildet werden. Die Hauptkurve wird dazu aus mehreren Kriech- bzw. Relaxationskurven, welche bei verschiedenen Materialfeuchten im Experiment gemessen wurden, im halblogarithmischen Diagramm durch Verschiebung entlang der logarithmischen Zeitachse gebildet. Damit wird die sogenannte Hauptkurve als Kriech- bzw. Relaxationskurve über einen größeren Zeitmaßstab gewonnen. Sie ermöglicht eine Beschreibung des Materialverhaltens über das experimentelle Zeitfenster hinaus.

Die beiden folgenden Diagramme zeigen das Potenzial dieses Verschiebungsprinzips mit dem Ergebnis, dass das Kriechen z. B. in einem 5 mal längeren Zeitbereich beschrieben werden kann als gemessen wurde.

Retardationsfunktion bei Feuchte  $u_0$



Zeit-Feuchte-Hauptkurve

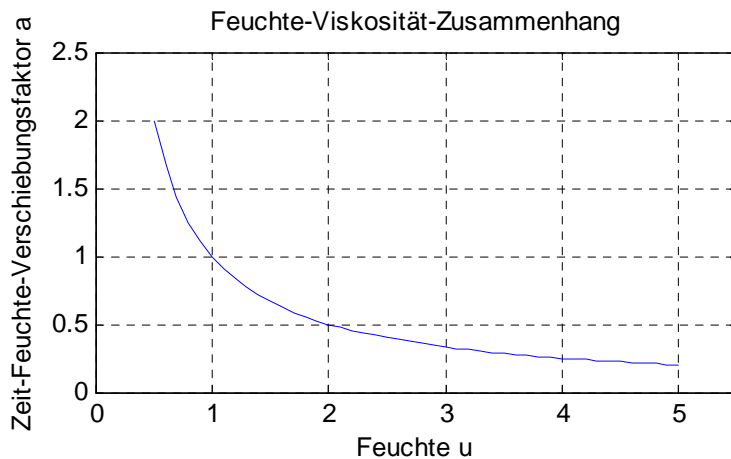


## 5.1 Feuchteabhängige Viskosität

Die feuchteabhängige Viskosität  $\eta(u)$  wird durch eine Viskosität  $\eta(u_0)$ , bezogen auf die Referenzfeuchte  $u_0$ , und den Zeit-Feuchte-Verschiebungsfaktor  $a(u)$  eingeführt.

$$\text{Feuchteabhängige Viskosität: } \eta(u) = \eta(u_0) \cdot a(u) \quad (4.1)$$

Für den Zeit-Feuchte-Verschiebungsfaktor  $a(u)$  gilt die Normierung  $a(u_0) = 1$  und  $a(u) > 0$ . Er gibt den Zusammenhang zwischen der Abnahme der Viskosität bei Feuchtezunahme und umgekehrt, die Zunahme der Viskosität bei Feuchteabnahme, an. Für ihn gilt somit die Ungleichung  $\frac{da}{du} \leq 0$ . Diese fordert, dass  $a(u)$  eine stetig differenzierbare und monoton fallende Funktion von der Feuchtigkeit  $u$  ist.



Der experimentell ermittelte Zeit-Feuchte-Verschiebungsfaktor  $a(u)$  ist ein Indikator für die Anwendbarkeit des Zeit-Feuchte-Verschiebungsprinzips. Nur wenn dieser Faktor im Relaxations- und Retardationsversuch für einen Werkstoff ident ist, verhält sich der Werkstoff feuchte-rheologisch einfach.

## 5.2 Feuchteabhängiger Zeitmaßstab

Das Konzept der feuchte-rheologisch einfachen Stoffe erfordert die Einführung eines feuchteabhängigen Zeitmaßstabes. Dieser wird durch das Differential  $dz = \frac{dt}{a[u(t)]}$  bzw.

durch das Integral  $z(t) = \int_0^t \frac{ds}{a[u(s)]}$  eingeführt und als materialeigene Zeit bezeichnet.

Damit lässt sich für die drei verschiedenen Feuchtigkeiten  $u(t) = u_0$ ,  $u(t) > u_0$  und  $u(t) < u_0$  der Zusammenhang zur materialeigenen Zeit bilden:

- Materialfeuchte entspricht der Referenzfeuchte:

$$u(t) = u_0 \rightarrow a(u_0) = 1 \rightarrow z = \int_0^t \frac{ds}{a(u_0)} = \frac{t}{a(u_0)} = t \rightarrow \text{materialeigene Zeit} = \text{reale Zeit}$$

- Materialfeuchte > Referenzfeuchte:

$$u(t) > u_0 \rightarrow a(u) < 1 \rightarrow \dot{z} = \frac{1}{a(u)} > 1 \rightarrow \text{materialeig. Zeit läuft schneller als reale Zeit}$$

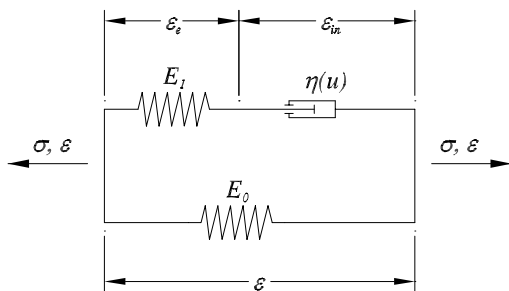
- Materialfeuchte < Referenzfeuchte:

$$u(t) < u_0 \rightarrow a(u) > 1 \rightarrow \dot{z} = \frac{1}{a(u)} < 1 \rightarrow \text{materialeig. Zeit läuft langsamer als reale Zeit}$$

Für Werkstoffe deren Materialmodelle bezüglich der materialeigenen Zeit  $z(t)$  formuliert sind, gilt für die Zeitableitung von Spannung  $\sigma(z)$  und Dehnung  $\varepsilon(z)$  gemäß der Kettenregel:

$$\dot{\sigma}(z) = \frac{d\sigma}{dz} \dot{z} = \sigma'(z) \frac{1}{a(u)} \quad \text{bzw.} \quad \dot{\varepsilon}(z) = \frac{d\varepsilon}{dz} \dot{z} = \varepsilon'(z) \frac{1}{a(u)}$$

### 5.3 Modell A mit feuchteabhängiger Viskosität



Nachfolgend wird exemplarisch am Modell A die Materialgleichung, welche bezüglich der realen Zeit  $t$  und der Feuchtigkeit  $u$  (berücksichtigt in Form der feuchteabhängigen Viskosität  $\eta(u)$ ) formuliert wurde, in eine Gleichung in Bezug auf die materialeigene Zeit  $z(t)$  bezogen auf die Referenzfeuchte  $u_0$  (berücksichtigt in Form der Viskosität bei Referenzfeuchte  $\eta(u_0)$ ), übergeführt.

#### 5.3.1 Dehnungsgesteuerter Prozess → Relaxationsfunktion

Die Materialgleichung für das Modell A mit feuchte-rheologisch einfachem Verhalten wird aus dem Kräftegleichgewicht  $\sigma = \sigma_e + \sigma_{in} = E_0 \varepsilon + \sigma_{in}$  und der Kompatibilität  $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{in}$  gewonnen. Für die inelastische Spannung gilt:  $\sigma_{in} = E_1 \varepsilon_e = E_1 (\varepsilon - \varepsilon_{in}) = \eta(u) \dot{\varepsilon}_{in}$ . Die inelastische Dehnung lautet:  $\varepsilon_{in} = \varepsilon - \varepsilon_e \rightarrow \dot{\varepsilon}_{in} = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_e = \dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}_{in}}{E_1}$  Aus dem

Kräftegleichgewicht  $\sigma = E_0 \varepsilon + \eta(u) \dot{\varepsilon}_m = E_0 \varepsilon + \eta(u) \left( \dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}_m}{E_1} \right) = E_0 \varepsilon + \eta(u) \left[ \dot{\varepsilon} - \frac{1}{E_1} (\dot{\sigma} - E_0 \dot{\varepsilon}) \right]$  wird

nun die Materialgleichung gewonnen:  $\dot{\sigma}(t) + \frac{E_1}{\eta(u)} \sigma(t) = (E_0 + E_1) \dot{\varepsilon}(t) + \frac{E_0 E_1}{\eta(u)} \varepsilon(t)$  (4.2)

Sie entspricht der klassischen Materialgleichung für Modell A und ist nur um eine feuchteabhängige Viskosität  $\eta(u)$  erweitert worden.

Bei Einführung der materialeigenen Zeit, d. h.  $t \rightarrow z(t)$ , geht die DGL über in:

$$\sigma'(z) + \frac{E_1}{\eta(u_0)} \sigma(z) = (E_0 + E_1) \varepsilon'(z) + \frac{E_0 E_1}{\eta(u_0)} \varepsilon(z)$$
 (4.3)

Sie entspricht ebenfalls der klassischen Materialgleichung für Modell A, jedoch mit einer materialeigenen Zeit  $z(t)$  und der Referenzfeuchte  $u_0$ .

Die Lösung der DGL erfolgt analog wie beim klassischen Modell mit Exponentialansatz

und lautet:  $\sigma(z) = \int_0^{z(t)} \left( E_0 + E_1 e^{-\frac{E_1}{\eta(u_0)}(z(t)-\zeta(\vartheta))} \right) \cdot \varepsilon'(\zeta) d\zeta$  (4.4)

mit  $z(t) = \int_0^t \frac{ds}{a[u(s)]}$  und  $\zeta(\vartheta) = \int_0^\vartheta \frac{ds}{a[u(s)]}$

### 5.3.2 Spannungsgesteuerter Prozess → Retardationsfunktion

Aus (4.2) wird durch Umstellen die Material-DGL mit Feuchteabhängigkeit bei realer Zeit

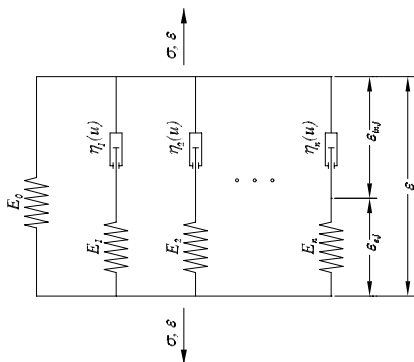
gewonnen:  $\dot{\varepsilon}(t) + \frac{E_0 E_1}{\eta(u)(E_0 + E_1)} \varepsilon(t) = \frac{1}{E_0 + E_1} \dot{\sigma}(t) + \frac{E_1}{\eta(u)(E_0 + E_1)} \sigma(t)$  (4.5)

Formuliert man sie relativ zur materialeigenen Zeit  $z(t)$  bei der Referenzfeuchte  $u_0$ , so lautet die DGL:

$$\varepsilon'(z) + \frac{E_0 E_1}{\eta(u_0)(E_0 + E_1)} \varepsilon(z) = \frac{1}{E_0 + E_1} \sigma'(z) + \frac{E_1}{\eta(u_0)(E_0 + E_1)} \sigma(z)$$
 (4.6)

und die zugehörige Lösung:  $\varepsilon(z) = \int_0^{z(t)} \left[ \frac{1}{E_0} + \left( \frac{1}{E_0 + E_1} - \frac{1}{E_0} \right) e^{-\frac{E_0 E_1}{\eta(u_0)(E_0 + E_1)}(z(t)-\zeta(\vartheta))} \right] \cdot \sigma'(\zeta) d\zeta$  (4.7)

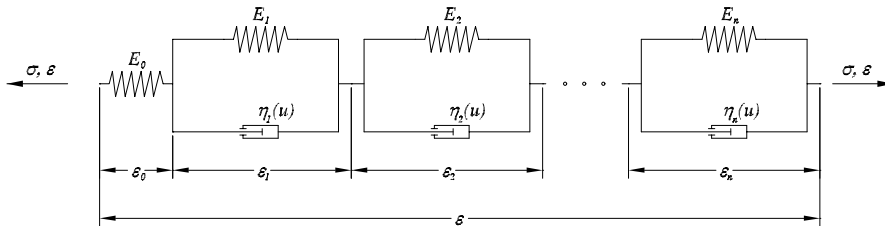
## 5.4 Maxwell-Kette



Die Überführung der Materialgleichung der Maxwell-Kette, analog dem vorhergehenden Kapitel 5.3, liefert für die Spannung:

$$\sigma(z) = \int_0^{z(t)} \left( E_0 + \sum_{j=1}^n E_j e^{-\frac{E_j}{\eta_j(u_0)}(z(t)-\zeta(\vartheta))} \right) \cdot \varepsilon'(\zeta) d\zeta \quad (4.8)$$

## 5.5 Kelvin-Voigt-Kette



Die Überführung der Materialgleichung der Kelvin-Voigt-Kette, analog dem Kapitel 5.3, liefert für die Dehnung das folgende Funktional:

$$\varepsilon(z) = \int_0^{z(t)} \left[ \frac{1}{E_0} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{E_j} \left( 1 - e^{-\frac{E_j}{\eta_j(u_0)}(z(t)-\zeta(\vartheta))} \right) \right] \cdot \sigma'(\zeta) d\zeta \quad (4.9)$$

## 5.6 Verallgemeinerung der materialeigenen feuchteabhängigen Zeit

Für feuchte-rheologisch einfache Werkstoffe kann die, von der materialeigenen Zeit abhängige, Spannung  $\sigma(z)$  bzw. Dehnung  $\varepsilon(z)$  durch die Relaxationsfunktion  $G[z(t) - \zeta(\vartheta)]$  bzw. Retardationsfunktion  $J[z(t) - \zeta(\vartheta)]$  verallgemeinert werden:

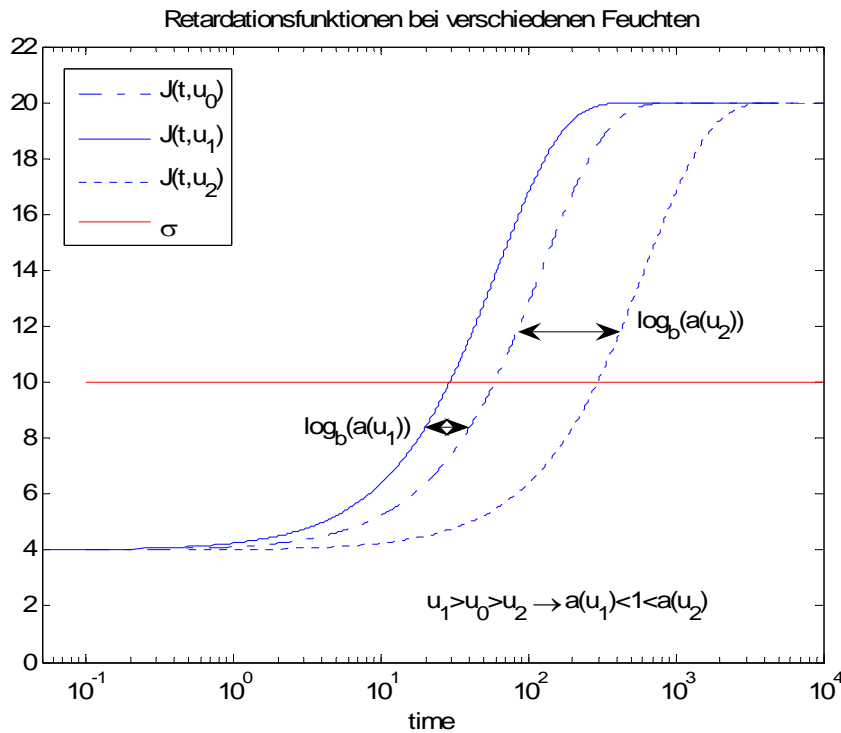
$$\sigma(z) = \int_0^{z(t)} G[z(t) - \zeta] \cdot \varepsilon'(\zeta) d\zeta \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon(z) = \int_0^{z(t)} J[z(t) - \zeta] \cdot \sigma'(\zeta) d\zeta \quad (4.10)$$

## 5.7 Verschiebungsprinzip

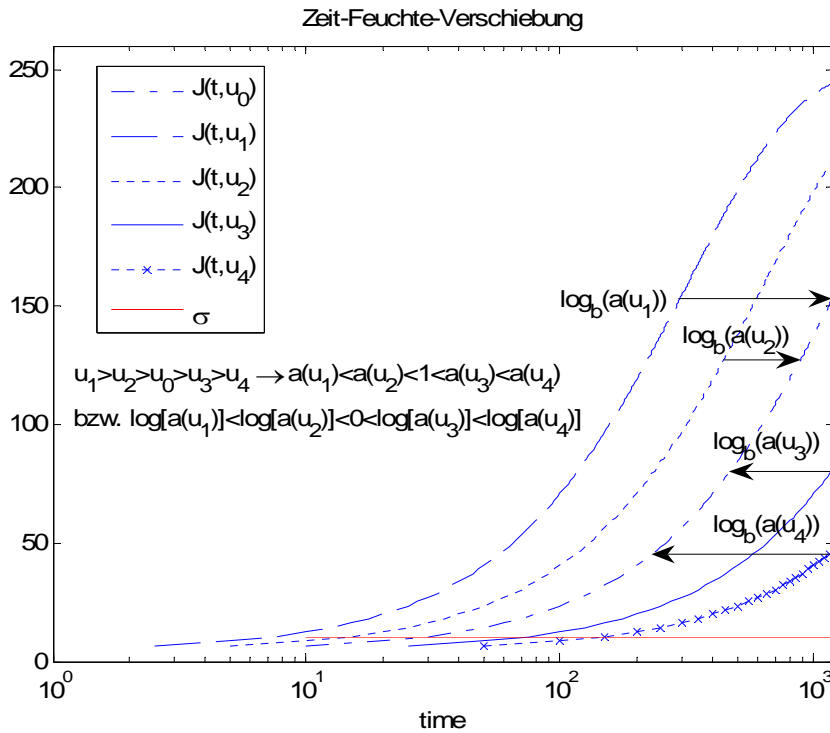
Die Voraussetzung für die Anwendbarkeit des Zeit-Feuchte-Verschiebungsprinzips auf einen Werkstoff ist, dass der Werkstoff ein feuchte-rheologisch einfaches Verhalten besitzt. Der wesentliche Grundgedanke des Zeit-Feuchte-Verschiebungsprinzips ist die, analog zum Zeit-Temperatur-Verschiebungsprinzip empirisch gefundene, Abhängigkeit des Materialverhaltens von der Zeit und der Feuchtigkeit. Dieser Bezug wird durch die materialeigene Zeit  $z(t) = \int_0^t \frac{ds}{a[u(s)]}$  und den Zeit-Feuchte-Verschiebungsfaktor  $a(u)$  determiniert.

Das Prinzip wird für die Retardation in der Form praktiziert, dass die zu einer Referenzfeuchte  $u_0$  gehörende Kriechkurve als Referenzkurve  $J(t, u_0)$  gewählt wird. Der

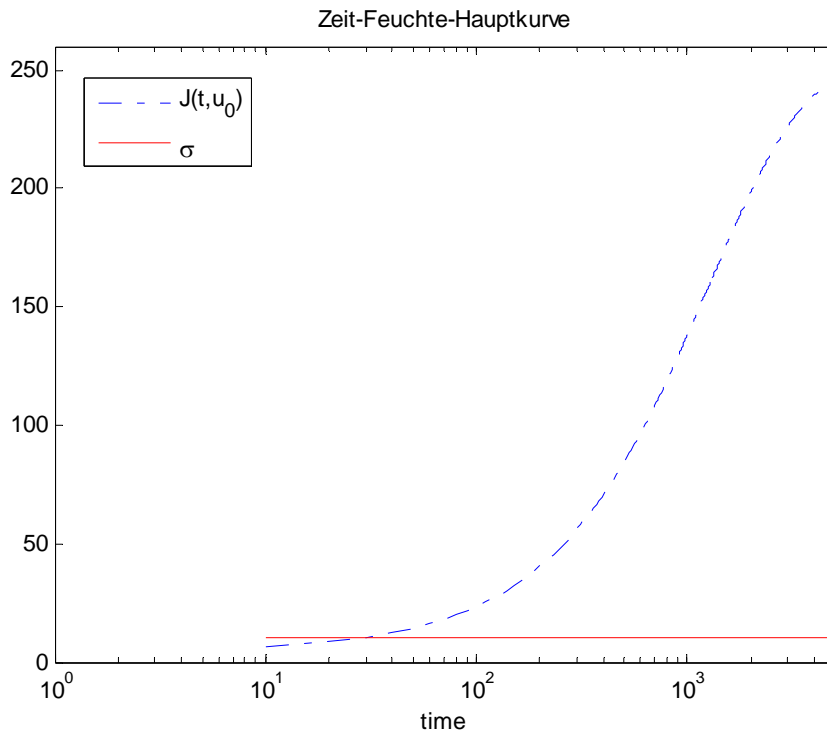
horizontaler Abstand zwischen dieser Kriechkurve zu den anderen Kriechkurven bei unterschiedlicher Feuchtigkeit beträgt  $\log_b [a(u_i)]$ .



Die, bei unterschiedlicher Feuchte, gemessenen Kriechkurven  $J(t, u_i)$  werden um ihren logarithmierten Zeit-Feuchte-Verschiebungsfaktor  $\log_b [a(u_i)]$  im halblogarithmischen Diagramm entlang der logarithmischen Zeitachse verschoben.



Die sich daraus ergebende stetige Kriechkurve wird als Hauptkurve (Mastercurve) bezeichnet und beschreibt das Kriechverhalten über einen entsprechend größeren Zeitbereich. Dieses Prinzip ist analog auf die Relaxation übertragbar.



Die mathematische Beschreibung des Prinzips erfordert zunächst die Überführung der Spannung und Dehnung aus der materialeigenen Zeit in die Zeit der Referenzkurve:

Die zur Referenzfeuchte  $u_0$  gehörende materialeigene Zeit ist  $z(t) = \int_0^t \frac{ds}{a(u_0)} = \frac{t}{a(u_0)}$  bzw.

$\zeta(\mathcal{G}) = \int_0^{\mathcal{G}} \frac{ds}{a(u_0)} = \frac{\mathcal{G}}{a(u_0)}$ . Mit der Substitution  $\zeta(\mathcal{G}) = \frac{\mathcal{G}}{a(u_0)} \rightarrow d\zeta = \frac{d\mathcal{G}}{a(u_0)}$  und

$\varepsilon'[\zeta(\mathcal{G})]d\zeta = \frac{d\varepsilon}{d\zeta}d\zeta = d\varepsilon \frac{a(u_0)}{d\mathcal{G}} \frac{d\mathcal{G}}{a(u_0)} = \dot{\varepsilon}(\mathcal{G})d\mathcal{G}$  bzw.  $\sigma'[\zeta(\mathcal{G})]d\zeta = \dot{\sigma}(\mathcal{G})d\mathcal{G}$  folgt für

(4.10):

$$\sigma[z(t)] = \sigma(t) = \int_0^t G\left[\frac{t-\mathcal{G}}{a(u_0)}\right] \cdot \dot{\varepsilon}(\mathcal{G})d\mathcal{G} \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon[z(t)] = \varepsilon(t) = \int_0^t J\left[\frac{t-\mathcal{G}}{a(u_0)}\right] \cdot \dot{\sigma}(\mathcal{G})d\mathcal{G} \quad (4.11)$$

Die Relaxations- und Retardationsfunktion zur selben Zeit und unterschiedlicher Feuchtigkeit sind somit in Funktionen bei gleicher Feuchtigkeit und unterschiedlicher Zeit

$G(t, u) = G\left(\frac{t}{a(u)}, u_0\right)$  bzw.  $J(t, u) = J\left(\frac{t}{a(u)}, u_0\right)$  transformiert worden.

Die Verschiebung im logarithmischen Zeitmaßstab erfordert die Beziehung

$$G\left(\frac{t}{a(u)}, u_0\right) \Leftrightarrow G\left(b^{\log_b(t) - \log_b[a(u)]}, u_0\right) \quad \text{für die Relaxationsfunktion bzw.}$$

$J\left(\frac{t}{a(u)}, u_0\right) \Leftrightarrow J\left(b^{\log_b(t) - \log_b[a(u)]}, u_0\right)$  für die Retardationsfunktion.

Mit  $\log_b(t) - \log_b[a(u)]$  wird deutlich, dass die Verschiebung nur im logarithmischen Zeitmaßstab durchführbar ist. Zu beachten ist, dass auf einer linearen Zeitachse mit  $\frac{t}{a(u)}$  keine Verschiebung sondern nur eine proportionale Verzerrung der Kurve erfolgt.

Im Zeitbereich ist die Verschiebungsrichtung durch das Vorzeichen der Feuchtedifferenz  $\Delta u = u_0 - u(t)$  bestimmt. Damit lässt sich für die drei verschiedenen Feuchtigkeiten  $u(t) = u_0$ ,  $u(t) > u_0$  und  $u(t) < u_0$  die Verschiebung, beispielhaft an der Retardation, diskutieren:

- Materialfeuchte entspricht der Referenzfeuchte:  
 $u(t) = u_0 \rightarrow a(u_0) = 1 \rightarrow J(t, u) = J(t, u_0)$  Kriechkurve = Referenzkurve
- Materialfeuchte  $>$  Referenzfeuchte:  
 $u_1(t) > u_0 \rightarrow \Delta u > 0, a(u_1) < 1 \rightarrow \log_b[a(u_1)] < 0$  Kriechkurve verschiebt sich um den Betrag  $\log_b[a(u_1)]$  nach rechts.
- Materialfeuchte  $<$  Referenzfeuchte:  
 $u_2(t) < u_0 \rightarrow \Delta u < 0, a(u_2) > 1 \rightarrow \log_b[a(u_2)] > 0$  Kriechkurve verschiebt sich um den Betrag  $\log_b[a(u_2)]$  nach links.



## 6 Ausblick

## 7 Literaturverzeichnis

- [1] Mang, H. und Hofstetter, G.: *Festigkeitslehre*, 2. Aufl., SpringerWienNewYork, 2004
- [2] Emmerling, F., *Kontinuumsmechanik*, 2000
- [3] Lion, A., *Einführung in die Lineare Viskoelastizität*, Beiträge zur Materialtheorie (Heft 4/07), 2007
- [4] Bronstein, Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik; 25. Aufl., B.G. Teubner Verlagsgesellschaft
- [5] Koeller, R. C., *Applications of Fractional Calculus to the Theory of Viscoelasticity*, In: Journal of Applied Mechanics, Vol. 51, June 1984, S. 299-306
- [6] Schwarzl, F.R.: *Polymermechanik*, Springer-Verlag, 1990
- [7] Flügge, W., *Viscoelasticity*, sec. Edition, Springer-Verlag, 1975
- [8] Tobolsky, A., *Mechanische Eigenschaften und Struktur von Polymeren*, Berliner Union Stuttgart, 1967



## **Beiträge zur Materialtheorie**

**Herausgeber: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Lion**

**Universität der Bundeswehr München**

**ISSN 1862-5703**

---

In dieser Reihe sind bisher folgende Hefte erschienen:

- |      |                                                                                |
|------|--------------------------------------------------------------------------------|
| 1/07 | RETKA, J., HÖFER, P.<br>Numerische Simulation aushärtender Klebstoffe          |
| 2/07 | RANZ, T.<br>Ein feuchte- und temperaturabhängiger anisotroper Werkstoff: Holz  |
| 3/07 | THURNER, F., RANZ, T.<br>Rheologisches Verhalten von Holz unter Biegebelastung |
| 4/07 | LION, A.<br>Einführung in die Lineare Viskoelastizität                         |