Besetzungswahrscheinlichkeit

Die Besetzungswahrscheinlichkeit $p(E)$ der Ladungsträger mit der Energie E ist bei einer bestimmten Temperatur T allgemein gegeben durch die Fermi-Verteilung

$$p(E) = f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1}$$

a) Für welche Energien kann diese Verteilung durch die Boltzmann-Verteilung (vgl. Vorlesung) angenähert werden?

Lösung

Die Exponentialfunktion im Nenner wird sehr schnell deutlich größer als 1, denn für Raumtemperatur gilt

$$kT = 8,617 \cdot 10^{-5}\ \text{eV/K} \cdot 293\,\text{K} = 0,02533...\text{eV} \approx 0,025\,\text{eV} \quad (1)$$

Damit erreicht er exponentielle Faktor schon bei einer Energiedifferenz $E_L - E_F = 0{,}125\,\text{eV}$ schon $e^{\frac{E-E_F}{kT}} = e^5 = 148$, an der Leitungsbandkante sind es schon meist deutlich mehr Energiedifferenz, daher kann man schreiben

$$p(E_L) = \frac{1}{e^{\frac{E_L-E_F}{kT}} + 1} \approx e^{-\frac{E_L-E_F}{kT}}$$

Dies ist die sog. Boltzmann-Verteilung.

b) Wie groß ist die Besetzungswahrscheinlichkeit an der Leitungsbandkante für Si ($E_{\text{Gap}} = 1{,}1\,\text{eV}$) bei Raumtemperatur, wenn das Fermi-Niveau E_F in der Mitte des verbotenen Bandes liegt?

Lösung

Der Abstand zwischen Leitungsband und Fermi-Niveau ergibt sich zu:

$$E_L - E_F = \tfrac{1}{2} \cdot E_{Gap} = 0,55\,\text{eV}$$

Für Zustände nahe des Leitungsbandes kann die Fermi-Verteilung angenähert werden durch den Bolzmann-Faktor, also

$$p(E_L) = \frac{1}{e^{\frac{E_L - E_F}{kT}} + 1} \approx e^{-\frac{E_L - E_F}{kT}}$$
$$= \exp\left(-\frac{0{,}55\,\text{eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\frac{\text{J}}{\text{eV}}}{1{,}38 \cdot 10^{23}\,\frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 293\,\text{K}} \right)$$
$$\overset{(1)}{\approx} \exp\left(-\frac{0{,}55\,\text{eV}}{0{,}025\,\text{eV}} \right) = 4 \cdot 10^{-10}$$

c) Der Halbleiter ist nun dotiert, die Zustände der Donatoren liegen energetisch knapp unter der Leitungsbandkante. Das Fermi-Niveau bildet sich dabei in der Mitte zwischen Donator-Niveau und Leitungsbandkante aus. Wie groß ist die Besetzungswahrscheinlichkeit an der Leitungsbandkante bei Raumtemperatur, wenn das Niveau der Donator-Zustände E_D 0,05 eV unter dem Leitungsband liegt?

Lösung

$$E_L - E_F = \tfrac{1}{2}(E_L - E_D) = \tfrac{1}{2} 0{,}05\,\text{eV} = 0{,}025\,\text{eV}$$
$$\Rightarrow \frac{E_L - E_F}{kT} = \frac{0{,}025\,\text{eV}}{0{,}02533\,\text{eV}} = 0.987 \overset{(1)}{\approx} 1$$
$$\Rightarrow \exp\left(\frac{E_L - E_F}{kT} \right) \overset{(1)}{\approx} e^1 = 2{,}7$$

Zum Vergleich wird die Fermi-Verteilung exakt und mit Boltzmann-Näherung gerechtet:

$$p(E_L) = \frac{1}{e^{\frac{E_L - E_F}{kT}} + 1} \overset{(1)}{\approx} \frac{1}{e+1} = \frac{1}{3{,}7} = 0{,}27$$
$$p(E_L) \approx e^{-\frac{E_L - E_F}{kT}} \overset{(1)}{\approx} \frac{1}{e} = 0{,}37$$

Die Näherung passt also auch noch ganz gut, wenn das Fermi-Niveau nahe der Bandkante liegt.

d) Ist der Halbleiter im letzteren Fall n-dotiert oder p-dotiert?

Lösung

Das Dotier-Niveau E_D ist nahe der Leitungsbandkante E_L

⇨ hohe Besetzungswahrscheinlichkeit für Elektronen

⇨ n-dotiert