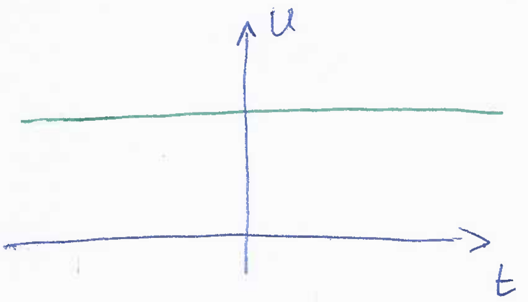
Musterlösung:

Diskrete Fourier-Transformation
– Konstante Spannung –

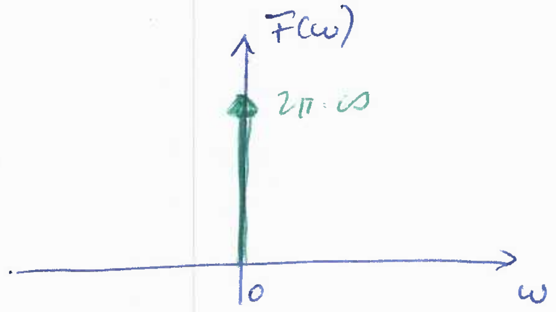
a) $t \to \infty \quad f_a \to \infty$

$\Rightarrow$ kontinuierliche F-Trafo

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1\, e^{-i\omega t}\, dt \overset{\text{vgl. Vorlesung}}{=} \underline{\underline{2\pi\, \delta(\omega)}}$$



$\circ\!\!-\!\!\bullet$

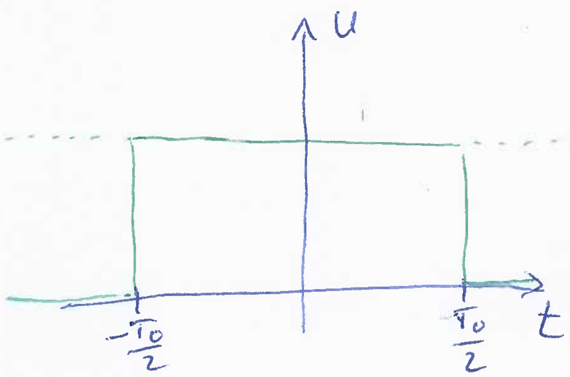


(konstante Spannung/Funktion hat keine Schwingungsfrequenz
$\Rightarrow$ δ-Ftn bei $\omega = 0$!)

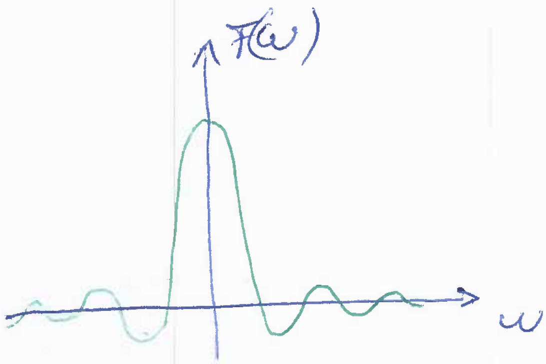
b) $t = \left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right] \quad f_a \to \infty$

$\Rightarrow$ kontinuierliche F-Trafo in Grenzen $-\frac{T_0}{2} \dots \frac{T_0}{2}$

$$F(\omega) = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} 1\, e^{-i\omega t}\, dt = -\frac{1}{i\omega}\left[e^{-i\omega t}\right]_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} = \text{vgl. Vorlesung} = \underline{\underline{T_0\, \frac{\sin\left(\frac{\omega T_0}{2}\right)}{\frac{\omega T_0}{2}}}}$$



$\circ\!\!-\!\!\bullet$



(Begrenzung der "Beobachtungszeit" verbreitert den Frequenzinhalt.
$\Rightarrow$ zur Beschreibung der Rechteckftn werden höhere Frequenzanteile benötigt)

c) $t \to \infty \quad f_a = 500\,\text{Hz}$

$\Rightarrow$ Diskrete F-Trafo unendlich lange

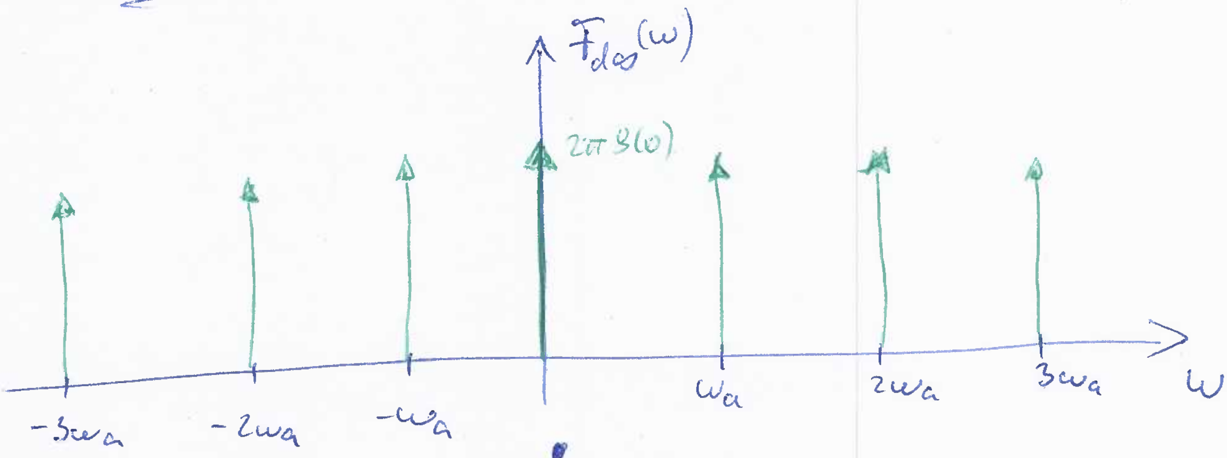
$$\left.\begin{array}{l} t \to nT_a \\ f(t) \to f(n \cdot T_a) \\ e^{-i\omega t} \to e^{-i\omega n T_a} \end{array}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \to \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n \cdot T_a) e^{-i\omega n T_a} = F_{dis}(\omega)$$

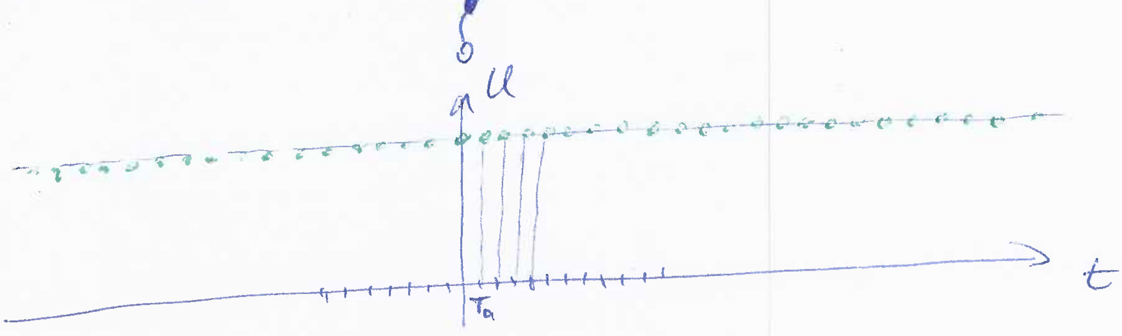
$e^{-i\omega n T_a}$ ist invariant gegenüber Verschiebung um $j \cdot \frac{2\pi}{T_a}$ $j \in \mathbb{Z}$

denn: $e^{-i\omega n T_a} = e^{-in(\omega T_a + j \cdot 2\pi)} = e^{-inT_a(\omega + \underbrace{j \frac{2\pi}{T_a}}_{j \cdot \omega_a})}$

$\Rightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} \ldots$ bleibt erhalten bei Verschiebung um $j \cdot \omega_a$ und ist damit auch Lösung

$\Rightarrow \boxed{F_{dis}(\omega) = F_{dis}(\omega + j\omega_a)}$ $\quad \omega_a = \frac{2\pi}{T_a} = 2\pi \cdot f_a = 3141 \frac{1}{s}$





d) $t \in [-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ $f_a = 500\,Hz$

- Wieviele Abtastpunkte: $N = \frac{T_0}{T_a} = T_0 \cdot f_a = 50ms \cdot 500\frac{1}{s} = \underline{\underline{25}}$
- Worum ergibt sich diskretes Spektrum?

$$F_d(\omega_k) = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} f(nT_a)e^{-i\omega_k n T_a}$$

nur N diskrete Zeitpunkte ⟹ nur N mögliche Frequenzwerte

(sonst wäre es möglich, eine Rück-Transformation vom Frequenzraum in den Zeitbereich durchzuführen, bei der man nachher mehr Abtastpunkte hat wie vorher!
→ Verletzung der Informationserhaltung "Perpetuum mobile" der Information geht nicht)

- In welchem Abstand liegen die diskreten Frequenzwerte?

$\omega_k = N \cdot \Delta\omega$ $N = \frac{T_0}{T_a}$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_a}{N} = \frac{2\pi}{NT_a} = \frac{2\pi}{\frac{T_0}{T_a}T_a} = \underline{\underline{\frac{2\pi}{T_0}}} \quad \text{bzw} \quad \underline{\underline{\Delta f = \frac{1}{T_0}}}$$

(Hängt nur von der Länge T_0 des Beobachtungsfensters ab!)

$\Delta\omega = \frac{2\pi}{50ms} = 125{,}6\frac{1}{s}$ $\Delta f = \frac{1}{50ms} = 20\,Hz$

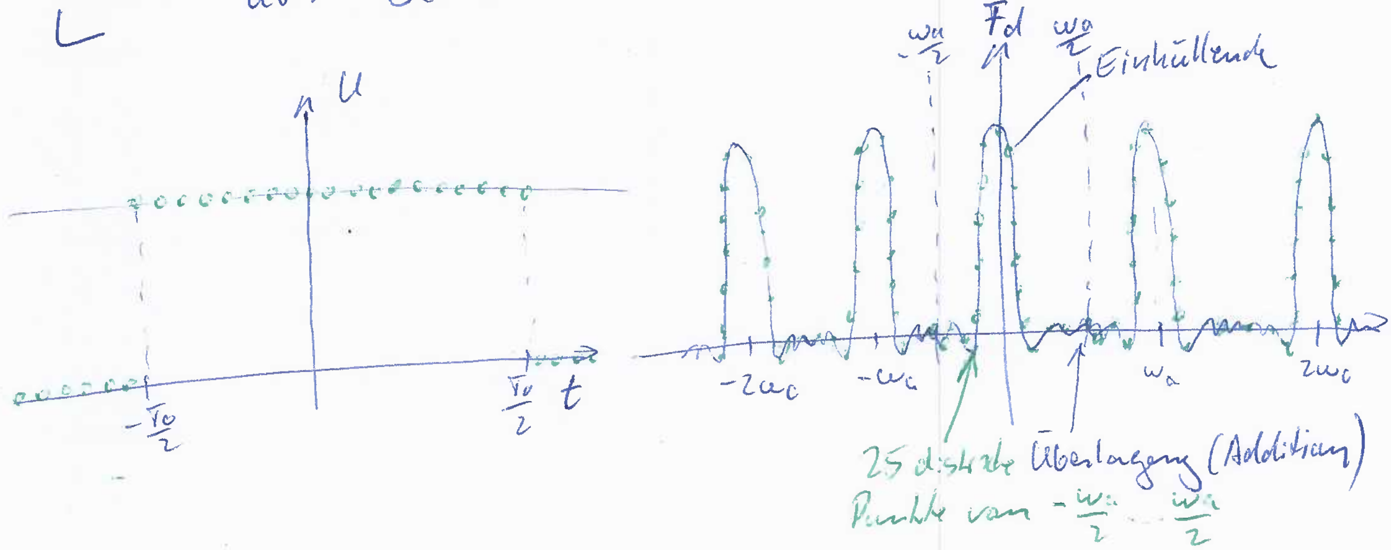
e) Einhüllendes Spektrum ergibt sich aus der kontinuierlichen Trafo, ab mit Überlagerung der sich wiederholenden Spektren mit ω_a

Kontinuierlich ergibt sich (vgl Aufgabe b) auf dem Faltungssatz

$$f(t) = 1 \cdot T(t) \Rightarrow F(\omega) = (2\pi\delta * R)(\omega) \overset{(*)}{=} \underline{2\pi R(\omega)}$$

[Bemerkung (*): $(\delta * R)(\omega) = R(\omega)$ "Faltung mit δ-Fkt"

aber $\delta(\omega) \cdot R(\omega) = R(0)$ "Picken des Fkt-Wertes"]



f) $t = \left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right]$ ($T_0 = 40ms$), $f_a = 500Hz$

$N = T_0 \cdot f_a = 40ms \cdot 500Hz = \underline{20}$ ⇒ Stützstellen ändern sich

Nullstellen der Einhüllenden: $\frac{\omega T_0}{2} = n \cdot \pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T_0} \cdot n = \underline{\Delta\omega \cdot n}$

⇒ Stützstellen liegen genau auf Nullstellen !!!