Abtasttheorem anschaulich

Betrachten Sie ein periodisches Rechtecksignal mit der Periodendauer $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$ wie in Abbildung 1 gestrichelt skizziert.

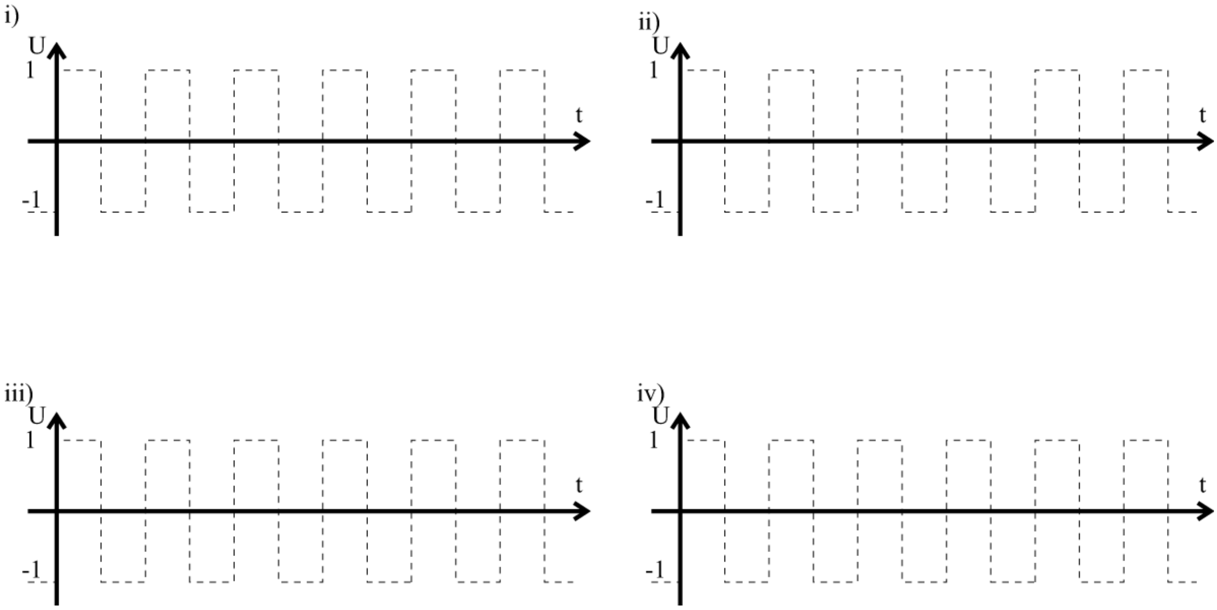


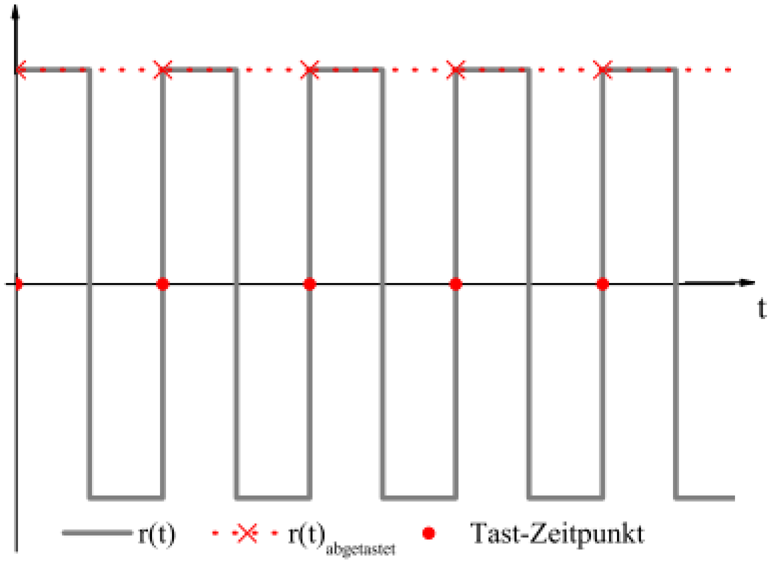
Abbildung 1: Periodisches Rechtecksignal

a) Führen Sie beginnend mit dem Zeitpunkt $t = 0$ *graphisch* eine Digitalisierung des Signals mit den Abtastfrequenzen $f_1 = f_0$, $f_2 = 1.5 \cdot f_0$, $f_3 = 2 \cdot f_0$ und $f_4 = 5 \cdot f_0$ durch.

Lösung

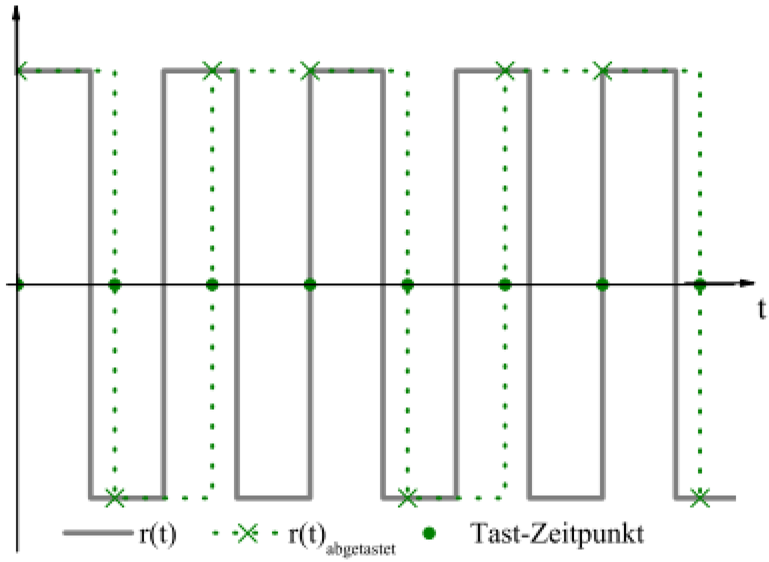
Bemerkung: Die Lösung kann variieren, je nachdem, zu welchen Zeitpunkt die Abtastung einsetzt. Hier setzen wir den ersten Tastpunkt (infinitesimal) knapp NACH dem Zeitpunkt $t = 0$.

$f_1 = f_0 \Rightarrow$ Tastzeitpunkte bei $t = n \cdot T_1 = n \cdot T_0 = n \cdot \frac{1}{f_0}$:



(a) $f_{abt.} = f_0$

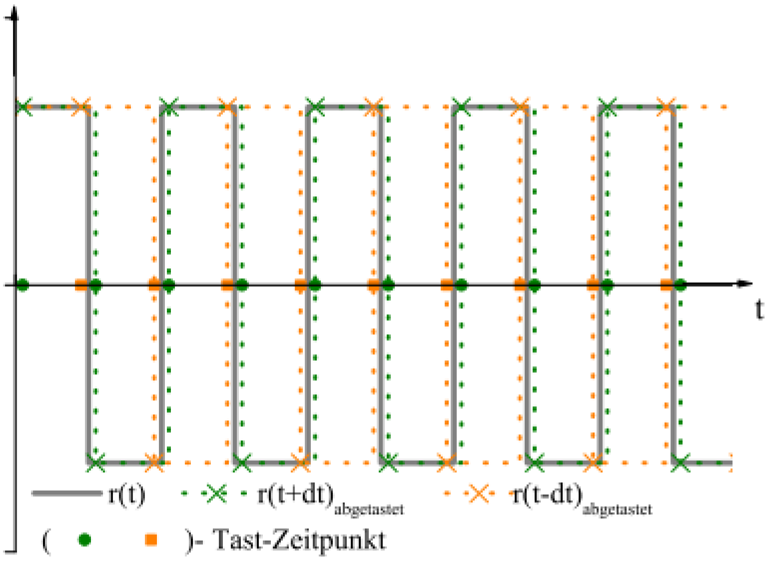
$f_2 = 1.5 f_0 \Rightarrow$ Tastpunkte bei $t = n \cdot T_2 = n \cdot \frac{T_0}{1.5}$:



(b) $f_{abt.} = 1.5 \cdot f_0$

$f_3 = 2 f_0 \Rightarrow$ Tastpunkte bei $t = n \cdot T_3 = n \cdot \frac{T_0}{2}$:

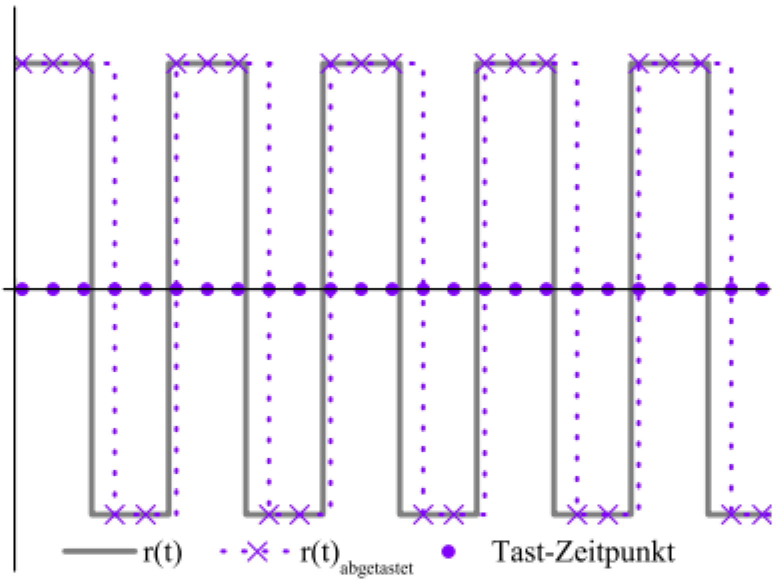
(orange zeigt die Alternative Lösung, falls Abtastung knapp VOR $t = 0$ beginnt)



(c) $f_{abt.} = 2 \cdot f_0$

⇨ Die Grundfrequenz wird zwar richtig wiedergegeben, aber die Phase der periodischen Funktion kann nicht bestimmt werden!

$f_3 = 5 f_0 \Rightarrow$ Tastpunkte bei $t = n \cdot T_5 = n \cdot \frac{T_0}{5}$:



(d) $f_{abt.} = 5 \cdot f_0$

Bei zu geringer Abtastrate bekommt man falsche oder unzureichende Informationen
Erst wenn die Abtastfrequenz größer als die Grundfrequenz ist, kann diese exakt bestimmt werden.

b) Mit welcher Frequenz muss die Funktion mindestens abgetastet werden, um die Grundfrequenz der Funktion richtig wiederzugeben?

Lösung

Die Abtastfrequenz muss MINDESTENS doppelt so groß sein, wie die GRUNDFREQUENZ des periodischen Signals, um die Grundfrequenz korrekt wiederzugeben.

Hinweis: MINDESTENS bedeutet $f_a > 2f_0$, also KEIN Gleichheitszeichen. Beim obigen Beispiel hätte man ein Problem, wenn man genau zum Zeitpunkt $t = 0$ abtasten würde, also genau in der undefinierten Flanke. (Beim Abtasten eines Sinussignals wird das deutlicher: Tastet man nur mit exakt der doppelten Frequenz ab, kann min im ungünstigen Fall genau immer den Nulldurchgang erwischen und somit würde man eine konstante Funktion als Ergebnis bekommen mit $f_0 = 0$!)

Allgemein gilt das **Shannon-Nyquist-Theorem:**

<u>Für periodische Signale wie oben, wenn die Grundfrequenz bestimmt werden soll:</u>
Die Abtastfrequenz muss GRÖSSER als das Doppelte der Grundfrequenz sein, damit die Grundfrequenz richtig gemessen werden kann:

$$f_a > 2f_0$$

<u>Allgemein für beliebige Signale, wenn die komplette Signalform bestimmt werden soll:</u>
Die Abtastfrequenz muss GRÖSSER als das Doppelte der größten im Signal enthaltenen Frequenzkomponente sein, damit der Signalinhalt vollständig bestimmt werden kann.

$$f_a > 2f_{\max}$$

Tatsächlich reicht auch schon das Doppelte der "Bandbreite" (Abstand von minimaler und maximaler, im Signal enthaltenen Frequenzkomponente $f_{\min} - f_{\max}$:

$$f_a > \text{ 2 x Bandbreite = 2 x } \left(f_{\min} - f_{\max}\right)$$

(denn die Frequenzkomponenten außerhalb der Bandbreite tragen nicht zum Signalinhalt bei, der "Frequenzraum" kann auf den wesentlichen Signalinhalt reduziert werden)

Für obiges Beispiel des idealen Rechtecksignals ist die Bandbreite tatsächlich unendlich groß, denn die unendlich steile Flanke des Rechtecks erfordert unendlich viele Frequenzkomponenten A_i und B_i mit $i \to \infty$, also unendlich hohe Frequenzen $i\omega_0 \to \infty$, um das Signal per Fourier-Reihe exakt zu entwickeln. Die Rechteckfunktion kann somit nie exakt abgetastet werden, die GRUNDFREQUENZ dagegen schon, eben mit $f_a > 2f_0$.

Bei einem einfachen Sinussignal dagegen ist die höchste enthaltene Frequenzkomponente die Grundfrequenz selbst.