Faltung von Gauß-Funktionen

Die Antwortfunktion $g(t)$ eines elektronischen Mess-Netzwerks sei eine Gauß-Funktion

$$g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{t^2}{\sigma^2}}$$

Berechnen Sie die Antwort $y(t)$ des Netzwerks, falls Sie einen gauß-förmigen Puls mit Breite σ_p anlegen.

Lösung

Hinweis: Die Antwortfunktion ist gleichbedeutend der Impulsantwort bzw. Gewichtsfunktion. Sie ist die Antwort eines Messgeräts auf einen scharfen δ-Puls. Meist misst man die Antwort $y(t)$, die sich aus der Faltung der Antwortfunktion $g(t)$ und der Eingangssignals (hier $p(t)$) ergibt, und möchte eigentlich wissen, wie $p(t)$ tatsächlich ohne Einfluss des Messgeräts "ausgesehen" hat. Hier soll jedoch nur einfach die Antwort aus Faltung des Eingangssignals $p(t)$ mit der Antwortfunktion $g(t)$ des Messgeräts berechnet werden, also

$$y(t) = (g * p)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{p}(\mathrm{t}-\mathrm{x})\,\mathrm{dx}$$

Die Auswertung dieses Integrals ist ähnlich mühsam wie die Transformation einer einzelnen Gauß-Funktion, die wir bereits in der vorangegangenen Aufgabe erarbeitet haben. Daher nutzen wir den bekannten Zusammenhang, dass eine Gauß-Funktion transformiert wieder eine Gauß-Funktion ergibt. Eine Rücktransformation einer Gauß-Funktion ergibt logischerweise auch wieder eine Gauß-Funktion. Wir lösen daher diese Aufgabe durch Übergang in den Frequenzraum und Verwendung des Faltungssatzes mit anschließender Rücktransformation:

$$y(t) = (g * p)(t) \quad \overset{\text{Faltungssatz}}{\Rightarrow} \quad Y(\omega) = G(\omega) \cdot P(\omega)$$

Mit dem Ergebnis der vorigen Aufgabe (FT(Gauß) = Gauß) erhält man:

$$Y(\omega) = e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}} \cdot e^{-\frac{\omega^2\sigma_p^2}{2}} = e^{-\frac{\omega^2(\sigma^2+\sigma_p^2)}{2}}, \quad \text{setze} \quad \sigma_y = \sqrt{\sigma^2 + \sigma_p^2}$$

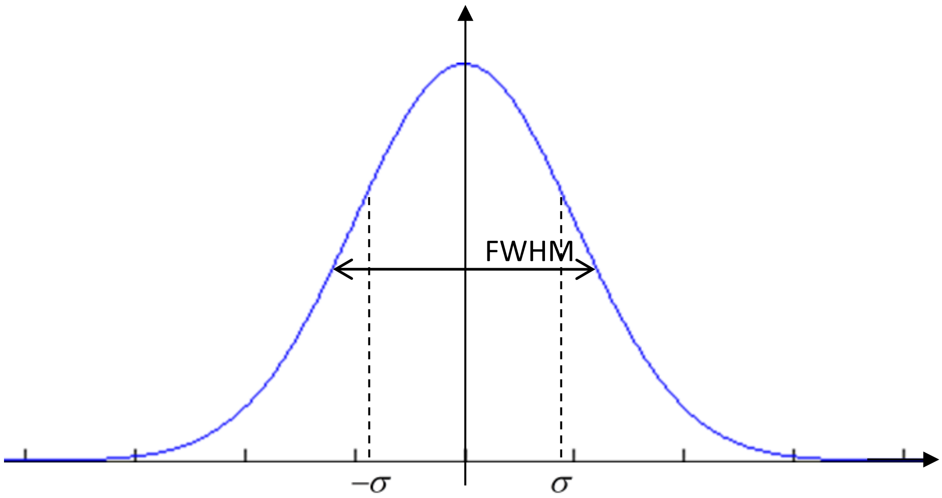
$$Y(\omega) = e^{-\frac{\omega^2\sigma_y^2}{2}} \quad \xrightarrow[\text{(s. vorige Aufgabe)}]{\text{Rücktransformation}} \quad \underline{\underline{y(t) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_y^2}}}}$$

σ^2 = Varianz; σ = Standardabweichung

Die Standardabweichungen ("Breiten") addieren sich also quadratisch ("geometrische Addition" als $\sigma_y = \sqrt{\sigma_g^2 + \sigma_p^2}$, vgl. Gaußsche Fehlerrechnung im Physik-Praktikum). Dies ergibt sich, weil die Gauß-Funktion "invariant gegenüber der Faltung" ist!

Für die Halbwertsbreite FWHM (Full Width at Half Maximum) oder auch „Volle Breite bei halber Höhe“ ergibt sich:

$$\mathrm{FWHM} = 2\sqrt{2\ln(2)}\cdot\sigma \approx 2{,}35\cdot\sigma$$



Alternativer Weg (Auswertung des Integrals):

$$p(t) = \frac{1}{\sigma_p\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{\sigma_p{}^2}}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,p(t-x)\,dx = \frac{1}{2\pi\sigma\sigma_p}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{\sigma^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2-2tx+x^2}{\sigma_p{}^2}}\,dx = \frac{1}{2\pi\sigma\sigma_p}e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{\sigma_p{}^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2\cdot\left(\frac{1}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma_p^2}\right)+x\cdot\frac{t}{\sigma_p^2}}\,dx$$

Nun wird der Exponent nach folgendem Prinzip erweitert:

$$-a^2 - 2ab = -a^2 - 2ab - b^2 + b^2 = -(a+b)^2 + b^2$$

Wir setzen $\sqrt{\frac{1}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma_p^2}}\cdot x = a = \sqrt{\frac{\sigma_p^2+\sigma^2}{2\sigma^2\sigma_p^2}}\cdot x$ und

$$-\frac{t}{\sigma_p^2}\cdot x = 2ab \to b = -\frac{t}{2\sigma_p^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma_p^2+\sigma^2}{2\sigma^2\sigma_p^2}}} = -\frac{t}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sigma_p}\frac{1}{\sqrt{\sigma_p^2+\sigma^2}} \to b^2 = \frac{t^2}{2\left(\sigma_p^2+\sigma^2\right)}\cdot\frac{\sigma^2}{\sigma_p^2}$$

und erhalten für den Exponenten:

$$-x^2\cdot\left(\frac{1}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma_p^2}\right)+x\cdot\frac{t}{\sigma_p^2} = -\left(\sqrt{\frac{\sigma_p^2+\sigma^2}{2\sigma^2\sigma_p^2}}\cdot x - \frac{t}{\sqrt{2}}\frac{\sigma}{\sigma_p}\frac{1}{\sqrt{\sigma_p^2+\sigma^2}}\right)^2 + \frac{t^2}{2\left(\sigma_p^2+\sigma^2\right)}\cdot\frac{\sigma^2}{\sigma_p^2}$$

Damit folgt:

$$y(t)=\frac{1}{2\pi\sigma\sigma_p}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{\sigma_p{}^2}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(\sqrt{\frac{\sigma_p^2+\sigma^2}{2\sigma^2\sigma_p^2}}\cdot x-\frac{t}{\sqrt{2}}\frac{\sigma}{\sigma_p}\frac{1}{\sqrt{\sigma_p^2+\sigma^2}}\right)^2}dx\cdot e^{\frac{t^2}{2\left(\sigma_p^2+\sigma^2\right)}\cdot\frac{\sigma^2}{\sigma_p^2}}$$

Nun substituieren wir:

$$\sqrt{\frac{\sigma_p^2+\sigma^2}{2\sigma^2\sigma_p^2}}\cdot x-\frac{t}{\sqrt{2}}\frac{\sigma}{\sigma_p}\frac{1}{\sqrt{\sigma_p^2+\sigma^2}}\mathrel{\hat{=}}z$$

und damit

$$\frac{dz}{dx}=\sqrt{\frac{\sigma_p^2+\sigma^2}{2\sigma^2\sigma_p^2}}\quad\Rightarrow\quad dx=\sqrt{\frac{2\sigma^2\sigma_p^2}{\sigma_p^2+\sigma^2}}dz$$

Damit ergibt sich:

$$y(t)=\frac{1}{2\pi\sigma\sigma_p}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{\sigma_p{}^2}\right)\cdot\exp\left(\frac{t^2}{2\left(\sigma_p^2+\sigma^2\right)}\cdot\frac{\sigma^2}{\sigma_p^2}\right)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz\cdot\sqrt{\frac{2\sigma^2\sigma_p^2}{\sigma_p^2+\sigma^2}}$$

$$\Rightarrow\quad y(t)=\frac{1}{\pi\sqrt{2\left(\sigma_p^2+\sigma^2\right)}}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{\sigma_p{}^2}\left(1-\frac{\sigma^2}{\sigma_p^2+\sigma^2}\right)\right]\cdot\sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow\quad y(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\sigma_p^2+\sigma^2\right)}}\exp\left(-\frac{t^2}{2\left(\sigma_p^2+\sigma^2\right)}\right)$$

Mit $\sigma_y=\sqrt{\sigma^2+\sigma_p^2}$

$$y(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}e^{-\frac{t^2}{2\sigma_y^2}}$$