Fourier-Transformation einer Gauß-Funktion

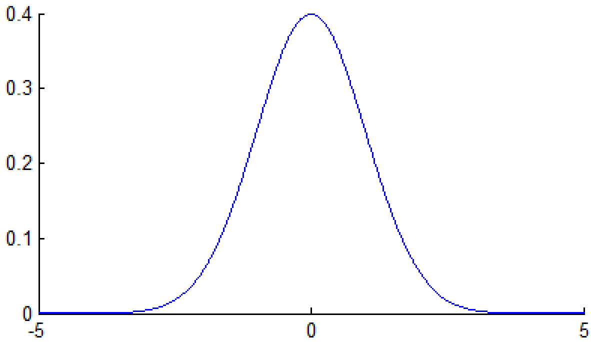
Berechnen und skizzieren Sie die Fourier-Transformierte $G(\omega)$ der normierten Gaußfunktion (Glockenkurve)

$$g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{t^2}{\sigma^2}}$$

mit Standardabweichung σ.
Hinweis: Erweitern Sie den Exponenten in $g(t)$ in geeigneter Weise, sodass Sie auf die Form des unbestimmten Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ kommen.

Lösung

Gauß-Funktion:



$$g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{\sigma^2}}$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{\sigma^2}} \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{\sigma^2} - i\omega t} dt$$

Nun wird der Exponent nach folgendem Prinzip erweitert:

$$-a^2 - 2ab = -a^2 - 2ab - b^2 + b^2 = -(a+b)^2 + b^2$$

Wir setzen $\frac{t}{\sqrt{2}\sigma} = a$ und $i\omega t = 2ab \rightarrow b = \frac{i\omega t}{2a} = \frac{i\omega\sigma}{\sqrt{2}} \rightarrow b^2 = -\frac{\omega^2\sigma^2}{2}$ und erhalten für den Exponenten:

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{\sigma^2} - i\omega t = -\left(\frac{t}{\sqrt{2}\cdot\sigma} + \frac{i\omega\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{\omega^2\sigma^2}{2}$$

Damit folgt:

$$G(\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2}\cdot\sigma} + \frac{i\omega\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2} dt \cdot e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}$$

Nun substituieren wir:

$$\frac{t}{\sqrt{2}\cdot\sigma}+\frac{i\omega\sigma}{\sqrt{2}} \mathrel{\hat{=}} z$$

und damit

$$\frac{dz}{dt}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sigma} \quad\Rightarrow\quad dt=\sqrt{2}\cdot\sigma\, dz$$

Damit ergibt sich:

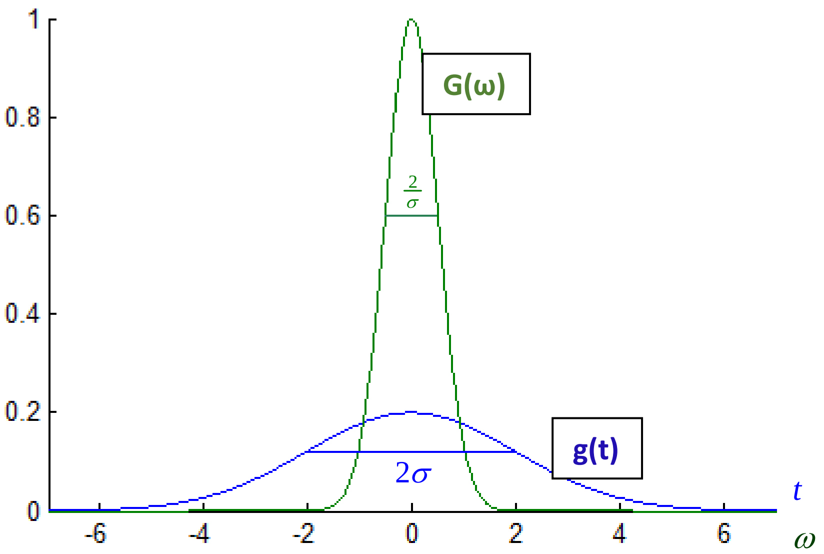
$$G(\omega)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\,dz\cdot\sqrt{2}\cdot\sigma$$

$$\Rightarrow\quad G(\omega)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}\cdot\sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow\quad \underline{\underline{G(\omega)=e^{-\frac{1}{2}\omega^2\sigma^2}}}$$

Graphische Darstellung:

Die Standardabweichung ist proportional zur "Breite" der Glockenkurve (Normalverteilung). die "Öffnung" der Kurve bei halber Höhe des Maximums entspricht etwa $2\cdot\sqrt{2\ln 2}\cdot\sigma \approx 2{,}35\sigma$ (FWHM = Full Width at Half Maximum).
Im Zeitraum ergibt sich die breite blaue Kurve mit der Standardabweichung $\Delta t=\sigma$
Im Frequenzraum ergibt sich die schmale grüne Kurve mit der Standardabweichung $\Delta\omega=\frac{1}{\sigma}$



/>

Die Fourier-Trafo einer Gauß-Kurve mit der Standardabweichung σ ergibt also wieder eine Gauß-Kurve mit der Breite 1/σ.

Zusatzbemerkung:
Die Gauß-Funktion hat in der Physik/Quantenmechanik eine große Bedeutung, da sie Wahrscheinlichkeitsverteilungen bzw. die Unschärfe Δx bei Messungen beschreibt. Der Zusammenhang der Fourier-Transformation gilt für alle korrespondierenden Messgrößen, z.B. Ort/Impuls, Frequenz/Zeit oder äquivalent Energie/Zeit und deren Messungen in einem Experiment und führt zur Heisenbergschen Unschärferelation für jeweils diese korrespondierenden Größen:

$$\sigma_p \sigma_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad \Rightarrow \Delta p \cdot \Delta x \geq h$$

ebenso findet man

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq h \quad \Delta f \cdot \Delta t \geq 1$$