Frequenzgang bzw. Übertragungsfunktion für Hochpass-Messglied

(abgeleitet aus der Fourier-Transformation der Gewichtsfunktion)

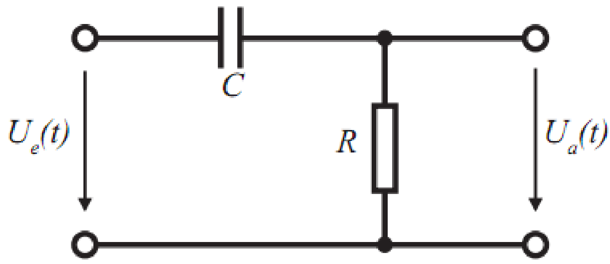

Abbildung 1: Schaltbild eines Hochpass–Messgliedes

Berechnen Sie für den Hochpass aus Abbildung 1 den komplexen Frequenzgang bzw. die Übertragungsfunktion $G(\omega)=U_a(\omega)/U_e(\omega)$ durch Fourier-Transformation der Gewichtsfunktion $g(t)$.

Lösung

Hinweis: Der Frequenzgang („Übertragungs"-Funktion) ist nicht zu verwechseln mit der „Übergangs"-Funktion $h(t)$ (Normierte Sprungantwort).

Die Gewichtsfunktion für den Hochpass lautete:

$$g(t)=\frac{dh(t)}{dt}=\delta(t)-\begin{cases}\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{für} \quad t\geq 0\\ 0 & \text{für} \quad t<0\end{cases}$$

Die **Übertragungsfunktion** gibt an, wie ein Spannungssignal bei einer bestimmten Frequenz übertragen wird.

Die **Fourier-Transformation** geschieht mit Hilfe folgender Formel:

$$\boxed{G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\cdot e^{-i\omega t}dt}$$

$$\Rightarrow \quad G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\cdot e^{-i\omega t}dt-\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\tau}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot e^{-i\omega t}dt$$

(die untere Integrationsgrenze ist 0, da die Gewichtsfunktion für $t<0$ null ergibt)

Damit

$$G(\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-i\omega t} dt}_{\substack{\text{die Integration (Faltung)} \\ \text{mit Delta-Distribution} \\ \text{ergibt} \\ e^{-i\omega 0} = 1}} - \frac{1}{\tau} \cdot \int_{0}^{\infty} e^{-t\left(\frac{1}{\tau} + i\omega\right)} dt$$

$$= 1 - \frac{1}{\tau} \cdot \left[\frac{1}{-\left(\frac{1}{\tau} + i\omega\right)} \cdot e^{-t\left(\frac{1}{\tau} + i\omega\right)} \right]_0^\infty$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + i\omega\tau}(0 - 1)$$

$$= 1 - \frac{1}{1 + i\omega\tau}$$

$$= \underline{\underline{\frac{i\omega\tau}{1 + i\omega\tau}}}$$

$$G(\omega) = \frac{i\omega\tau}{1 + i\omega\tau} \mathrel{\widehat{=}} \text{Frequenzgang Hochpass}$$