Fourier-Transformation Sinus

Berechnen und skizzieren Sie die Fourier-Transformierte $F(\omega)$ von $f(t) = A\sin(\omega_0 t)$

Lösung

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

Eulersche Formel:

$$\boxed{\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ \sin x &= \frac{1}{2i} \cdot \left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \\ \cos x &= \frac{1}{2} \cdot \left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \end{aligned}}$$

Damit folgt:

$$F(\omega) = \frac{A}{2i} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t} \cdot e^{-i\omega t} - e^{-i\omega_0 t} \cdot e^{-i\omega t} dt$$

$$= \frac{A}{2i} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i(\omega_0 - \omega)t} - e^{-i(\omega_0 + \omega)t}\right) dt = \ldots$$

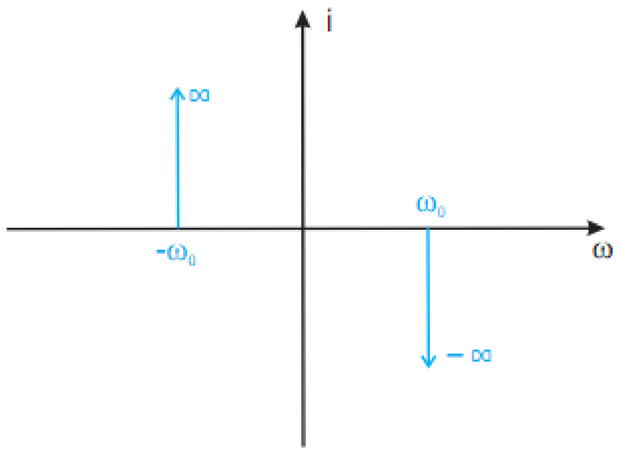
Da die Delta-Distribution wie folgt definiert werden kann (s. Vorlesung):

$$\boxed{\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int e^{i\omega t} dt}$$

ergibt sich:

$$F(\omega) = \frac{A}{2i}\left(2\pi \cdot \delta(\omega_0 - \omega) - 2\pi \cdot \delta(\omega_0 + \omega)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathcal{FT}\left(A \cdot \sin \omega_0 t\right) = A\pi i\left(\delta(\omega_0 + \omega) - \delta(\omega_0 - \omega)\right)}}$$



Wie erwartet, ergibt sich für den Spektralinhalt einer Sinusschwingung genau eine Frequenz im (physikalisch sinnvollen) positiven Wertebereich, denn eine reine Sinusschwingung "schwingt" ja nur mit einer Schwingungsfrequenz. Dass dieser Peak eine imaginäre negative Amplitude hat und sich mathematisch noch ein (imaginär positiver) Peak im negativen Wertebereich ergibt, liegt daran, dass die Fouriertransformation auch noch Informationen über die Phase der Schwingung beinhaltet (vgl. Fouriertransformation der cos-Schwingung zur Übung!).

Dem Delta-Peak kann im Übrigen, obwohl er unendlich hoch ist, eine endliche Stärke zugewiesen werden (vgl. Impulsantwort mit Stärke A als Fläche unter dem Impuls). Diese entspricht also bis auf einen Faktor π der Amplitude der Sinusschwingung im Zeitbereich (π ergibt sich aufgrund der Transformation über die Kreisfrequenz ω anstelle von der Schwingungsfrequenz f).

Die Fouriertrafo ist übrigens additiv. D.h. man erhält man sehr einfach für jede beliebige Summe aus Cosinus- und Sinusanteilen (also auch die Reihenentwicklung der periodischen Rechteckfuntion) eine Summe aus Delta-Peaks bei den entsprechenden Frequenzen.
Beispiel:

$$f(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t) + A_2 \cdot \cos(\omega_2 t) + A_3 \cdot \sin(\omega_3 t)$$