Fourier-Entwicklung periodischer Funktionen (Fourier-Reihe)

Hier als Beispiel: Periodische Rechteckfunktion

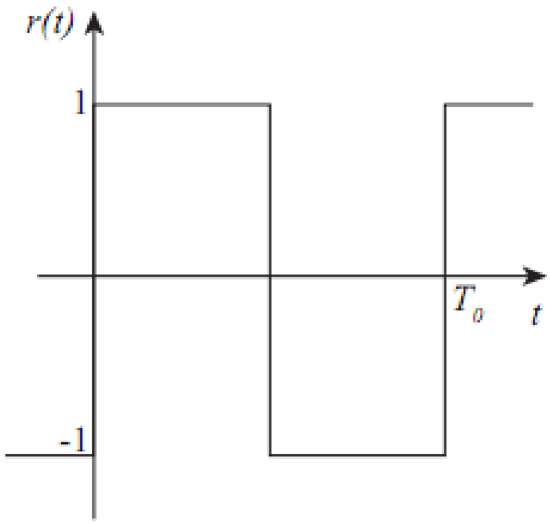


Abbildung 1: Periodische Rechteckfunktion

Betrachten Sie die oben skizzierte periodische Funktion mit der Periodendauer $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$:

$$r(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad t \in \left[k \cdot T_0, \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot T_0 \right[\quad , \quad k \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Siehe auch:
Reelle Fourieranalyse und Fourierreihenentwicklung
Fourierreihenentwicklung für Sägezahnkurve
Fouriertransformation und Fourieranalyse

a) Berechnen Sie für die Fourier-Entwicklung

$$\hat{r}(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + B_n \cdot \sin(n\omega_0 t) \right)$$

mit $\hat{r}(t) = r(t)$, die Fourier-Koeffizienten A_n, B_n für $n \leq 4$.

Lösung

Fourier: $$\boxed{r(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cdot\cos(n\omega_0 t)+B_n\cdot\sin(n\omega_0 t)\right)}$$

Mit

$$\boxed{\begin{aligned}A_n&=\frac{\omega_0}{\pi}\cdot\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} r(t)\cdot\cos(n\omega_0 t)\,dt\\B_n&=\frac{\omega_0}{\pi}\cdot\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} r(t)\cdot\sin(n\omega_0 t)\,dt\end{aligned}}$$

A_0 beschreibt einen Offset nach oben oder unten, der ist hier aber null.
Rechnung (alternativ):

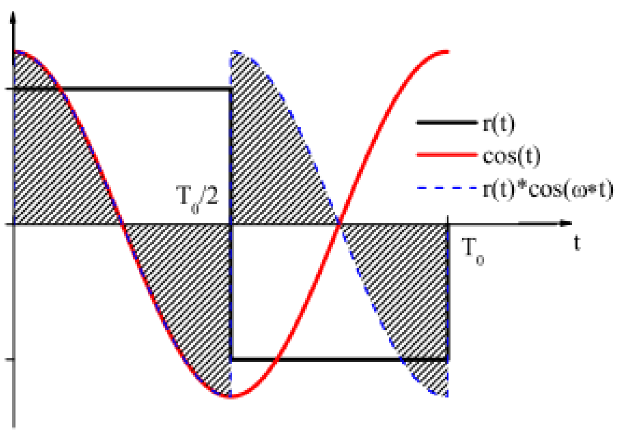
$$A_0=\frac{\omega_0}{\pi}\int r(t)\cdot\cos 0\,dt=0$$

$$A_1=\frac{\omega_0}{\pi}\int \underbrace{r(t)\cdot\cos\omega_0 t}_{\substack{\text{punktsymm. um}\left(\frac{T_0}{2},0\right)\\ \text{(= Mitte des Integrations-}\\ \text{bereichs)}}}\,dt=0$$

Allgemein folgt hier wegen der Punktsymmetrie der integrierten Funktion $r(t)\cdot\cos(\mathrm{n}\,\omega_0 t)$ zur Mitte des Integrationsbereichs (Funktion ist ungerade bezüglich der Mitte des Integrationsbereichs):

$$\underline{\underline{A_n=0}}\quad \text{für alle n}$$

Illustration zur Symmetrie:



Hinweis: B_0 existiert in der obigen Art der Definition der Fourierreihe nicht (somit wäre $B_0 = 0$ falsch!)

$$B_1 = \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} r(t) \cdot \sin(1 \cdot \omega_0 t)\, dt$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} 1 \cdot \sin(1 \cdot \omega_0 t)\, dt + \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \int_{\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{2\pi}{\omega_0}} (-1) \cdot \sin(1 \cdot \omega_0 t)\, dt$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \left[-\frac{1}{\omega_0} \cdot \cos(\omega_0 t) \right]_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} + \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \left[\frac{1}{\omega_0} \cdot \cos(\omega_0 t) \right]_{\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{2\pi}{\omega_0}}$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\cos\pi - (-\cos 0) \right) + \frac{1}{\pi} \cdot \left(\cos 2\pi - \cos\pi \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot (+1+1+1+1) = \underline{\underline{\frac{4}{\pi} = B_1}}$$

$$B_2 = \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} r(t) \cdot \sin(2 \cdot \omega_0 t)\, dt$$

$$= \ldots = \frac{1}{\pi} \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot \cos(2\omega_0 t) \right]_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} + \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \cos(2\omega_0 t) \right]_{\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{2\pi}{\omega_0}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(-\cos 2\pi - (-\cos 0) + \cos 4\pi - \cos 2\pi \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot (-1+1+1-1) = \underline{\underline{0 = B_2}}$$

$$B_3 = \ldots = \frac{1}{3\pi} \cdot \left(-\cos 3\pi - (-\cos 0) + \cos 6\pi - \cos 3\pi \right) = \underline{\underline{\frac{4}{3\pi}}}$$

$$B_4 = \ldots = \underline{\underline{0}}$$

$$\Rightarrow \quad \textit{für } n \le 4: \boxed{r(t) \approx \underbrace{\frac{4}{\pi}}_{B_1} \cdot \sin(\omega_0 t) + \underbrace{\frac{4}{3\pi}}_{B_3} \cdot \sin(3\omega_0 t) + \ldots}$$

b) Skizzieren Sie im Vergleich zu dem originalen Rechteckverlauf die einzelnen Summanden der Reihe, sowie deren Summe $\sum_{n=0}^{4}$ für eine Periode $0 \le t \le T_0$.

Lösung