Hochpass als Differentialoperator

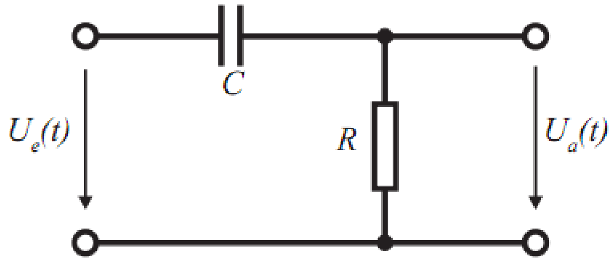

Abbildung 1: Schaltbild eines Hochpass–Messgliedes

Zeigen Sie, dass die CR-Schaltung aus Abb. 1 für kleine Frequenzen eine Differentiation einer zeitlich veränderlichen Eingangsspannung $U_e(t)$ bewirkt.

Lösung

Betrachtet man die Spannung als komplexen Wechselstrom (sinusförmige Anregung), so gilt

$$U_e(t) = U_e(\omega) \cdot e^{i\omega t} \quad ; \quad U_a(t) = \hat{U}_a(\omega) \cdot e^{i(\omega t + \varphi)} = \hat{U}_a(\omega) e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t} = U_a(\omega) \cdot e^{i\omega t}$$

daraus ergibt sich

$$\frac{d}{dt} U_a(t) = \hat{U}_a(\omega) i\omega e^{i(\omega t + \varphi)} = i\omega U_a(t) \text{ also } \underline{\dot{U}_a(t) = i\omega U_a(t)}$$

Für den Hochpass gilt (s. vorangegangene Aufgaben)

$$\begin{aligned} &U_a(t) + \tau \dot{U}_a(t) = \tau \dot{U}_e(t) \\ &U_a(t) + \tau i\omega\, U_a(t) = \tau \dot{U}_e(t) \\ &(1 + \tau\omega i) U_a(t) = \tau \dot{U}_e(t) \end{aligned}$$

Für große Frequenzen ist der Hochpass durchlässig. Betrachtet man kleine Frequenzen, also $\tau\omega \ll 1$, so erhält man

$$1 + \tau\omega i \approx 1$$

Und damit

$$\underline{\underline{U_a(t) = \tau \dot{U}_e(t) = \tau \frac{d}{dt} U_e(t)}}$$

Für kleine Frequenzen wirkt der Hochpass also als Differentialoperator auf die Eingangsspannung, ein Tiefpass als Integrator (vgl. Vorlesung).

Alternative Lösung

Für kleine Frequenzen gilt

$$\tau\omega \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \omega \ll \frac{1}{RC} \quad \Rightarrow \quad R \ll \frac{1}{\omega C} = \left|Z_C\right|$$

daraus ergibt sich

$$U_e(t) = \underbrace{U_R}_{=\left|R\cdot I\right|} + \underbrace{U_C}_{\left|Z_C\cdot I\right|} \approx U_C = \frac{Q}{C}$$

Abgeleitet erhält man

$$\dot{U}_e(t) = \frac{\dot{Q}}{C} = \frac{I}{C} = \frac{U_a}{RC}$$

Also

$$\underline{\underline{U_a(t) = \tau\dot{U}_e(t) = \tau\frac{d}{dt}U_e(t)}}$$