Institut für Angewandte Physik
und Messtechnik
Dr. Werner Egger

Übungen zu Struktur der Materie
Blatt 12

Wasserstoffatom

Betrachten sie ein Wasserstoffatom.

1) Geben Sie die Energie des Grundzustandes und des ersten angeregten Zustands eines Elekrons im Coulombpotential an. Wie hängt die Energie von der Quantenzahl n ab?
2) Welche Wellenlänge hat ein Photon, das beim Übergang des Elektrons vom ersten angeregten Zustand in den Grundzustand emittiert wird?
3) Skizzieren Sie die Wellenfunktion eines Elektrons im Grundzustand $\psi_{100}(r) = exp(-r/a)/\sqrt{(\pi a^3)}$. Hier ist a = 0.0529 nm der Bohrsche Radius.
4) Wie groß ist die Wahrscheinlichtkeit ein Elektron im Grundzustand innerhalb des Bohrschen Radius zu finden?
5) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ein Elektron im Grundzustand innerhalb des Protonenradius R_K = 0.86 fm zu finden?

Moseleysches Gesetz

Bei einem Metall wird im Emissionsspektrum eine K_α-Linie bei einer Energie von 4.5 keV beobachtet. Um welches Metall handelt es sich?

Wichtige Konstanten:

Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante: $\alpha = e^2/ (4\pi\varepsilon_o\, \hbar\cdot c) = 1.44\text{eV}\cdot\text{nm}/197\text{eV}\cdot\text{nm} \approx 1/137$
Rydbergkonstante: $R_y = m_e\cdot e^4/ 2\cdot(4\pi\varepsilon_o\, \hbar)^2 = \alpha^2\cdot m_e c^2/2 = 13.6$ eV

Elementarladung: $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C
Plancksches Wirkungsquantum: $h = 6.63 \times 10^{-34}$ Js
Masse des Elektrons: $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg

① Wasserstoffatom

$$\boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, e^2 = 1{,}44\ \text{eV}\cdot\text{nm}}$$

- Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante: $\alpha \simeq \frac{1}{137} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{\hbar c}$
- Rydbergkonstante: $R_y = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{m e^4}{2\hbar^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \times mc^2 = \frac{1}{2}\alpha^2 mc^2$

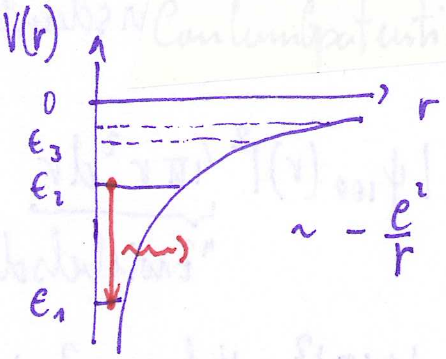
$$\simeq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{137}\right)^2 \times 5{,}11\times 10^5\ \text{eV} \simeq 13{,}6\ \text{eV}$$

- Coulomb-Potential: $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e}{r}$
- potentielle Energie e^-: $-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{r}$

a) $\epsilon_n = -\frac{R_y}{n^2} \propto 1/n^2$

$\epsilon_1 = -13{,}6\ \text{eV}$

$\epsilon_2 = -3{,}4\ \text{eV}$



b) $\lambda_{21} = \frac{hc}{\Delta\epsilon_{21}} = \frac{2\pi\hbar c}{\epsilon_2 - \epsilon_1} = \frac{6{,}28 \times 197\ \text{eV nm}}{10{,}2\ \text{eV}} = 121{,}3\ \text{nm}$

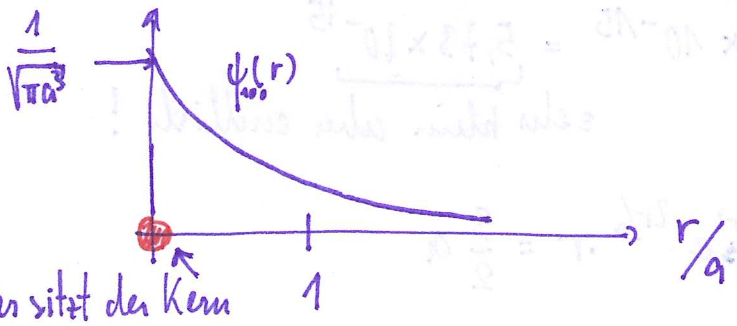
c) Drehimpuls 0 z-Komponente Drehimpuls 0

WF: $\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\, e^{-r/a}$ WF im Grundzustand

Energie ϵ_1 magnetische Quantenzahl

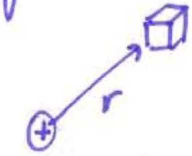
Zustand: $|n, l, m, s\rangle$ $|m| \le l$ $-l, \dots, +l$ $= \underbrace{|1, 0, 0, \pm\tfrac{1}{2}\rangle}_{\text{Grundzustand}}$

Energiequantenzahl n Drehimpulsquantenzahl $l < n$ Spinquantenzahl $\pm\frac{1}{2}$



$|\psi_{100}(0)|^2\, dV \neq 0$!

d) e) $|\psi_{100}(r)|^2 dV$ "Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Abstand r im Volumen dV"

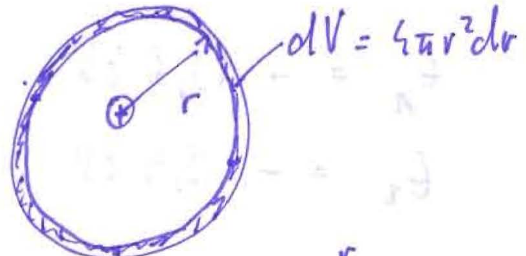


jetzt: Volumselement dV in Kugelkoordinaten

$$= |\psi_{100}(r)|^2 \underbrace{r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi}_{dV}$$

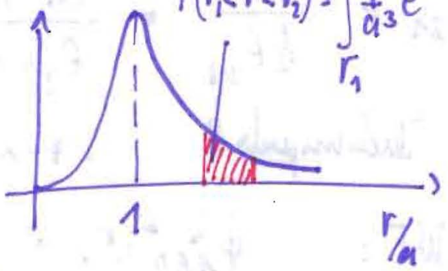
Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Abstand r

$$= |\psi_{100}(r)|^2 \underbrace{4\pi r^2 dr}_{\text{"Zwiebelschale"}}$$



$$= \overbrace{\frac{1}{\cancel{\pi} a^3} e^{-2r/a}}^{|WF|^2} \times \overbrace{4\cancel{\pi} r^2 dr}^{\text{Volumen Zwiebelschale}}$$

$$P(r_1 < r < r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{4}{a^3} e^{-\frac{2r}{a}} r^2 dr$$



• $P(0 \leq r \leq \infty) = 1$

• $P(0 \leq r \leq R) = \int_0^R dr \frac{4r^2}{a^3} e^{-2r/a} = 1 - e^{-2R/a}\left\{1 + 2\frac{R}{a} + 2\frac{R^2}{a^2}\right\}$

d) $R = a$: $P(0 \leq r \leq a) = 1 - e^{-2}\{1+2+2\} = 1 - 5e^{-2} \simeq 0.32 \approx \frac{1}{3}$

e) $R = R_K \approx 0.86 \times 10^{-15} m \ll a = 0.529 \times 10^{-10} m$

$$P(0 \leq r \leq R_K) = \int_0^{R_K} dr \frac{4r^2}{a^3} e^{-2r/a} \simeq \int_0^{R_K} dr \frac{4r^2}{a^3}\left\{1 - \frac{2r}{a}\right\} \simeq \int_0^{R_K} dr \frac{4r^2}{a^3} = \frac{4}{3}\frac{R_K^3}{a^3}$$

$$\simeq \frac{4}{3} \times \left(\frac{0.86}{0.529}\right)^3 \times 10^{-15} = \underbrace{5{,}73 \times 10^{-15}}$$

sehr klein aber endlich!

Erwartungswert von r: $\langle r \rangle = \int_0^\infty dr \frac{4r^2}{a^3} e^{-2r/a} \cdot r = \frac{3}{2} a$

② Moseley

Schalenmodell:

Energiequantenzahl	n	1	2	3	4
Schale		K	L	M	N

K_α-Linien:
Übergänge von L nach K Schale

$$E_{K_\alpha} = R_y (Z-1)^2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2^2}\right) = R_y (Z-1)^2 \cdot \frac{3}{4}$$

Abschirmung Kernladung durch innere Elektronen

$$\rightsquigarrow Z = \sqrt{\frac{4 E_k}{3 R_y}} + 1 = 21 + 1 = 22 \mathrel{\hat{=}} \text{Titan}$$