Institut für angewandte Physik
und Messtechnik
Dr. Werner Egger

Übungen zu Struktur der Materie
Blatt 8

Schwarzkörperstrahlung

Die spektrale Zusammensetzung der Sonnenstrahlung entspricht der eines schwarzen Körpers bei einer Temperatur von 5800 K. Der Radius der Sonne beträgt 696000 km, die mittlere Entfernung zur Erde 1.50×10^8 km.

a) Geben Sie das Plancksche Strahlungsgesetz als Funktion der Wellenlänge λ und der Temperatur T an.

b) Leiten Sie das Wiensche Verschiebungsgesetz $\lambda_{max} \times T = 2898$ µm·K bzw. $\nu_{max} = 2.82\ k_B T$ aus dem Planckschen Strahlungsgesetz ab. Warum ist $\lambda_{max} \times \nu_{max} \neq c$?

c) Bei welcher Wellenlänge λ_{max} strahlt die Sonne am stärksten?

d) Welche Leistung strahlt die Sonne insgesamt ab?

e) Welche Leistung strahlt die Sonne im Wellenlängenbereich $\lambda_{max} \pm 5$ nm ab?

f) Welche Leistung strahlt pro Quadratmeter auf die Erde ein (Solarkonstante)?

Wichtige Begriffe, über die Sie sich im Klaren sein sollten:

Schwarzkörperstrahlung
Schwarzkörpertemperatur
Plancksches Strahlungsgesetz
WienschesVerschiebungsgesetz (für Wellenlänge und Frequenz)
Stefan-Boltzmannsches Strahlungsgesetz

Plancksches Wirkungsquantum: $h = 6.62\times10^{-34}$ J·s
Boltzmannkonstante: $k_B = 1.38\times10^{-23}$ J/K
Stefan-Boltzmannkonstante: $\sigma = 5.67\times10^{-8}$ W/K^4·m^2

a) $\frac{\partial^3 P}{\partial A \cos\theta \, \partial\Omega \, \partial\nu} \equiv \boxed{L(\nu,T) = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}}$

Leistung, die
- von der Fläche dA
- im <u>Frequenzbereich</u> $d\nu$
- in den Raumwinkel $d\Omega$
- in Richtung θ

abgestrahlt wird

$$L(T) = \int_0^\infty L(\nu,T)\, d\nu = \int_\infty^0 L(\nu(\lambda),T) \frac{d\nu}{d\lambda} d\lambda$$

$$\boxed{\begin{aligned} \nu = \nu(\lambda) &= \frac{c}{\lambda} \\ d\nu &= -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda \end{aligned}} \quad = - \int_0^\infty \underbrace{L(\nu(\lambda),T)\left(-\frac{c}{\lambda^2}\right)}_{-L(\lambda,T)} d\lambda$$

$$\rightsquigarrow \boxed{L(\lambda,T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}}$$

Leistung, die
- von der Fläche dA
- im <u>Wellenlängenbereich</u> $d\lambda$
- in den Raumwinkel $d\Omega$
- in Richtung θ

abgestrahlt wird

b) $\ln L(\lambda,T) = \ln 2hc^2 - 5\ln\lambda - \ln\left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1\right)$

$$\frac{d \ln L(\lambda,T)}{d\lambda} \stackrel{!}{=} \frac{dL(\lambda,T)}{L(\lambda,T)\, d\lambda} = 0 \iff \frac{dL(\lambda,T)}{d\lambda} = 0$$

$$\stackrel{!}{=} \left\{ -\frac{5}{\lambda} - \frac{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \cdot \left(-\frac{hc}{\lambda^2 kT}\right) \right\}$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{kT}{hc} \left\{ -5 \frac{hc}{\lambda kT} + \frac{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \cdot \frac{h^2 c^2}{\lambda^2 k^2 T^2} \right\}$$

$\frac{hc}{\lambda kT} \equiv x$

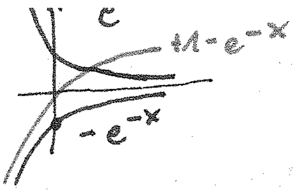
$$\stackrel{!}{=} \frac{kT}{hc} \underbrace{\left\{ -5x + \frac{e^x \cdot x^2}{e^x - 1} \right\}} = 0$$

$$-5 + \frac{e^x \cdot x}{e^x - 1} = 0$$

$$-5(e^{x}-1)+xe^{x}=0$$

$$-5e^{x}+5+xe^{x}=0$$

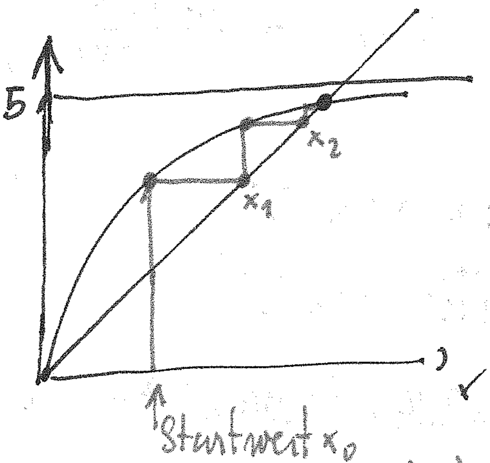
$$-5+5e^{-x}+x=0$$



$$\boxed{x=5(1-e^{-x})}$$

Lösung

1. graphisch:



x
4
4.90842
4.96308
4.96504
4.96511...
4.96511...

2. numerisch:

$$x_{n+1}=5(1-e^{-x_n})$$

$$x=4.965=\frac{hc}{\lambda_{max}\cdot kT}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda_{max}\cdot T &= 1/4.965\,\frac{hc}{k}\\ \lambda_{max}\cdot T &= 0.289\ \mathrm{cm\cdot K}\end{aligned}}$$

Wiensches Verschiebungsgesetz

analog:

$$\ln L(\nu,T)=\ln\frac{2h}{c^2}+3\ln\nu-\ln\left(e^{\frac{h\nu}{kT}}-1\right)$$

$$\frac{d}{d\nu}L(\nu,T)=\left\{\frac{3}{\nu}-\frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\cdot\frac{h}{kT}\right\}=0\Leftrightarrow\left\{3-\frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\cdot\frac{h\nu}{kT}\right\}=$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{h\nu}{kT}\equiv x \qquad 3-\frac{e^{x}}{e^{x}-1}\cdot x=0$$

$$3e^{x}-3-x\cdot e^{x}=0\quad\Big|\,e^{-x}$$

$$3-3e^{-x}-x=0$$

$$\boxed{x=3(1-e^{-x})}$$

x
3
2.85064
2.82637
2.82236
2.82160
2.82146

Lösung: $x=2.821=\frac{h\nu_{max}}{kT}$

$$\boxed{\begin{aligned}\nu_{max}&=2.821\cdot\frac{k}{h}\cdot T\\ h\nu_{max}&=2.821\cdot kT\end{aligned}}$$

c) $T = 5800\,K$

(Wien) $\lambda_{max} \cdot T = 0.289\ cm \cdot K = 2.89 \times 10^6\ nm \cdot K$

$$\lambda_{max} = \frac{2.89 \times 10^6\ nm \cdot \cancel{K}}{5800\ \cancel{K}} = 498\ nm \simeq 500\ nm$$

d) $P = A \times \sigma \times T^4$ (Stefan-Boltzmann)

$$= 4\pi R^2 \times \sigma \times T^4$$

$$= 4 \times 3.14 \times (6.94 \times 10^8\,m)^2 \times 5.67 \times 10^{-8}\ W \cdot m^{-2} K^{-4} \times (5800\,K)^4$$

$$= 3.9 \times 10^{26}\ W$$

e) Leistung, die im Wellenlängenintervall $d\lambda$ von der Fläche dA in den Halbraum abgestrahlt wird:

$$\int_{HR} d\Omega\ L(\lambda,T) \cos\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin\theta \cos\theta\, L(\lambda,T)$$

Lambert-Strahler

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} d\sin\theta \cdot \sin\theta\, L(\lambda,T)$$

$$= 2\pi \int_0^1 d\eta \cdot \eta\, L(\lambda,T) = 2\pi \left.\frac{\eta^2}{2}\right|_0^1 L(\lambda,T)$$

$$= \pi\, L(\lambda,T)$$

$$P = 4\pi R^2 \cdot \pi \int_{\lambda_{max}-\Delta\lambda}^{\lambda_{max}+\Delta\lambda} L(\lambda,T)\, d\lambda \simeq 4\pi R^2 \pi\, L(\lambda_{max},T) \cdot 2\Delta\lambda$$

$$\left(= 4\pi R^2 \times \pi \times 2hc^2 \times \left(\frac{kT}{hc}\right)^5 \times \left(\frac{hc}{kT\lambda_{max}}\right)^5 \times \frac{2\Delta\lambda}{e^{\frac{hc}{kT\lambda_{max}}} - 1} \right.$$

$$\left. = 4\pi R^2 \times \pi \times 2hc^2 \times \left(\frac{kT}{hc}\right)^5 \times (4.965)^5 \times \frac{2\Delta\lambda}{e^{4.965} - 1} \right)$$

↓

$$P \simeq 4\pi R^2 \times \pi \times \frac{2hc^2}{\lambda_{max}^5} \times \frac{2\Delta\lambda}{e^{\frac{hc}{\lambda_{max} kT}} - 1}$$

$$[ET^{-1}] = [L^2] \times [ET \cdot L^2 T^{-2} \cdot L^{-5}] \times [L] \quad \checkmark$$

$$\left(\frac{1}{\lambda_{max}}\right)^5 = \left(\frac{1}{5 \times 10^{-7}\,m}\right)^5 = 3.2 \times 10^{+31}\, m^{-5}$$

$$e^{\frac{hc}{\lambda_{max} kT}} = e^{4.965} \simeq 1.43 \times 10^2$$

$$\frac{1}{e^{4.965} - 1} \simeq 7.0 \times 10^{-3}$$

$$P \simeq 4 \times 3.14 \times 6.94^2 \times 10^{16} \times 3.14 \times 2 \times 6.6 \times 10^{-34} \times 9 \times 10^{16} \times 3.2 \times 10^{+31} \times 7 \times 10^{-3} \times 2 \times 5 \times 10^{-8}\ W$$

$$\cancel{P \simeq 4 \times 3.14 \times 6.94^2 \times 3.14 \times 2 \times 6.6 \times 10^{-34} \times 9 \times 10^{16} \times 2 \times 3.2 \times 10^{-39} \times 7.0 \times 10^{-3} \times 5.0 \times 10^{-8}}$$

$$\cancel{\simeq 4 \times 3.14^2 \times 6.94^2 \times 4 \times 9 \times 6.6 \times 3.2 \times 7 \times 5}$$

$$= \underbrace{3.14^2 \times 6.94^2 \times 6.6 \times 3.2 \times 4 \times 2 \times 9 \times 7}_{} \times 10^{16} \times 10^{-34} \times 10^{16} \times 10^{+31} \times 10^{-3} \times 10^{-8}\ W$$

$$= 5.0 \times 10^6 \times 10^{+18}\ W \simeq 5.0 \times 10^{+24}\ W$$

$\widehat{=}$ 1.3% der totalen Strahlungsleistung!

f) $P_s = 3.9 \times 10^{26}\ W$

$$S = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi d_{ES}^2} = \frac{3.9 \times 10^{26}\ W}{4 \times 3.14 \times 150^2 \times 10^{22}\ m^2} = 1.38\ kW/m^2$$

Wie errechnet sich die gesamte auf die Erde einfallende Strahlung?

$$P = A_E \times S = \pi \times R_E^2 \times S$$

↑ !