Institut für angewandte Physik
und Messtechnik
Dr. Werner Egger

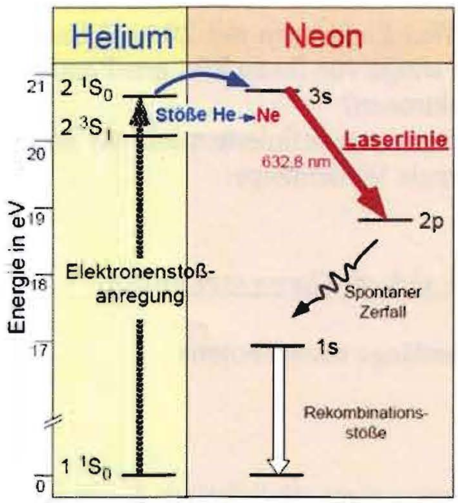
Übungen zu Struktur der Materie
Blatt 7

Energie & Wellenlängen

1. Berechnen Sie für die folgenden Wellenlängen Frequenz und Energie der Photonen:

Wellenlängenbereich	Wellenlänge	Frequenz / Hz	Energie / eV	Energie / J
Rundfunk (UKW)	2 m	1.5×10^{8}	6.2×10^{-7}	9.9×10^{-26}
Mikrowellen (Radar)	5 mm	6.0×10^{10}	2.5×10^{-4}	4.0×10^{-23}
Infrarotstrahlung	2 µm	1.5×10^{14}	6.2×10^{-1}	9.9×10^{-20}
Sichtbares Licht	500 nm	6.0×10^{14}	2.5×10^{-1}	4.0×10^{-20}
UV-Strahlung	200 nm	1.5×10^{15}	6.2	9.9×10^{-19}
Röntgenstrahlung	0.5 nm	6.0×10^{18}	2.5×10^{3}	4.0×10^{-16}
Gammastrahlung	0.2 pm	1.5×10^{21}	6.2×10^{6}	9.9×10^{-13}

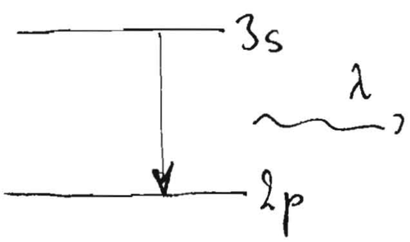
Laser & Besetzungszahlen



Optik, Licht und Laser, D. Meschede, 2. Aufl., Kap.7 © 2005 B.G. Teubner / GWV

2. Die Wellenlänge $\lambda_{3s \to 2p}$ der roten Laserlinie eines He-Ne Lasers (*L*ight *A*mplification by *S*timulated *E*mission of *R*adiation) für den Übergang 3s → 2p (siehe Bild) beträgt 632,8 nm.
   a) Berechnen Sie die Energie des Photons.
   b) Wie groß ist das Verhältnis der Anzahl der Ne-Atome die sich bei einer Temperatur von 300 K im Zustand 3s (Besetzungszahl des Zustandes 3s) befinden, zu der Anzahl von Ne-Atomen im Zustand 2p (Besetzungszahl des Zustandes 3p)?
   c) Welche Bedingung müssen die Besetzungszahlen von 3s-Zustand und 2p-Zustand erfüllen, damit man einen Laser mit der Wellenlänge 632,8 nm betreiben kann?

2



Besetzungszahl im thermischen Gleichgewicht

$$n_i \propto e^{-\epsilon_i/kT}$$

bzw: $n_i = n_j \, e^{-(\epsilon_i - \epsilon_j)/kT} = n_j \, e^{-\Delta\epsilon_{ij}/kT}$

a) $\Delta\epsilon = \epsilon_{3s} - \epsilon_{2p} = \dfrac{hc}{\lambda} = \dfrac{2\pi \hbar c}{\lambda} = \dfrac{6.28 \times 197 \text{ eV.nm}}{632{,}8 \text{ nm}} \simeq 1.96 \text{ eV}$

b) $\dfrac{n_{3s}}{n_{2p}} = \dfrac{e^{-\epsilon_{3s}/kT}}{e^{-\epsilon_{2p}/kT}} = e^{-(\epsilon_{3s}-\epsilon_{2p})/kT} = e^{-\Delta\epsilon/kT}$

mit $kT \overset{300K}{=} \dfrac{1}{40} \text{ eV} = 0.025 \text{ eV}$

$$\frac{n_{3s}}{n_{2p}} = e^{-1.96 \times 40} = e^{-78.4} \simeq 9 \times 10^{-35}$$

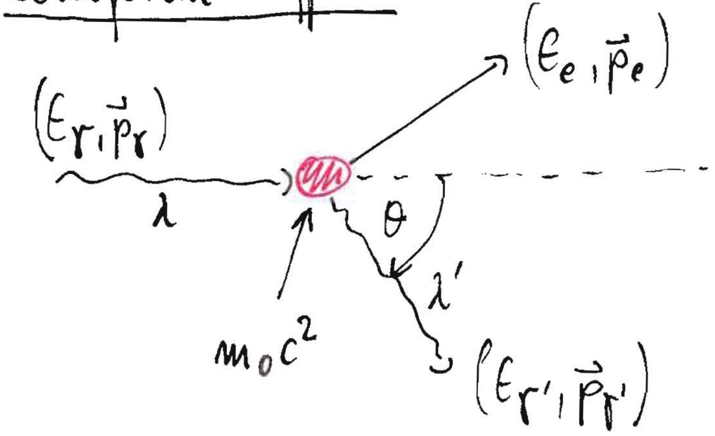
$\rightsquigarrow$ n_{3s} im thermischen Gleichgewicht bei RT ("leer") unbesetzt

c) Besetzungszahlinversion:

$$n_{3s} > n_{2p}$$

a) Compton-Effekt

③



$$\boxed{\begin{aligned} E_\gamma + m_0 c^2 &= E_{\gamma'} + E_e \\ \vec{p}_\gamma &= \vec{p}_{\gamma'} + \vec{p}_e \end{aligned}}$$

$$E_e^2 = m_0^2 c^4 + \vec{p}_e^{\,2} c^2$$

$$\text{I:} \quad E_e^2 = (E_\gamma - E_{\gamma'} + m_0 c^2)^2$$

$$= \cancel{E_\gamma^2} + \cancel{E_{\gamma'}^2} + m_0^2 c^4 + 2 E_\gamma m_0 c^2 - 2 E_{\gamma'} m_0 c^2 - 2 E_\gamma E_{\gamma'}$$

$$\text{II:} \quad \vec{p}_e^{\,2} c^2 = (\vec{p}_\gamma - \vec{p}_{\gamma'})^2 c^2 = \vec{p}_\gamma^{\,2} c^2 + \vec{p}_{\gamma'}^{\,2} c^2 - 2 \vec{p}_\gamma \cdot \vec{p}_{\gamma'} c^2$$

$$= \vec{p}_\gamma^{\,2} c^2 + \vec{p}_{\gamma'}^{\,2} c^2 - 2 |\vec{p}_\gamma| c \, |\vec{p}_{\gamma'}| c \cdot \cos\theta$$

$$= \cancel{E_\gamma^2} + \cancel{E_{\gamma'}^2} - 2 E_\gamma \cdot E_{\gamma'} \cdot \cos\theta$$

$$\text{I} - \text{II} \quad m_0^2 c^4 = m_0^2 c^4 + 2 m_0 c^2 (E_\gamma - E_{\gamma'}) - 2 E_\gamma E_{\gamma'} (1 - \cos\theta) \quad \Big| : 2 m_0 c^2$$

$$0 = E_\gamma - E_{\gamma'} - \frac{E_\gamma E_{\gamma'}}{m_0 c^2} (1 - \cos\theta)$$

$$E_\gamma = E_{\gamma'} \left(1 + \frac{E_\gamma}{m_0 c^2} (1 - \cos\theta) \right)$$

$$\rightarrow \boxed{E_{\gamma'} = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{m_0 c^2} (1 - \cos\theta)}} \quad *$$

oder

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} \left(1 + \frac{hc}{\lambda m_0 c} (1 - \cos\theta) \right) \quad \Big| \cdot \frac{\lambda \lambda'}{hc}$$

$$\rightarrow \boxed{\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos\theta)}$$

$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}$: Compton-Wellenlänge des Elektrons: e^- kann nicht genauer lokalisiert werden (Paarerzeugung usw..)

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = 2\pi \frac{\hbar}{m_0 c} = 2\pi \frac{\hbar c}{m_0 c^2} = \frac{6.28 \times 197\ eV \cdot nm}{511 \times 10^3\ eV}$$

$$= 2.42 \times 10^{-12}\ m$$

$$= 2.42\ pm$$

$$= 2\pi \times \frac{\hbar c}{e^2} \times \frac{e^2}{m_e c^2} = 2\pi \left(\frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}{e^2}\right) \times \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2}\right)$$

$$\boxed{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} = 1{,}44\ eV \cdot nm}$$

$$= 1{,}44\ MeV \cdot fm$$

$$= 2\pi \times \frac{1}{\alpha} \times r_e$$

$r_e = 2.8 \times 10^{-15}\ m = 2.8\ fm$
klassischer e^--Radius

$\alpha = \frac{1}{137}$

Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante

$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2$

Thompsonscher Streuquerschnitt

b) aus * mit $\cos\theta = 0 \rightsquigarrow \quad \epsilon_\gamma' = \frac{\epsilon_\gamma}{1 + \frac{\epsilon_\gamma}{m_0 c^2}}$

für $\frac{\epsilon_\gamma}{m_0 c^2} \ll 1$

$$\epsilon_\gamma' \simeq \epsilon_\gamma \left(1 - \frac{\epsilon_\gamma}{m_0 c^2}\right)$$

c) $$\epsilon_{kin} = \sqrt{\epsilon_e^2 - m_0^2 c^4} = \sqrt{(\epsilon_\gamma - \epsilon_{\gamma'})^2} = \epsilon_\gamma - \epsilon_{\gamma'}$$

$$\overset{\cos\theta = 0}{=} \epsilon_\gamma \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\epsilon_\gamma}{m_0 c^2}}\right) = \epsilon_\gamma \left(\frac{\cancel{1} + \frac{\epsilon_\gamma}{m_0 c^2} - \cancel{1}}{1 + \frac{\epsilon_\gamma}{m_0 c^2}}\right) = \epsilon_\gamma \cdot \frac{\epsilon_\gamma}{m_0 c^2 + \epsilon}$$

Comptoneffekt

3. Ein Photon der Energie E wird an einem ruhenden freien Elektron gestreut.
   a) Leiten Sie aus Energie- und Impulserhaltung (relativistische Betrachtung!) die Energie des gestreuten Photons als Funktion des Streuwinkels θ und der Energie des einfallenden Photons her.
   b) Berechnen Sie die Energie des gestreuten Photons für einen Streuwinkel von θ=90° und einfallende Photonen mit den Energien aus Aufgabe 1) und tragen Sie die Ergebnisse in die untenstehende Tabelle ein.
   c) Berechnen Sie die kinetische Energie des Elektrons nach dem Stoß und tragen Sie die Ergebnisse in die untenstehende Tabelle ein.

Energie des einfallenden Photons / eV	**Energie des gestreuten Photons / eV für ϑ=90°**	**Kinetische Energie des Elektrons / eV**
6.2×10^{-7}	$\simeq 6.2 \times 10^{-7}$	$\simeq 7.5 \times 10^{-19}$
2.5×10^{-4}	$\simeq 2.5 \times 10^{-4}$	$\simeq 1.2 \times 10^{-13}$
6.2×10^{-1}	$\simeq 6.2 \times 10^{-1}$	$\simeq 7.5 \times 10^{-7}$
2.5×10^{-1}	$\simeq 2.5 \times 10^{-1}$	$\simeq 1.2 \times 10^{-7}$
6.2	$\simeq 6.2$	$\simeq 7.5 \times 10^{-5}$
2.5×10^{3}	2.488×10^{3}	12
6.2×10^{6}	4.7×10^{5}	5.7×10^{6}

Bremsstrahlung

4. In einer Röntgenröhre treffen Elektronen mit 20 keV Energie auf ein Target. Beim Abbremsen im Target senden einige von ihnen Röntgen-Photonen aus.
   a) Warum strahlen die Elektronen?
   b) Warum haben die Photonen eine definierte minimale Wellenlänge?
   c) Berechnen sie die minimale Wellenlänge.

Wichtige Begriffe, über die Sie sich im Klaren sein sollten:

Zusammenhang Energie-Wellenlänge eines Photons
Boltzmannfaktor
Besetzungszahl
Besetzungszahlinversion
Energie- und Impulserhaltungssatz nicht relativistisch & relativistisch
Zusammenhang Energie-Impuls für Photonen

③ ④

a) Beschleunigte Ladungen strahlen!

b) ~~wird die gesamte Energie beim Abbremsen abgegeben in Strahlung ...~~
Ladung kann beim Abbremsen maximal gesamte Energie abgeben $\rightsquigarrow$ kürzeres λ geht nicht, da $E \sim \frac{1}{\lambda}$

c) $$E_{max} = \frac{hc}{\lambda_{min}} \rightarrow \lambda_{grenz} = \frac{2\pi\hbar c}{eU} = \frac{6.28 \times 197 \cancel{eV} \cdot nm}{20 \times 10^3 \cancel{eV}}$$

$$= 62 \text{ pm}$$

Möglichkeit $\hbar$ zu messen:
messe λ_{grenz} bei bekanntem $U \rightsquigarrow \hbar$