3. Strömung und Felder

3.1 Felder

Definition: Ein Feld ist die Verteilung einer physikalischen Größe, die zu jedem Zeitpunkt t an jedem Ort $\vec{r}$ definiert ist.

skalares Feld:

$\Rightarrow$ jedem Punkt wird ein Skalar zugeordnet

z.B.: Temperatur $T(\vec{r},t)$

Teilchendichte $n(\vec{r},t)$

Gravitationspotential $\varphi_G(\vec{r},t)$

elektrostatisches Potential $\varphi_E(\vec{r},t)$

Vektorfeld:

$\Rightarrow$ jedem Punkt wird ein Vektor zugeordnet

z.B.: Steigung

Geschwindigkeit einer Strömung $\vec{v}(\vec{r},t)$

Gravitationsfeld $\vec{a}(\vec{r},t)$

elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r},t)$

Bsp.: Topologie auf der Erdoberfläche u

- Höhenlinien: Orte gleicher Höhe

  ↳ Feldlinien der Topologie

- Abstand der Höhenlinien definiert Steigung, also Stärke der Topologie

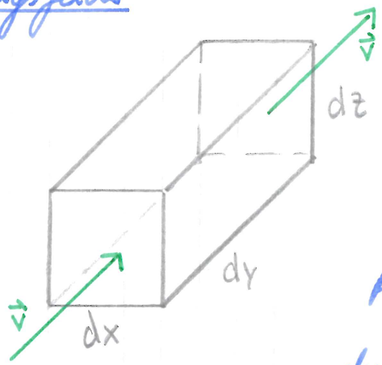
  ↳ $\operatorname{grad} u = \left(\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}\right)$ (Vektorfeld)

  ist die Steilheit

  $\rightarrow$ Größe und Richtung der maximalen Steigung

3.2 Strömungsfelder

$A = dx \cdot dz$



- $\vec{v}$ ist Vektorfeld
- In der Zeit dt schiebt sich durch die Geschwindigkeit $\vec{v}$ ein Flüssigkeitsvolumen von $A \cdot v \cdot dt$ mit der Masse $\rho \cdot A \cdot v\, dt$ durch

3.2.1. Fluß

Der Fluß beschreibt die durchtretende Flüssigkeitsmenge pro Zeit dt

$$\phi = \frac{m}{dt} = \frac{\rho \cdot A \cdot v \cdot dt}{dt} = \rho \cdot A \cdot v$$

Allgemein: $\phi = \int \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int \vec{j}\, d\vec{A}$

$\vec{j}$ heißt Stromdichte

z.B.: $\vec{j} = \rho \vec{v}$ Massenstromdichte

$\vec{j} = n \vec{v}$ Teilchenstromdichte

$\vec{j} = n \cdot e \cdot \vec{v}$ elektrische Stromdichte

3.2.2 Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung beschreibt den Fluß durch eine geschlossene Fläche, wenn keine Quellen und Senken vorhanden sind.

$$\boxed{\phi = \oiint_{\text{geschl. Fläche}} \vec{j} \cdot d\vec{A} = 0}$$

Konvention: Bei einer geschlossenen Fläche zeigt $d\vec{A}$ nach Außen

3.2.3 Gauß'scher Satz

Der Gauß'sche Satz beschreibt den Fluß durch eine geschlossene Fläche, falls Quellen und Senken vorhanden sind.

$$\boxed{\phi = \oiint \vec{j}\, d\vec{A} = \iiint_V \rho \operatorname{div} \vec{v}\, dV}$$

$\Rightarrow$ Massenänderung, Teilchenänderung, Ladungsänderung

3.2.4 Quellen und Senken

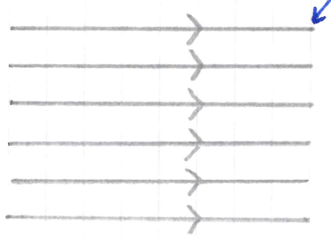
Ausgangspunkt (Quelle) und Endpunkt (Senke) von Strömungen

$$\operatorname{div} \underset{\substack{\text{beliebiges}\\ \text{Vektorfeld}}}{\vec{F}(\vec{r})} = \underset{\text{Quelldichte}}{q(\vec{r})} \quad = \begin{cases} >0 & \text{Quelle} \\ =0 & \text{Quellfrei} \\ <0 & \text{Senke} \end{cases}$$

3.3. Strömungstypen

- Stationäre Strömung: $\frac{dv}{dt} = 0$ und $\frac{dA}{dt} = 0$

  ⇒ Teilchen bewegen sich auf zeitlich gleichbleibenden Stromlinien



↙ Strombahn: Richtung der Strömung

→ Stromlinie: Änderung der Geschwindigkeit

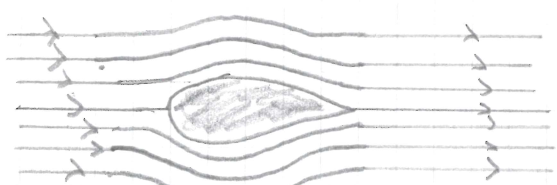
Stationäre Strömung: Strombahnen = Stromlinien = parallele Bahnen

- laminare Strömung:

  → meist stationär

  → entstehen z.B. durch Hindernisse in stationärer Strömung

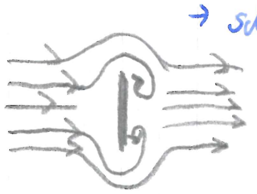
  ⇒ Teilchen strömen in Schichten, die sich nicht miteinander vermischen (Strombahnen kreuzen sich nicht)



- turbulente Strömung:

  → bei der Strömung treten Verwirbelungen auf

  → schwer vorherzusagende Bewegungen



- Unterscheidung zwischen laminar - turbulent

Reynoldszahl: $Re := \frac{v \cdot l}{\nu}$ ν = Viskosität

l = charakteristische Länge

→ Verhältnis von kinetischer Energie des bewegten Volumens und verbrauchter Reibungsenergie

→ $E_{kin} < E_{Reibung}$: laminar (Re klein)

$E_{kin} > E_{Reibung}$: turbulent (Re groß)

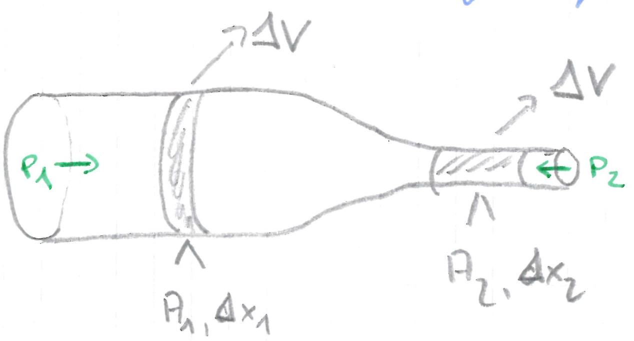
→ Rohrströmung: $Re_{krit} = \frac{v \cdot d}{\nu} \approx 2300$ $d :=$ Rohrdurchmesser

→ typisch $Re_{krit} = 1160$

- ideale Strömung:
  - ⇒ Bindungskräfte zwischen den Molekülen werden vernachlässigt!
    - → zur Vereinfachung bei der Rechnung

3.4 Strömung idealer Flüssigkeiten

In idealen Flüssigkeiten (keine Reibung zw. Molekülen) muß jede Druckarbeit als vermehrte kinetische Energie auftreten.



Druck p_1 verrichtet Arbeit $\Delta W_1 = p_1 A_1 \Delta x_1 = p_1 \Delta V$

Gegendruck p_2 " $\Delta W_2 = p_2 A_2 \Delta x_2 = p_2 \Delta V$

Zuwachs der Energie: $\Delta E = \Delta W_1 - \Delta W_2 = (p_1 - p_2)\Delta V$

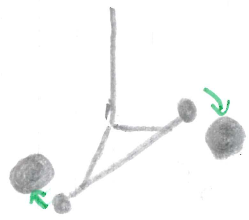
$= \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2)$

→ Bernoulli (mit $p_1 = p_0$, $v_1 = 0$): $\boxed{p + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_0 = const}$

4 Gravitation

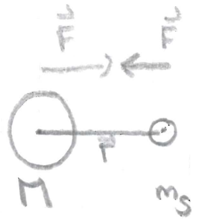
Schwere Massen ziehen sich gegenseitig an und beeinflussen gegenseitig ihre Bewegung

→ Cavendish Experiment (Gravitationswaage)



→ Platzieren der großen Massen erzeugt Auslenkung des Stabes in Richtung der Massen

Wirkende Kraft:



$$\vec F_G = -\gamma \frac{m_s \cdot M}{r^2} \left(\frac{\vec r}{|\vec r|} \right) = m_s \cdot \vec a$$

↑ Richtung

4.1 Gravitationsfeld einer Punktmasse

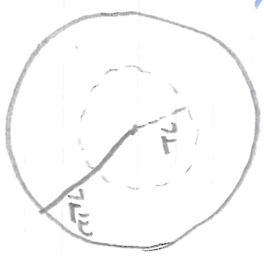
$$\vec a(\vec r) = +\gamma \frac{M}{r^2} \frac{\vec r}{r}$$

Gauß'scher Satz: $\oiint \vec a \, d\vec A = +4\pi \gamma M$

↳ Quelle des Gravitationsfeldes $\vec a$ sind Massen!

Feld einer ausgedehnten, kugelsymmetrischen Masse ist gleich dem Feld einer Punktmasse ~~bei dem~~ im Mittelpunkt.

Bsp.: Gravitationsfeld der Erde

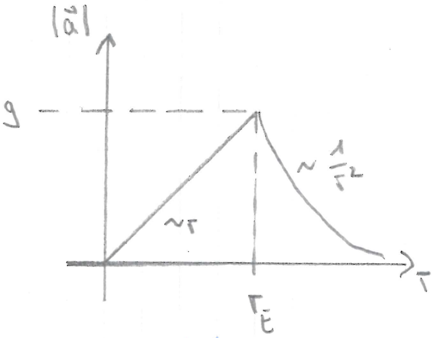


$$M_E = \frac{4}{3}\pi \rho r_E^3$$

Im Inneren: $M_i = \frac{4}{3}\pi \rho r^3$

$$\oiint \vec a_i \, d\vec A = -|\vec a_i| \, 4\pi r^2 = -4\pi \gamma M_E \frac{r^3}{r_E^3}$$

$$\Rightarrow |\vec a_i| = \gamma M_E \frac{r}{r_E^3} = g \frac{r}{r_E} \quad \Rightarrow \vec a_i = -\gamma M_E \frac{\vec r}{r_E}$$



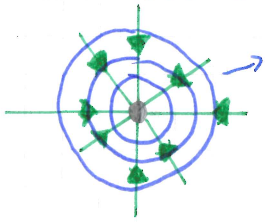
Gravitationsfeld der Erde

4.2 Schwerepotential (Gravitationspotential)

$$\vec{a}(r) = -\operatorname{grad} \varphi_G(\vec{r})$$

$$\boxed{\varphi_G(\vec{r}) = -\frac{\gamma M}{r}}$$

$\vec{a}$: Feldlinien



φ_G: Äquipotentiallinien

(Orte mit gleichem Potential

vgl. Höhenlinien)