Institut fr Angewandte Physik
und Messtechnik
Prof. Dr. Günther Dollinger

Übungen zur Experimentalphysik I

Musterlösung Blatt 8

Aufgabe 1 Plattenkondensator

Betrachten Sie einen Plattenkondensator mit einer Kapazität $C = 1\,\mathrm{F}$, einer Maximalspannung $U = 5,5\,\mathrm{V}$ und einem Volumen von $3\,\mathrm{cm}^3$.

a) Berechnen Sie die Fläche und den Plattenabstand eines des Plattenkondensators für Luft als Dielektrikum (Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = 1$). Die Dielektrizitätskonstante des Vakuums beträgt $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$. Vernachlässigen Sie die Dicke der Platten.

b) Wie groß muss die relative Dielektrizitätskonstante sein, wenn der Plattenabstand $d = 1\mu$m beträgt?

c) Wie lange leuchtet eine Glühbirne, wenn der Kondensator auf $5,5\,\mathrm{V}$ aufgeladen ist. Bei $5\,\mathrm{V}$ nimmt die Lampe eine Leistung von $0,5\,\mathrm{W}$ auf. Der Widerstand der Glühbirne sei konstant. Damit die Glühbirne leuchtet wird eine Leistung von mindestens $0,1\,\mathrm{W}$ benötigt.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Die Kapazität des Kondensators errechnet sich durch

$$C = \epsilon \frac{A}{d}$$

$$V = Ad$$

$$\frac{A}{d} = \frac{V}{d^2}$$

$$\Rightarrow C = \epsilon \frac{V}{d^2}$$

mit A der Fläche, d dem Plattenabstand und V dem Volumen damit kann d und A für Luft als Dielektrikum berechnet werden. Dabei ist die relative Dielektrizitätskonstante $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ für Luft näherungsweise Eins ($\epsilon_r = 1,00059$) und $\epsilon = \epsilon_0$.

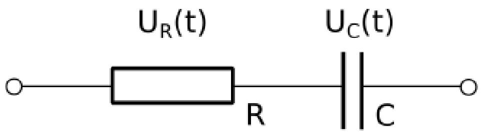
$$d = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r V}{C}} = \sqrt{\frac{8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}} 1 \;\; 3 \cdot 10^{-6}\mathrm{m}^3}{1\mathrm{F}}} = 5,15 \cdot 10^{-9}\mathrm{m} = 5,15\mathrm{nm}$$

$$A = \frac{Cd}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{1\mathrm{F} 5,15 \cdot 10^{-9}\mathrm{m}}{8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}} \;\; 1} = 581,92\mathrm{m}^2$$

Anmerkung: $[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}} = 1\mathrm{F}$

b) Um bei gleicher Kapazität und Volumen des Kondenstors den Plattenabstand zu vergrößern muss ein Dielektrikum hoher relative Permittivität eingeführt werden. Mit den Gleichungen aus a):

$$A = \frac{Cd}{\epsilon_0 \epsilon_r} \Rightarrow \epsilon_r = \frac{Cd}{A\epsilon_0} = \frac{Cd^2}{V\epsilon_0} = \frac{1\text{F}\,(1 \cdot 10^{-6}\text{m})^2}{3 \cdot 10^{-6}\text{m}^3 8,85 \cdot 10^{-12}\frac{\text{As}}{\text{Vm}}} = 3,77 \cdot 10^4$$

c) 

Entladen des Kondensators

$$U_R(t) + U_C(t) = 0$$

mit $U = \frac{Q}{C}$, $U = R\,I$ und $I = \frac{\text{d}Q}{\text{d}t}$ ergibt sich eine DGL erster Ordnung.

$$\frac{Q(t)}{C} + R\frac{\text{d}Q}{\text{d}t} = 0$$

Trennung der Variablen

$$\frac{\text{d}Q}{Q} = -\frac{1}{RC}\text{d}t$$

Diese Gleichung kann durch suchen der Stammfunktion gelöst werden.

$$\ln(Q) = -\frac{1}{RC}t + C_1$$

$$Q(t) = \text{e}^{-\frac{t}{\tau}+C_1} = \text{e}^{C_1}\text{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

mit $\tau = RC$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Kondensator voll geladen, damit ist $\text{e}^{C_1} = Q_0$. Für den Spannungsverlauf am Kondensator ergibt sich

$$U_C(t) = U_0\text{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

Die Leistung $P = U\,I$ kann mit $U = R\,I$ als $P = \frac{U^2}{R}$ ausgedrückt werden. Nach R umgestellt ergibt sich für τ

$$\tau = RC = \frac{U^2C}{P} \Rightarrow U_C(t) = U_0\text{e}^{\frac{-tP}{U^2C}}$$

Die Leistungsaufnahme bei $U = 5$V ist $P = 0,5$W. Bei einer Leistung $P_{min} = 0,1$W erlischt die Lampe. R ist laut Aufgabe konstant U_{min} ist damit

$$R = \frac{U^2}{P} = \frac{U_{min}^2}{P_{min}} \Rightarrow U_{min} = U\sqrt{\frac{P_{min}}{P}}$$

Damit ist der Zeitpunkt t^* zu dem die Lampe erlischt

$$U_C(t^*) = U_{min} = U_0 \mathrm{e}^{\frac{-t^* P}{U^2 C}}$$

$$\ln\left(\frac{U_{min}}{U_0}\right) = -\frac{t^* P}{U^2 C}$$

$$t^* = -\ln\left(\frac{U_{min}}{U_0}\right)\frac{U^2 C}{P} = -\ln\left(\frac{U}{U_0}\sqrt{\frac{P_{min}}{P}}\right)\frac{U^2 C}{P} = -\ln\left(\frac{5\mathrm{V}}{5,5\mathrm{V}}\sqrt{\frac{0,1\mathrm{W}}{0,5\mathrm{W}}}\right)\frac{(5\mathrm{V})^2 1\mathrm{F}}{0,5\mathrm{W}} = 45\mathrm{s}$$

Anmerkung: $[P] = \mathrm{W} = \mathrm{VA}$

Aufgabe 2 Schwingkreis

Gegeben sei eine Serienschaltung (siehe Abb.1) aus Widerstand $R = 50\,\Omega$, Induktivität $L = 18\,\mathrm{mH}$ und Kapazität $C = 1\,\mathrm{nF}$. Der Generator G lädt den Kondensator auf die Spannung U_0 auf. Zum Zeitpunkt $t = 0\,\mathrm{s}$ wird der Schalter geschlossen.

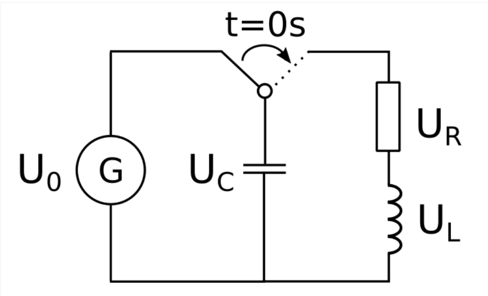


Abbildung 1: LRC Serienschaltung

a) Berechnen Sie den Spannungsverlauf $U_C(t)$ am Kondensator.

b) Wie groß muss bei vorgegebener Induktivität L und Kapazität C der Widerstand R' sein, damit am Kondensator keine Schwingung mehr auftritt?

c) Berechnen Sie den Spannungsverlauf $U_C(t)$ am Kondensator wenn $R = 0$ ist.

d) Berechnen Sie den Spannungsverlauf $U_C(t)$ am Kondensator wenn $L = 0$ ist.

e) Berechnen Sie den Spannungsverlauf $U_L(t)$ an der Induktivität, wenn $R = 0$ ist.

f) Skizzieren die Lösungen $U_C(t)$ für $R = 0$, $R = 50\,\Omega$ und $R = R'$ mit $U_0 = 1\,\mathrm{V}$.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Die Summe aller Teilspannungen ist gleich Null.

$$U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) = 0$$

Durch jedes der Bauteile fließt der selbe Strom I. Der Strom ist definiert als Ladung pro Zeit, also $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$. Damit ist die Ladungsmenge Q

$$Q = \int I dt$$

$$\dot{Q} = I$$
$$\ddot{Q} = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

Für die Teilspannungen gilt:

$$U_L = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = L\ddot{Q}$$

(Induktionsgesetzt)

$$U_R = RI = R\dot{Q}$$

(Ohmsches Gesetzt)

$$U_C = \frac{Q}{C}$$

(Kondensatorgleichung) Gesucht ist der Spannungsverlauf am Kondensator, also $U_C(t)$. Mit Oben gilt:

$$Q = CU_C$$
$$\dot{Q} = C\dot{U}_C$$
$$\ddot{Q} = C\ddot{U}_C$$

In die erste Gleichung eingesetzt:

$$LC\ddot{U}_C + RC\dot{U}_C + U_C = 0$$

$$\ddot{U}_C + \underbrace{\frac{R}{L}}_{=2\delta}\dot{U}_C + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{=\omega_0^2}U_C = 0$$

Mit dem Lösungsansatz $U_C(t) = \mathrm{e}^{\lambda\,t}$ ist,

$$\dot{U}_C(t) = \lambda\mathrm{e}^{\lambda t}$$

und

$$\ddot{U}_C(t) = \lambda^2\mathrm{e}^{\lambda t}$$

Eingesetzen:

$$\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda t} + \frac{R}{L}\lambda\mathrm{e}^{\lambda t} + \frac{1}{LC}\mathrm{e}^{\lambda t} = 0$$
$$\lambda^2 + \lambda\frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = 0$$

Dies ist eine quadratische Gleichung (DGL 2 Ordnung) von λ und wird charakteristisches Polynom genannt. Nach λ aufgelöst

$$\lambda_\pm = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\cdot 1\cdot\frac{1}{LC}}}{2}$$

$$= -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

Ein Polynom zweiter Ordnung hat im immer 2 Lösungen in $\mathbb{C}$. Man unterscheidet 3 Fälle:
Fall I: Kriechfall (starke Dämpfung), $\delta^2 > \omega_0^2$, 2 reelle Lösungen
Fall II: Aperiodischer Grenzfall, $\delta^2 = \omega_0^2$, 1 doppelte reelle Lösung
Fall III: Schwingungsfall (schwache Dämpfung), $\delta^2 < \omega_0^2$, 2 komplex konjugierte Lösungen

Für die in der Aufgabe angegeben Werte von L, R und C ergibt sich:

$$\delta^2 = \left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \left(\frac{50\Omega}{218 \cdot 10^{-3}\mathrm{H}}\right)^2 = 1,93 \cdot 10^6 \frac{1}{\mathrm{s}^2}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{18 \cdot 10^{-3}\mathrm{H}1 \cdot 10^{-9}\mathrm{F}} = 5,55 \cdot 10^{10} \frac{1}{\mathrm{s}^2}$$

$$\delta^2 < \omega_0^2$$

Anmerkung: $[\delta^2] = \left(\frac{\Omega}{\mathrm{H}}\right)^2 = \left(\frac{\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}}{\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}}}\right)^2 = \frac{1}{\mathrm{s}^2} = \frac{1}{\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}}\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}}} = \frac{1}{\mathrm{HF}} = [\omega_0^2]$
Bei dem Spannungsverlauf am Kondensator $U_C(t)$ handelt es sich mit den gegeben Werten um eine schwach gedämpfte Schwingung (Fall III). Der Ausdruck unter der Wurzel ist negativ, also

$$\lambda_\pm = -\delta \pm \sqrt{-i^2(\delta^2 - \omega_0^2)} = -\delta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} i = -\frac{1}{\tau} \pm \omega_d i$$

wobei $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ auch die gedämpften Eigenkreisfrequenz und $\tau = \delta^{-1}$ die Abklingkonstante genannt wird. Die allgemeine Lösung der DGL entspricht der Linearkombination der beiden Lösungen

$$U_C(t) = A\mathrm{e}^{\lambda_+ t} + B\mathrm{e}^{\lambda_- t} = \mathrm{e}^{-\delta t}\left(A\mathrm{e}^{+\omega_d i t} + B\mathrm{e}^{-\omega_d i t}\right)$$

wobei A und B zwei Konstanten entsprechen die durch die Anfangswerte bestimmt werden müssen. Im allgemeinen können A und B komplex sein. Der Ausdruck in Klammern lässt sich vereinfachen (bekannt z.B. aus Vorlesung), der Realteil entspricht,

$$U_C(t) = \mathrm{e}^{-\delta t}\left(A' \cos(\omega_d t) + B' \sin(\omega_d t)\right)$$

mit A' und B' aus $\mathbb{R}$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt die Spannung am Kondensator U_0, damit

$$U_C(t = 0) = \underbrace{\mathrm{e}^{-\delta 0}}_{=1}(\underbrace{A' \cos(\omega_d 0)}_{=A' \cdot 1} + \underbrace{B' \sin(\omega_d 0)}_{=B' \cdot 0}) \overset{!}{=} U_0$$

damit muss $A' = U_0$ sein. Die zweite Anfangsbedingung ist, dass der Strom über den Kondensator gleich Null ist.

$$\dot{U}_C(t) = \left[\mathrm{e}^{-\delta t}(-\delta)A'\cos(\omega_d t) + \mathrm{e}^{-\delta t}A'(-\sin(\omega_d t)\omega_d)\right] + \left[\mathrm{e}^{-\delta t}(-\delta)B'\sin(\omega_d t) + \mathrm{e}^{-\delta t}B'\cos(\omega_d t)\omega_d\right]$$

Mit $\dot{U}_C = \frac{\dot{Q}_C}{C} = \frac{I_C}{C}$ ist $I_C(t) = C\dot{U}_C$

$$I_C(t=0) = C\underbrace{\mathrm{e}^{-\delta 0}}_{=1}(B'[\underbrace{\cos(\omega_d 0)}_{=1}\omega_d - \underbrace{\delta\sin(\omega_d 0)}_{=0}] - A'[\delta\underbrace{\cos(\omega_d 0)}_{=1} + \underbrace{\sin(\omega_d 0)\omega_d}_{=0}]) \stackrel{!}{=} 0$$

$$= C\left(B'\omega_d - A'\delta\right) \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad B' = A'\frac{\delta}{\omega_d} = U_0\frac{\delta}{\omega_d}$$

Der Spannungsverlauf $U_C(t)$ ist damit

$$U_C(t) = U_0\mathrm{e}^{-\delta t}\left(\cos(\omega_d t) + \frac{\delta}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right)$$

Exkurs:
Zwei Schwingungen gleicher Frequenz können addiert werden. Das Ergebnis entspricht wieder einer harmonischen Schwingung.

$$y_1 = U_0\sin(\omega_d t + \varphi_1)$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$$

und

$$y_2 = U_0\frac{\delta}{\omega_d}\sin(\omega_d t + \varphi_2) \quad \varphi_2 = 0$$

$$y = y_1 + y_2 = A\sin(\omega_d t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{U_0^2 + \left(U_0\frac{\delta}{\omega_d}\right)^2 + 2U_0U_0\frac{\delta}{\omega_d}\underbrace{\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}_{=0}} = U_0\sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\omega_d}\right)^2}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{U_0\sin(\varphi_1) + U_0\frac{\delta}{\omega_d}\sin(\varphi_2)}{U_0\cos(\varphi_1) + U_0\frac{\delta}{\omega_d}\cos(\varphi_2)} = \frac{1+0}{0 + \frac{\delta}{\omega_d}1} = \frac{\omega_d}{\delta}$$

Damit ist $U_C(t)$ gleich

$$U_C(t) = U_0\mathrm{e}^{-\delta t}\sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\omega_d}\right)^2}\sin\left(\omega_d t + \arctan\left(\frac{\omega_d}{\delta}\right)\right)$$

Anmerkung: Dabei ist natürlich $U_C(t=0) = U_0$ was mit Hilfe von $\tan(\varphi) = \frac{\delta}{\omega_d}$ und $\sin(x) = \pm\frac{\tan(x)}{\sqrt{1+(\tan(x))^2}}$ nachgerechnet werden kann.

b) Wenn durch eine hohe Dämpfung (hoher ohmscher Verlust) keine Schwingung mehr zu Stande kommt spricht man vom aperiodischer Grenzfall (Fall II). Dafür muss die Diskriminante des charakteristischen Polynoms gleich Null sein, also $\delta^2 - \omega_0^2 = 0$

$$\left(\frac{R'}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow R' = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 8,59 \cdot 10^3\Omega$$

Die Lösung des charakteristischen Polynoms ist dann

$$\lambda_\pm = -\delta' = -\frac{R'}{2L}$$

damit ändert sich auch die Lösung der DGL!
Exkurs: Obwohl es zwei Lösungen geben muss, liefert unser Ansatz $U_C(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ nur eine Lösung $U_C(t) = C'\mathrm{e}^{-\delta t}$. Eine weitere Lösung kann mit Nachdenken gefunden werden. Was passiert wenn δ gegen ω_0 geht?

$$\lim_{\delta\to\omega_0} \mathrm{e}^{-\delta' t}\left[\underbrace{C' \cos\left(\underbrace{\sqrt{(\delta^2-\omega_0^2)}}_{\to 0}\, t\right)}_{\to 1} + \underbrace{D' \sin\left(\underbrace{\sqrt{(\delta^2-\omega_0^2)}}_{\to 0}\, t\right)}_{\to 0}\right]$$

Der Sinus kann durch den erstem Term seiner Reihenentwicklung ausgetauscht werden $\sin(x) \simeq \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$ Damit ist $U_C(t)$ mit $\delta'^2 - \omega_0^2 = 0$

$$U_C(t) = \mathrm{e}^{-\delta' t}\,(C' + D't)$$

Mit Rechnung wie bei Aufgabe 1 a) ergeben sich die Konstanten zu $C' = U_0$ und $D' = \delta' C'$.

c) Mit $R = 0$ wird aus der gedämpften Schwingung eine verlustfreie freie Schwingung. Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow \lambda = \sqrt{-\frac{1}{LC}} = \pm\omega_0 i$$

Es liefert immer noch 2 komplex konjugierte Lösungen! Die freie Schwingung ist ein Sonderfall der gedämpften Schwingung.

$$\pm\omega_d = \pm\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = \pm\sqrt{0 - \omega_0^2} = \pm\omega_0 i$$

und

$$\delta = \frac{R}{2L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-\delta t} = 1$$

Der Realteil der allgemeine Lösung der DGL lautet,

$$U_C(t) = E'\cos(\omega_0 t) + F'\sin(\omega_0 t)$$

Zur Bestimmung von E' und F'. Entweder durch Rechnung analog wie Aufgabe 1 a) oder als Sonderfall der gedämpften Schwingung. A' ist unabhängig von δ und ω_d also $A' = E' = U_0$ und $F' = \lim_{\delta\to 0} B' = \lim_{\delta\to 0}\frac{\delta}{\omega_d}U_0 = 0$

d) Bei einer Schwingung wird die im Kondensator gespeicherte Energie $E_C = \frac{1}{2}CU^2$ bei einer viertel Periode im Magnetfeld der Spule gespeichert $E_L = \frac{1}{2}LI^2$. Zur halben Periode ist der Kondensator wieder geladen, jedoch mit der umgepolten Spannung $U_C(t = \frac{T}{2}) = -U_0$ (mit $R = 0$). Ist $L = 0$ fehlt dieser Energiespeicher, es entsteht keine Schwingung (vgl. Aufgabe 1, c) und ω_0 geht gegen unendlich.

$$\lim_{L\to 0} \omega_0 = \lim_{L\to 0} \frac{1}{\sqrt{LC}} = \infty$$

e) Mit $R = 0$ muss für jeden Zeitpunkt gelten,

$$U_C(t) + U_L(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad U_L(t) = -U_C(t)$$

$$-U_C(t) = -(E' \cos(\omega_0 t) + F' \sin(\omega_0 t)) = -U_0 \cos(\omega_0 t) - 0 = U_L(t)$$

$U_L(t)$ ist also vom Betrag gleichgroß nur mit umgekehrten Vorzeichen was einer Phasenverschiebung von π entspricht.

f) In Abbildung 1 sind die Lösungen der DGL für die freie Schwingung $R = 0\Omega$, die gedämpfte Schwingung mit $R = 50\Omega$ und den aperiodischen Grenzfall mit $R = 8,59\text{k}\Omega$ dargestellt. ($U_0 = 1\text{V}$)

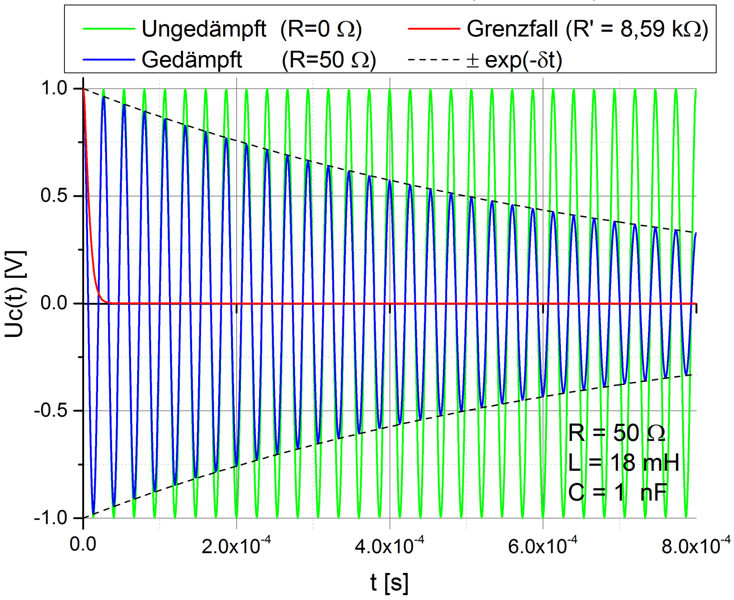


Abbildung 2: $U_C(t)$ mit angegebenen Werten uns $U_0 = 1\text{V}$ für alle drei Fälle

Aufgabe 3 Schallwellen

Die maximale für das menschliche Ohr noch erträgliche Druckdifferenz bei lauten Geräuschen beträgt rund 28 Pa. Welche Auslenkungsamplitude s_m besitzt ein solcher Ton in Luft (Dichte: $\rho = 1,21\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$) bei einer Frequenz von $f = 1000\,\text{Hz}$ und einer Geschwindigkeit von $v = 343\frac{\text{m}}{\text{s}}$?

Lösung zu Aufgabe 3

Für die Auslenkung s_m der Schallwelle und die Druckänderung Δp_m gilt:

$$s_m = \frac{\Delta p_m}{v\rho\omega} = \frac{\Delta p_m}{v\rho 2\pi f} = \frac{28\text{Pa}}{343\frac{\text{m}}{\text{s}}1,21\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}2\pi 1000\text{Hz}} = 1,1 \cdot 10^{-5}\text{m} = 11\mu\text{m}$$

Das entspricht einem Siebtel der Dicke eines normalen DIN A4 Blattes. Der leiseste Ton bei dieser Frequenz, den ein Mensch noch hören kann hat eine Amplitude von ca. 11 pm. Dies entspricht einem zehntel eines Atomradius. Das Ohr ist also ein sehr empfindlicher Detektor.

Aufgabe 4 transversale mechanische Welle

Eine Transversalwelle breitet sich al ebene Welle in einem Medium aus Masseteilchen (m=1 g) aus. Die Welle hat eine maximale Auslenkung $y_0 = 0,1\,\text{m}$, eine Periodendauer von $T = 4\,\text{s}$ und eine Wellenlänge von $\lambda = 4\,\text{m}$.

a) Wie lautet die Wellengleichung für y(x,t)

b) Berechnen Sie die Frequenz, die Wellenzahl und die Wellengeschwindigkeit.

c) Welche kinetische Energie E_{kin} hat ein Teilchen bei x=0,8 m nach t=4 s?

d) Welchen minimalen Abstand x_{min} vom Ursprung der Welle x=0 m hat ein Teilchen, dessen kinetische Energie bei t=4 s die Hälfte der Gesamtenergie hat?

Lösung zu Aufgabe 4

a)

$$y(x,t) = y_0 \sin(\omega t - kx) = y_0 \sin(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x) = 0,1\text{m}\sin(\frac{2\pi}{4\text{s}}t - \frac{2\pi}{4\text{m}}x)$$

b)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4\text{s}} = 1,57\frac{1}{\text{s}}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{4\text{m}} = 1,57\frac{1}{\text{m}}$$

$$v = \lambda f = \lambda\frac{\omega}{2\pi} = 4\text{m}\frac{1,57\frac{1}{\text{s}}}{2\pi} = 1\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c) Zuerst muss man die Teilchengeschwindigkeit v_T berechnen. Dies ist nicht die Wellengeschwindigkeit v, also $v \neq v_T$. Die Teilchengeschwindigkeit berechnet sich als zeitliche Ableitung der Wellengleichung:

$$v_T = \frac{\text{d}y}{\text{d}t} = y_0\omega\cos(\omega t - kx)$$

Für die kinetische Energie eines Teilchens gilt dann:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv_T^2 = \frac{1}{2}1\text{g}0,1^2\text{m}^2 1,57^2\frac{1}{\text{s}^2}\cos^2(1,57\frac{1}{\text{s}}4\text{s} - 1,57\frac{1}{\text{m}}0,8\text{m}) = 0,012 \cdot 10^{-3}\text{J} = 0,012\text{mJ}$$

d) Die Gesamtenergie ist im Verlustfreiensystem gleich der maximalen kinetischen Energie. Die kinetische Energie wird maximal, wenn $\cos(\omega t - kx) = 1$ und berechnet sich zu:

$$E_{ges} = E_{kin,max} = \frac{1}{2} m y_0^2 \omega^2 = \frac{1}{2} 1\mathrm{g} 0,1^2 \mathrm{m}^2 1,57^2 \frac{1}{\mathrm{s}^2} = 0,0123\mathrm{mJ}$$

Nun sucht man ein Teilchen mit

$$E_{kin} = \frac{E_{ges}}{2}$$

Also:

$$\frac{E_{kin}}{E_{ges}} = \frac{1}{2}$$

Einsetzen der Formeln für E_{kin} und E_{ges} ergibt:

$$\frac{E_{kin}}{E_{ges}} = \cos^2(\omega t - kx) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(\omega t - kx) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \omega t - kx = \frac{\pi}{2} + n\frac{\pi}{2}$$

wobei $n \in \mathbb{Z}$
Einsetzen von $t = 4\,\mathrm{s}$ ω und k ergibt:

$$6,28 - 1,57\frac{1}{\mathrm{m}} x = \frac{\pi}{2} + n\frac{\pi}{2}$$

Auflösen nach x:

$$2\pi - \frac{\pi}{2} + n\frac{\pi}{2} = 1,57\frac{1}{\mathrm{m}} x$$

$$x = \frac{2\pi - \frac{\pi}{2} + n\frac{\pi}{2}}{1,57\frac{1}{\mathrm{m}}} = \frac{2\pi - \frac{\pi}{2} + n\frac{\pi}{2}}{\frac{2\pi}{\lambda}}$$

$$x = \frac{3}{4}\lambda - n\frac{1}{4}\lambda = 3\mathrm{m} - n \cdot 0,75\mathrm{m}$$

als minimaler Wert für die Ruhelage folgt $x_{min} = 0\,\mathrm{m}$.