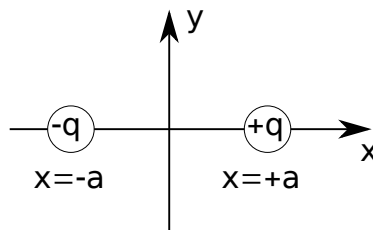


Übungen zur Experimentalphysik I

Musterlösung Blatt 6

Aufgabe 1 Dipol

Betrachten Sie die abgebildete Ladungsverteilung eines elektrischen Dipols mit einer negativen Punktladung, $-q$, bei $(-a, 0)$ und einer positiven Punktladung, $+q$, bei $(+a, 0)$.



- Skizzieren Sie schematisch den Feldlinienverlauf sowie die Äquipotentiallinien des elektrischen Potentials. Welche Symmetrien besitzt die Ladungsverteilung, ρ , das elektrische Feld, \vec{E} und das Potential, Φ ?
- Berechnen Sie das elektrische Potential auf der x-Achse, $\Phi(x, 0)$, und skizzieren sie dieses.
- Berechnen Sie das elektrische Feld auf der y-Achse, $\vec{E}(0, y)$.
- Wie sieht das elektrische Feld (auf der y-Achse) um den Ursprung aus, für $|y| \ll a$?
- Wie sieht das elektrische Feld (auf der y-Achse) weit weg vom Ursprung aus, für $|y| \gg a$?
- Wie sieht das elektrische Potential lokal um einen Punkt auf der y-Achse aus?

Lösung zu Aufgabe 1

- a) Feld- und Potentialverlauf:

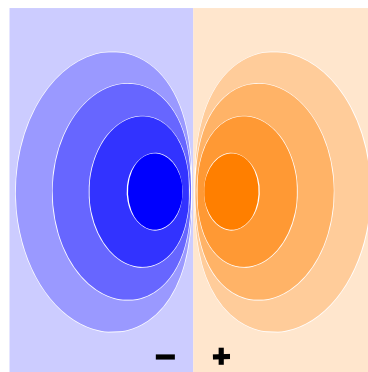


Abbildung 1: Potential des elektrischen Dipols (schematisch). (aus Wikipedia)

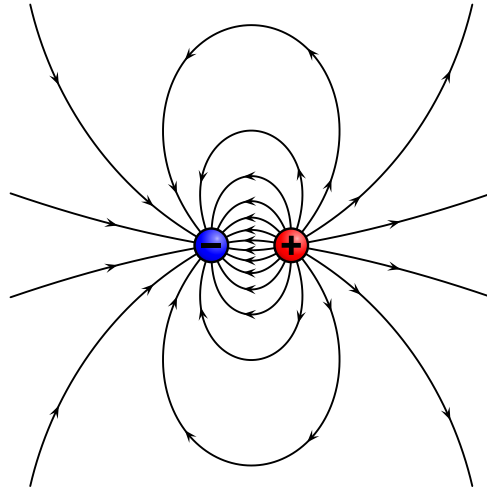


Abbildung 2: Feldlinien des elektrischen Dipols (schematisch). (aus Wikipedia)

- Nahe an den beiden Ladungen sieht das Potential und das Feld aus wie bei isolierten Punktladungen.
- Das Potential ist bei $x = 0$ aus Symmetriegründen Null.
- Feldlinien verlaufen von der positiven zur negativen Ladung.

Symmetrien:

- Ladungsverteilung: $\rho(-x) = -\rho(x)$ und $\rho(-y) = \rho(y)$
- Potential: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ und $\Phi(-y) = \Phi(y)$
- Elektrisches Feld:
 $E_x(-x) = E_x(x)$ und $E_x(-y) = E_x(y)$
 $E_y(-x) = -E_y(x)$ und $E_y(-y) = -E_y(y)$

Das Potential besitzt die selbe Symmetrie wie die Ladungsverteilung. (Beim Feld ist das komplizierter. Die Ableitung nach x ändert die Symmetrie in x : Das Potential ist antisymmetrisch in x , die x -Komponente des Feldes ist jedoch symmetrisch bzgl. x .)

b) Für die Potentiale der beiden Punktladungen, Φ_- und Φ_+ , gilt:

$$\begin{aligned}\Phi_-(x) &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|x+a|} \\ \Phi_+(x) &= +\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|x-a|}\end{aligned}\quad (1)$$

Das Potential des Dipols, Φ , ergibt sich als Summe der Potentiale der beiden Punktladungen:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \Phi_-(x) + \Phi_+(x) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-1}{|x+a|} + \frac{1}{|x-a|} \right)\end{aligned}\quad (2)$$

Das Potential besitzt Singularitäten bei $x = \pm a$. Für die drei Abschnitte benötigt man eine Fallunterscheidung:

Fall 1: $x > a$

Hier gilt:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-1}{x+a} + \frac{1}{x-a} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-(x-a) + (x+a)}{(x+a)(x-a)} \\ &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{a}{x^2 - a^2}\end{aligned}\quad (3)$$

Fall 2: $x < -a$

Wegen a) gilt hier: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Somit gilt:

$$\Phi(x) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{a}{x^2 - a^2}\quad (4)$$

Fall 3: $-a < x < a$

Hier gilt:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-1}{x+a} + \frac{-1}{x-a} \right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-(x-a) - (x+a)}{x^2 - a^2} \\ &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{-x}{x^2 - a^2}\end{aligned}\quad (5)$$

Zusammengefasst:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{-a}{x^2 - a^2} & x < -a \\ \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{-x}{x^2 - a^2} & -a < x < a \\ \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{a}{x^2 - a^2} & x > a \end{cases}\quad (6)$$

Das Potential ist in Abb. 4 skizziert.

c) Das Feld des Dipols im Punkt $(x=0; y)$ ergibt sich als vektorielle Addition der Felder der beiden Punktladungen, wie in Abb. 3 skizziert.

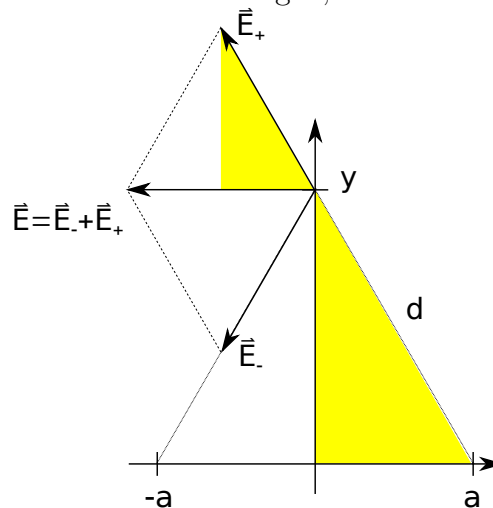


Abbildung 3: Das Feld ergibt sich durch vetorielle Addition der Felder der positiven und der negativen Punktladung.

Die beiden gelben Dreiecke sind ähnlich. Deshalb gilt:

$$\frac{1}{2} \frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{E}_+\|} = \frac{a}{d} \quad (7)$$

Hierbei bezeichnet \vec{E}_+ das Feld der positiven Punktladung, \vec{E}_- das Feld der negativen Punktladung und $d = \sqrt{a^2 + y^2}$ den Abstand der positiven Ladung zum betrachteten Punkt. Für den Betrag des Feldes der positiven Punktladung am Ort $(0; y)$ gilt:

$$\vec{E}_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^2} \quad (8)$$

Aus Symmetriegründen zeigt das Feld nur in negative x-Richtung, die y-Komponente verschwindet. Somit erhält man für das Dipolfeld auf der y-Achse:

$$\begin{aligned} \vec{E}(0, y) &= -\hat{x} 2\|\vec{E}_+\| \frac{a}{d} = -\hat{x} 2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y^2 + a^2} \frac{a}{\sqrt{y^2 + a^2}} \\ &= -\hat{x} \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{a}{(y^2 + a^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (9)$$

Hierbei bezeichnet \hat{x} den Einheitsvektor in x-Richtung.

$E_x(y)$ ist ebenfalls in abb. 4 skizziert.

d) Für $|y| \ll a$ kann man y^2 gegen a^2 vernachlässigen und bekommt:

$$\vec{E} \stackrel{|y| \ll a}{\approx} -\hat{x} \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} \quad (10)$$

e) Für $|y| \gg a$ ist a^2 gegen y^2 zu vernachlässigen und man erhält:

$$\vec{E} \stackrel{|y| \gg a}{\approx} -\hat{x} \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{y^3} \quad (11)$$

f) Wegen $\vec{E} = -\nabla\Phi$ suchen wir eine Funktion mit:

$$\left. \frac{d\Phi(x, y)}{dy} \right|_{x=0} = 0 \quad (12)$$

und

$$\left. \frac{d\Phi(x, y)}{dx} \right|_{x=0} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{a}{(y^2 + a^2)^{3/2}} \quad (13)$$

Dies wird von folgender Funktion erfüllt:

$$\Phi(x, y) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{a}{(y^2 + a^2)^{3/2}} x \quad (14)$$

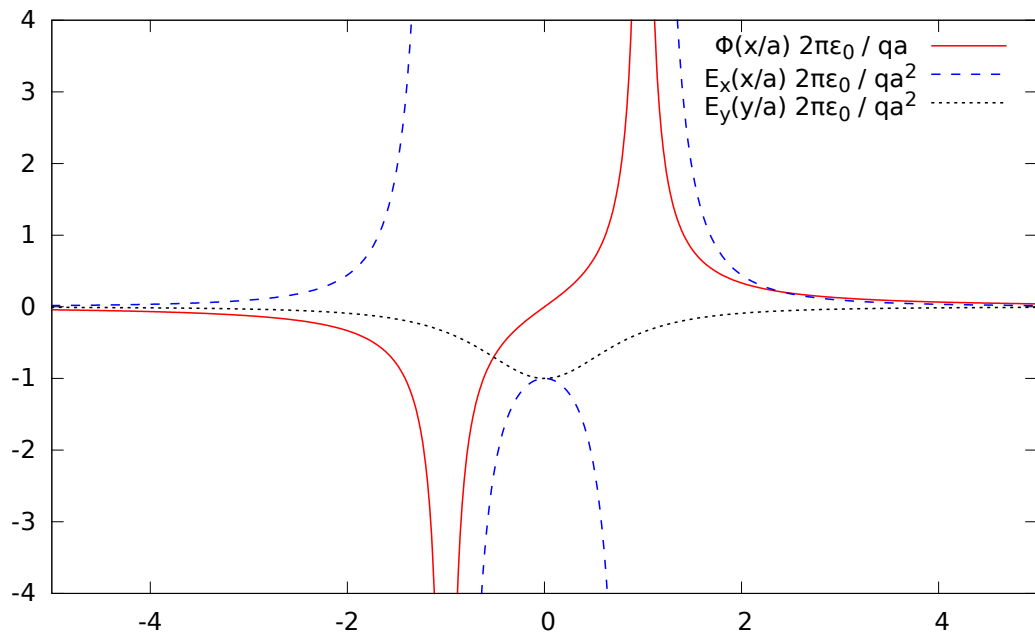


Abbildung 4: Feld und Potential für den Dipol.

Aufgabe 2 Beschleunigung von Elektronen

Elektronen werden auf einer metallischen Platte im Koordinatenursprung freigesetzt und in x-Richtung auf eine 2,5 cm entfernte, parallele Metallplatte durch ein elektrisches Feld beschleunigt. In P ist ein kleines Loch in der Metallplatte, durch das die Elektronen in ein feldfreies Vakuum entweichen. Zwischen den Platten herrsche die Spannungsdifferenz $U = -2,5 \text{ kV}$. (Elektronenmasse: $m = 511 \frac{\text{keV}}{c^2}$ oder $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$)

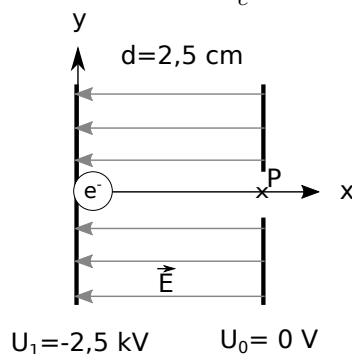


Abbildung 5: Ein Elektron wird zwischen zwei Platten beschleunigt.

- Geben Sie die Feldstärke \vec{E} zwischen den beiden Platten an.
- Berechnen Sie die kinetische Energie und die Geschwindigkeit v_0 der Elektronen im Austrittspunkt P.

Lösung zu Aufgabe 2

a)

$$E_x = \frac{U}{d} = \frac{-2,5 \cdot 10^3 \text{ V}}{2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = -1 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

b)

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v_{x_0}^2 = -eU = 2,5 \text{ keV}$$

oder mit $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ CV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

$$E_{kin} = 4 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

$$\frac{v_{x_0}}{c} = \sqrt{\frac{-2eU}{mc^2}} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot 2,5 \text{ keV}}{500 \text{ keV}}} = \sqrt{\frac{5 \text{ keV}}{500 \text{ keV}}} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{10} c = 3 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Aufgabe 3 Elektronen im elektrischen Feld

Die Elektronen aus Aufgabe 2 gelangen mit der Geschwindigkeit v_0 im Punkt $\vec{r}_0 = (0, 0)$ zwischen zwei Ablenkplatten der Länge $l = 2 \text{ cm}$. Zwischen den Ablenkplatten betrage die Feldstärke $E_y = 600 \frac{\text{V}}{\text{m}}$.

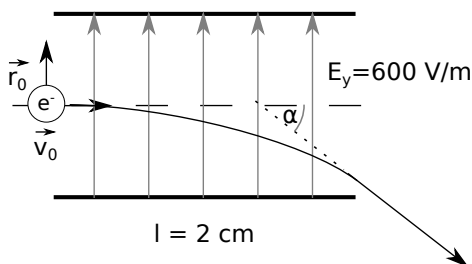


Abbildung 6: Ein Elektron wird zwischen zwei Platten abgelenkt.

- Welche Kräfte wirken in x- und y-Richtung?
- Beeinflußt eine Kraft in y-Richtung die Geschwindigkeit v_x ?
- Geben Sie allgemein v_x und v_y als Funktion der Zeit an. Geben sie $\vec{v}(t)$ an.
- Geben Sie den Ort $\vec{r}(t)$ des Teilchens als Funktion der Zeit an, solange das Elektron sich zwischen den Kondensatorplatten befindet.
- Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor \vec{v} beim Verlassen des Gebiets zwischen den Kondensatorplatten.
- Geben Sie den Winkel zwischen der Geschwindigkeit \vec{v} und der x-Achse beim Verlassen des Gebiets zwischen den Kondensatorplatten an.
- Wie groß ist die Ablenkung eines beliebigen Ions, wenn es durch die gleiche Potentialdifferenz beschleunigt und durch das gleiche Feld wie die Elektronen abgelenkt wird. Wie macht sich die Masse bemerkbar? Welchen Einfluß hat die Ladung des Ions?

Lösung zu Aufgabe 3

a)

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = -e\vec{E} = -e \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -eE_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow F_x = 0 \text{ und } F_y = -eE_y$$

Eine alternative Darstellung wäre:

$$\begin{cases} \vec{E} = E_y \hat{y} \\ \vec{F} = -eE_y \hat{y} \end{cases}$$

b)

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = -e\vec{E}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = -\frac{e}{m}\vec{E} \rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e}{m}E_y \end{pmatrix}$$

Bemerkung: $\frac{e}{m}$ ist der entscheidende Unterschied zur Gravitation. ($\ddot{\vec{r}} = -\frac{m_s}{m_t}\vec{g}$; $m_s = m_t$)
 „alle Körper fallen gleich schnell...“

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} \sim E_y \end{cases}$$

\Rightarrow Nein die x-Richtung wird nicht beeinflusst.

c)

$$\begin{cases} \dot{v}_x = 0 \\ \dot{v}_y = -\frac{e}{m}E_y \end{cases}$$

Dies ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in y und nullter Ordnung in x.

$$\Rightarrow \begin{cases} v_x = C \\ v_y = -C' \frac{e}{m}E_y t \end{cases}$$

Anfangsbedingungen:

$$\begin{cases} v_x(0) = v_0 \\ v_y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0 = 0, 1c \\ v_y = -\frac{e}{m}E_y t \end{cases}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0(t) \\ -\frac{e}{m}E_y t \end{pmatrix}$$

d)

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t - \frac{e}{2m}\vec{E}t^2$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} t - \frac{e}{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \end{pmatrix} t^2 = \begin{pmatrix} v_0 t \\ -\frac{e}{2m}E_y t^2 \end{pmatrix} = \hat{x}v_0 t - \hat{y}\frac{e}{2m}E_y t^2$$

e)

$$t_1 = \frac{l}{v_0}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t_1) = \begin{pmatrix} v_0 \\ -\frac{eE_y}{m} \frac{l}{v_0} \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \frac{v_0}{c} \\ -\frac{eE_y c}{mc^2} \frac{l}{\left(\frac{v_0}{c}\right)} \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0, 1 \\ -\frac{600 \frac{eV}{m} 0,02m}{500 \cdot 10^3 eV 0,1} \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0, 1 \\ -2, 4 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_x = 3 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ v_y = -7,2 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

f)

$$\tan \alpha = -\frac{v_y}{v_x} = -\frac{eE_y l}{mv_o^2} = -\frac{eE_y l}{2\left(\frac{1}{2}mv_o^2\right)} = -\frac{600 \frac{\text{eV}}{\text{m}} \cdot 0,02 \text{m}}{2(2,5 \cdot 10^3 \text{eV})} = -\frac{12}{5} \cdot 10^{-3} = -2,4 \cdot 10^{-3}$$

oder mit oben:

$$-\frac{v_y}{v_x} = -\frac{2,4 \cdot 10^{-4}}{0,1} = -2,4 \cdot 10^{-3}$$

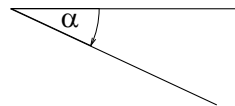


Abbildung 7: Negatives Vorzeichen bei Winkel bedeutet, dass man im Uhrzeigersinn schauen muss

Für $\alpha \ll 1$ gilt $\tan \alpha \cong \alpha$

$$\Rightarrow \alpha \cong -2,4 \cdot 10^{-3} \text{rad} = -0,14^\circ$$

g)

$$\alpha \cong \frac{v_y}{v_x} = \frac{q}{M} \frac{E_y l}{v_o^2} = \frac{q}{M} \frac{E_y l}{\frac{2qU}{M}} = \frac{E_y l}{2U}$$

Dies ist unabhängig von $\frac{q}{M}$. Die Ablenkung geht nach oben oder unten (\pm) je nach Vorzeichen der Spannung U .