Aufgabe 1 Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung

Die Erdatmosphäre besteht zu 78% aus N_2-Molekülen. Wir betrachten ein Molekül auf der Erdoberfläche, die Fluchtgeschwindigkeit v_{Fl} für ein Molekül um von der Erde in den Weltraum zu entweichen entspricht $v_{Fl} = 11{,}18\,\mathrm{km/s}$.

a) Welcher Temperatur in Kelvin würde das entsprechen, wenn v_{Fl} die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle wäre?

b) Überlegen Sie an Hand der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung, wie groß bei $T = 300\,\mathrm{K}$ der Anteil der N_2-Moleküle ist, die eine Geschwindigkeit größer v_{Fl} haben.

c) Wie groß ist, bei gleicher Temperatur, der Anteil für Wasserstoff Moleküle H_2. Erklärt sich damit der Anteil von Wasserstoff in der Erdatmosphäre?

Angaben: $\mathrm{M}_{N_2} = 28$ g/mol, $k_B = 1,38 \cdot 10^{-27}$ J/K

Lösung zu Aufgabe 1

a) Zur Berechnung wird nur die translatorische Energie betrachtet,

$$\frac{3}{2}k_B T = \frac{1}{2}m_{N_2}v_{Fl}^2 \Rightarrow T = \frac{2}{3k_B}\frac{1}{2}m_{N_2}v_{Fl}^2 = \frac{2}{3k_B}E_{Kin}$$

Die Masse eines N_2-Moleküls (Stickstoff ^{14}N) ist mit der atomaren Masseneinheit $u = 1{,}6610^{-27}\,\mathrm{kg}$ gleich $m_{N_2} = 2 \cdot 14\mathrm{u} = 28\mathrm{u}$

$$T = \frac{2}{3}\frac{1}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}}\frac{1}{2}28{\cdot}1{,}66{\cdot}10^{-27}\mathrm{kg}\left(11{,}18 \cdot 10^3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 4{,}831{\cdot}10^{22}\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{J}}\underbrace{2{,}905 \cdot 10^{-18}\mathrm{J}}_{=E_{Kin_{N_2}}}$$

$$T = 140,3 \cdot 10^3\mathrm{K}$$

b) Der Anteil von Molekülen, die eine Geschwindigkeit zwischen v und $v+\mathrm{d}v$ aufweisen entspricht

$$\mathrm{d}N(v) = Np(v)\mathrm{dv}$$

Wobei N der Gesamtheit aller Teilchen und $p(v)$ eine normierte Wahrscheinlichkeitsdichte Funktion entspricht. In diesem Fall ist $p(v)$ die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung.

$$\mathrm{d}N(v) = NCv^2e^{\left(-\frac{mv^2}{2k_BT}\right)}\mathrm{d}v = NCv^2e^{\left(-\frac{E_{Kin}}{k_BT}\right)}\,\mathrm{d}v \tag{1}$$

Mit $C = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{\frac{3}{2}}$ dem Normierungsfaktor von $p(v)$. Die kinetische Energie eines N_2-Moleküls mit der Geschwindigkeit v_{Fl} ist

$$E_{Kin_{N_2}} = 2{,}904 \cdot 10^{-18}\mathrm{J}$$

(aus Aufgabe a)

$$k_B T = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}300\mathrm{K} = 4{,}140 \cdot 10^{-21}\mathrm{J}$$

$$\frac{E_{Kin_{N_2}}}{k_B T} = 701{,}449$$

$$C_{N_2} = 4\pi\left(\frac{m_{N_2}}{2\pi k_B\,T}\right)^{\frac{3}{2}} = 4\pi\left(\frac{28 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}\mathrm{kg}}{2\pi 1{,}38 \cdot 10^{-23}\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}300\mathrm{K}}\right)^{\frac{3}{2}} = 4\pi\left(1{,}787 \cdot 10^{-6}\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$C_{N_2} = 3{,}002 \cdot 10^{-8}\frac{\mathrm{s}^3}{\mathrm{m}^3}$$

in Gleichung 1 ist $v = v_{Fl}$ und $\mathrm{d}v$ entspricht einem Intervall das aus physikalischen Gründen bis maximal zu Lichtgeschwindigkeit c reicht

$$\mathrm{d}v \simeq \Delta v = \left(299{,}792 \cdot 10^6 - 11{,}18 \cdot 10^3\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 299{,}780 \cdot 10^6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Damit ist

$$\mathrm{d}N_{N_2}(v_{Fl}) = N_{N_2}3{,}002 \cdot 10^{-8}\frac{\mathrm{s}^3}{\mathrm{m}^3}\left(11{,}18 \cdot 10^3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 e^{-701{,}449}299{,}780 \cdot 10^6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$
$$\mathrm{d}N_{N_2}(v_{Fl}) = N_{N_2}1{,}125 \cdot 10^9 e^{-701{,}449} = N_{N_2}1{,}12510^9 2{,}315 \cdot 10^{-305} \cong 0$$

Da $p(v_{Fl}) > p(c)$ ist wird bei dieser Überschlagsrechnung die Anzahl an Stickstoff Molekülen deren Geschwindigkeit größer v_{Fl} ist sogar noch überschätzt.

c) Für das H_2-Molekül entspricht die Masse $m_{H_2} = 2\,u$, damit ist

$$m_{N_2} = 28u\mathrm{und}m_{H_2} = 2\,u \Rightarrow \frac{m_{N_2}}{28} = \frac{m_{H_2}}{2} \Rightarrow m_{H_2} = \frac{1}{14}m_{N_2}$$

Da E_{Kin} linear zur Masse des Moleküls ist, ist

$$E_{Kin_{H_2}} = \frac{1}{14}E_{Kin_{N_2}} = 2{,}0743 \cdot 10^{-19}\mathrm{J}$$

$$\frac{E_{Kin_{H_2}}}{k_B T} = 50{,}104$$

$$C_{H_2} = 4\pi\left(\frac{m_{H_2}}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{14}\right)^{\frac{3}{2}} C_{N_2} = 0{,}019\,C_{N_2}$$

Damit ist

$$\mathrm{d}N_{H_2}(v_{Fl}) = N_{H_2}0{,}019C_{N_2}\left(11{,}18 \cdot 10^3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 e^{-50{,}104}299{,}780 \cdot 10^6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\mathrm{d}N_{H_2}(v_{Fl}) = N_{H_2}21{,}375 \cdot 10^6 e^{-50{,}104} = N_{H_2}21{,}375 \cdot 10^6 1{,}738 \cdot 10^{-22} = N_{H_2}3{,}715 \cdot 10^{-15}$$

Aus der Rechnung folgt, das sich die Faktoren C_{N_2} und C_{H_2} um einen Faktor von ca. 50 unterscheiden. Der entscheidende Unterschied liegt im Argument der e-Funktion $\mathrm{e}^{-701{,}449} \lll \mathrm{e}^{-50{,}104}$. Der Anteil von H_2 in der Atmosphäre liegt heute bei ca. 0,5 ppm. Dies liegt an dem langen Zeitraum der Betrachtet werden muss, denn auch die Wahrscheinlichkeit das ein H_2 Molekül entweicht ist gering. Die Atmosphären Physiker rechnen deshalb mit einer mittleren Aufenthaltsdauer für Bestandteile der Atmosphäre sie beträgt für N_2 $2 \cdot 10^7$ Jahre, für H_2 ist sie kleiner 200 Jahre. (Quelle: http://indigo.meteor.tu-darmstadt.de/umet/script/Kapitel1/kap01.html)

Aufgabe 2 Strömungsgeschwindigkeit

In ein zylindrisches Rohr wird pro Sekunde ein Liter Luft angeblasen. Die Eintrittsöffnung hat eine Fläche von $A_E = 0{,}2\mathrm{cm}^2$, die Austrittsöffnung hat eine Fläche von $A_A = 200\mathrm{cm}^2$. Die Dichte von Luft soll $\rho_L = 1{,}295\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ und die molare Masse $M_L = 29\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$ sein.

a) Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit der Luftmoleküle am Eintritt.

b) Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit der Luftmoleküle an der Austrittsöffnung?

c) Berechnen Sie die Teilchenstromdichte j_A an der Austrittsöffnung. Ist die Teilchenstromdichte $j_A = j_E$?

d) Wie viele Luftmoleküle treten pro Sekunde durch die Austrittsöffnung?

e) Vergleichen Sie die Geschwindigkeiten der Strömung mit der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit der Moleküle (**Hinweis:** Die wahrscheinlichste Geschwindigkeit der Moleküle ist das maximum der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung und es gilt: $v = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$)

Lösung zu Aufgabe 2

a) Es wird ein Liter Luft (Volumenangabe) pro Sekunde angeblasen, damit

$$V = A_E l$$

und

$$l = v_E t \Rightarrow \frac{V}{A_E} = v_E t$$

$$v_E = \frac{V}{A_E t} = \frac{1 \cdot 10^{-3}\mathrm{m}^3}{0{,}2 \cdot 10^{-4}\mathrm{m}^2 1\mathrm{s}} = 50\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

b) Das Volumen pro Zeit (Volumenstrom) am Einlass und Auslass muss gleich groß sein.

$$\frac{V}{t} = A_E v_E = A_A v_A \Rightarrow v_A = \frac{A_E}{A_A} v_E$$

$$v_A = \frac{0{,}2\mathrm{cm}^2}{200\mathrm{cm}^2} 50\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0{,}05\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

c) Eine (Teilchen)Stromdichte j entspricht der Anzahl an Teilchen N pro Zeit und Fläche,

$$j = \frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$$

Wobei $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$ dem Teilchenstrom entspricht. Die Anzahl an Luft Molekülen ergibt sich aus,

$$m = \rho_L V$$

und

$$n = \frac{m}{M_L} \Rightarrow n = \frac{\rho_L V}{M_L}$$

Mit der Avogadro Konstanten N_A ist die Teilchenanzahl $N = N_A\, n$. Damit ergibt sich die Stromdichte j_A am Ausgang

$$j_A = \frac{N_A n}{A_A t} = \frac{N_A \rho_L V}{A_A M_L t}$$

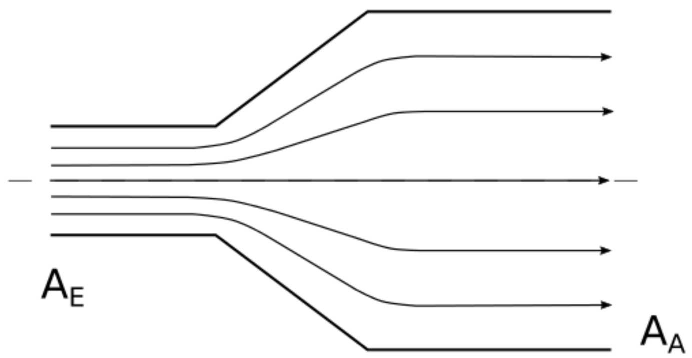

Abbildung 1: Strömungsfeld im Rohr zur Veranschaulichung des Volumenstroms und der (Teilchen)Stromdichte.

Der Volumenstrom am Eingang und Ausgang ist gleich (vgl. Anzahl der Pfeile in Abb. 1). Die (Teilchen)Stromdichte unterscheidet sich am Eingang und Ausgang, zeichnet man die Trajektorien der Moleküle ein erhält man am Ausgang weniger Pfeile pro Fläche als am Eingang.

$$n = \frac{\rho_L V}{M_L} = \frac{1{,}295\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} 1\cdot 10^{-3}\mathrm{m}^3}{29\cdot 10^{-3}\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}} = 44{,}655\cdot 10^{-3}\mathrm{mol}$$

$$j_A = \frac{N_A n}{A_A t} = \frac{6{,}022\cdot 10^{23}\mathrm{mol}^{-1} 44{,}655\cdot 10^{-3}\mathrm{mol}}{0{,}02\mathrm{m}^2 1\mathrm{s}} = 1{,}345\cdot 10^{24}\frac{\mathrm{Teilchen}}{\mathrm{m}^2\mathrm{s}}$$

d) Mit der (Teilchen)Stromdichte j_A am Ausgang (2) entweichen in einer Sekunde:

$$N = j_A A_A t = 1{,}345\cdot 10^{24}\frac{\mathrm{Teilchen}}{\mathrm{m}^2\mathrm{s}} 0{,}02\mathrm{m}^2 1\mathrm{s} = 2{,}690\cdot 10^{22}\mathrm{Teilchen}$$

e) Die wahrscheinlichste Geschwindigkeit nach der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung ergibt sich durch Extremwertbildung:

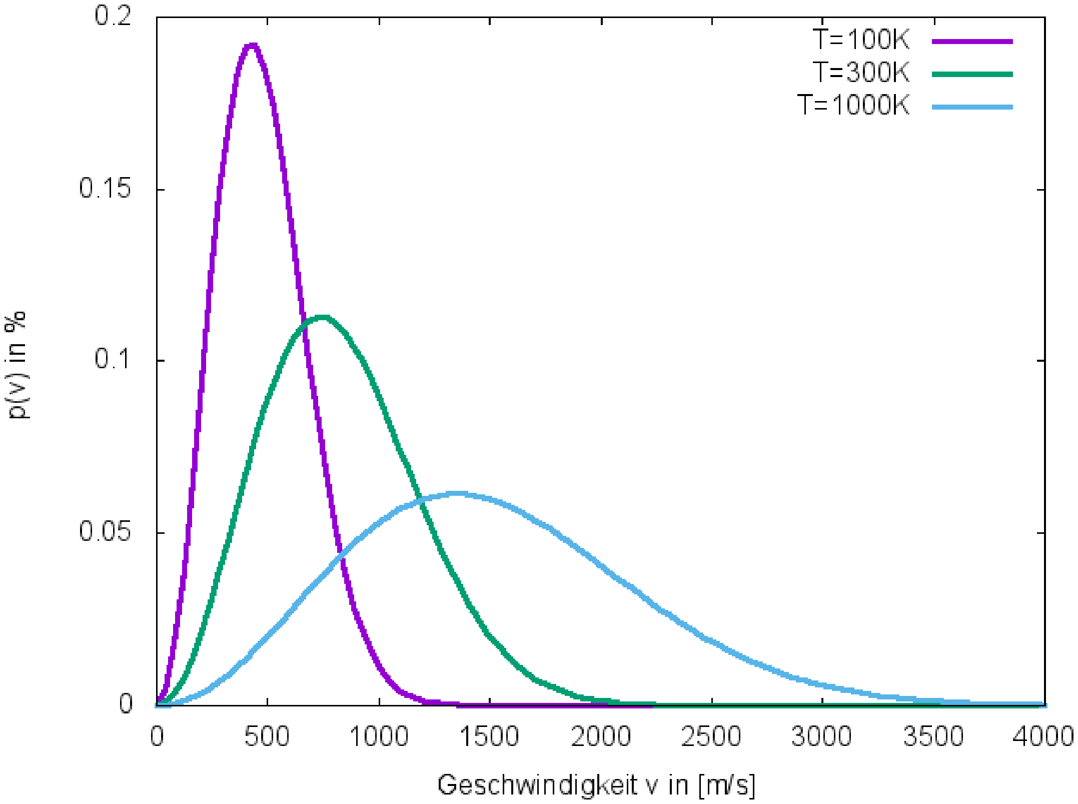

Abbildung 2: Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung für drei verschiedene Temperaturen. Die Fläche unter den Graphen ist immer gleich (Normierung), aber die Verteilung wird breiter je höher die Temperatur ist. Deshalb ist die Höhe des Maximums geringer für höhere Temperaturen.

Bilde die Ableitung von $p(v) = Cv^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$ (**Hinweis:**Verwende Produkt und Kettenregel!):

$$\frac{\mathrm{d}p(v)}{\mathrm{d}v} = C * \left(2ve^{-\frac{mv^2}{2kT}} + v^2 * \left(-\frac{m}{kT} ve^{-\frac{mv^2}{2kT}}\right)\right) = Ce^{-\frac{mv^2}{2kT}} v \left(2 - \frac{m}{kT} v^2\right)$$

Die Konstante $C \neq 0$ außerdem ist $e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \neq 0$. Die triviale Lösung ist $v = 0$ diese ist aber nicht physikalisch, da immer Restgeschwindigkeit vorhanden ist, außer wenn der absolute Nullpunkt erreicht ist.
$\Rightarrow$ Nur die Klammer ist relevant zur Maximumsuche.

$$\Rightarrow 2 - \frac{m}{kT} v^2 = 0$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Man benötigt noch die Masse eines Luftmoleküls:

$$m = \frac{M}{N_A} = \frac{29 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{mol}}}{6{,}022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}} = 4{,}82 \cdot 10^{-26}\text{kg}$$

Bei Raumtemperatur ($T = 300K = 27°\text{C}$) ist v_1:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2kT_1}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} 300\text{K}}{4{,}82 \cdot 10^{-26}\text{kg}}} = 414{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Bei $T = 100K = -173°\text{C}$ ist v_2:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2kT_2}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} 100\text{K}}{4{,}82 \cdot 10^{-26}\text{kg}}} = 239{,}3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Bei $T = 1000K = 727°\text{C}$ ist v_3

$$v_3 = \sqrt{\frac{2kT_3}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} 1000\text{K}}{4{,}82 \cdot 10^{-26}\text{kg}}} = 756{,}7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow v_1 \approx 2v_2 \approx 0{,}5v_3$$

$$\Rightarrow v_1 \approx 8v_E \approx 8000v_A$$

Aufgabe 3 Gravitation

Gegeben sei eine kugelförmige Massenverteilung mit homogener Dichte, ρ, und Radius, R_0. Der Mittelpunkt der Verteilung sei bei $r = 0$.

a) Berechnen Sie das Gravitationsfeld, $G(r)$, als Funktion des Abstands, r innerhalb und außerhalb von R_0.

b) Berechnen Sie die Kraft auf eine Probemasse, m, als Funktion des Abstands, r.

c) Berechnen Sie das Gravitationsfeld für den Fall der Erde mit $R_0 = 6{,}375 \cdot 10^6$ m und Dichte $\rho = 5{,}506 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Die Gravitationskonstante beträgt $\gamma = 6{,}67408 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}\,\text{s}^2}$.

d) Zeichnen Sie das Gravitationsfeld als Funktion von r.

e) Wie groß ist das Gravitationsfeld auf dem Mond?

f) Brechnen Sie das Gravitationspotential.

g) Welche Gravitationskraft wirkt von der Erde auf den Mond (Masse Mond: $m_M = 7{,}349 \cdot 10^{22}$ kg)?

h) Welche Geschwindigkeit muss ein Körper auf der Erdoberfläche besitzen um das Gravitationsfeld der Erde zu verlassen?

i) Sie bohren ein Loch durch den Erdmittelpunkt und springen (von der Erdoberfläche) hinein. Welche Bewegung vollführen Sie, wenn Sie die Reibung vernachlässigen?

j) Nach welcher Zeit, t_E, erreichen Sie die andere Seite der Erde?

Lösung zu Aufgabe 3

a) Die Massenverteilung ist isotrop, d. h. keine Raumrichtung ist bevorzugt. Insbesondere kann man das Problem beliebig um den Ursprung rotieren ohne es zu verändern. Das Gravitationsfeld, $\vec{G}$, darf folglich nur Komponenten in r–Richtung besitzen und ist nur vom Abstand abhängig.
Zur Bestimmung des Gravitationsfeldes benutzt man den Gaußschen Satz für die Gravitation:

$$\underbrace{\int_{A(r)} \vec{G}\, \mathrm{d}\vec{A}}_{\text{I1}} = -4\pi\,\gamma \underbrace{\int_{V(r)} \rho(\vec{r})\, \mathrm{d}V}_{\text{I2}} \tag{2}$$

Als Integrationsgebiet verwendet man eine Kugel mit Radius r. Siehe auch Abb. 3. Hierbei bezeichnet $A(r)$ die Oberfläche der Kugel und $V(r)$ die Vollkugel, γ die Gravitationskonstante und $\rho(r)$ die Dichteverteilung. Man betrachtet zwei Fälle:

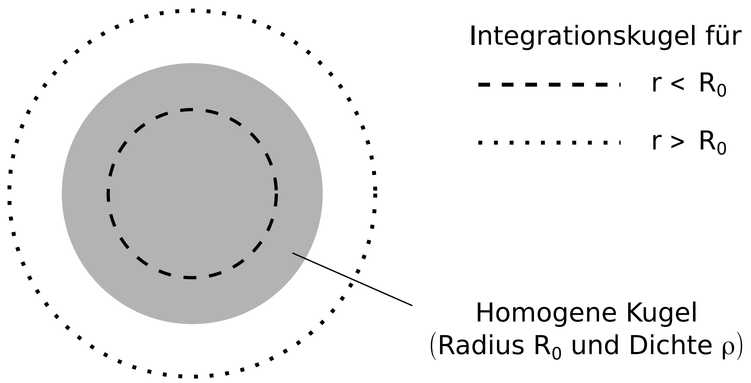

Abbildung 3: Massenverteilung und Integrationsgebiet für die Anwendung des Gaußschen Satzes.

Fall 1: $r \leq R_0$

Da das Gravitationsfeld nur Komponenten in r–Richtung hat, steht $\vec{G}$ immer senkrecht auf der Oberfläche $A(r)$, ($\vec{A} \parallel \vec{G}$). Das Integral I1 ergibt sich als Produkt der Oberfläche der Integrationskugel und dem Betrag des Gravitationsfeldes, welcher auf der Oberfläche konstant ist. Die Oberfläche der Kugel ist $4\pi\, r^2$.

$$\text{I1} = \int_{A(r)} \vec{G}\, \mathrm{d}\vec{A} = G(r)\, 4\pi r^2$$

Das Integral I2 integriert die Dichte über das Volumen der Kugel. Die Diche ist für $r < R_0$ konstant. Das Integral $\int_{V(r)} \mathrm{d}V$ ergibt das Volumen der Kugel, $\frac{4}{3}\pi r^3$.

$$\text{I2} = \int_{V(r)} \rho(\vec{r})\mathrm{d}V = \frac{4}{3}\pi\, \rho\, r^3$$

Setzt man I1 und I2 in Gleichung 2 ein und löst nach $G(r)$ auf, so bekommt man:

$$G(r) = -\frac{4}{3}\pi\,\gamma\,\rho\,r$$

Fall 2: $r \geq R_0$
Für die linke Seite von Gleichung 2 gilt das selbe wie in Fall 1.
Da r nun größer ist, als der Radius der Massenverteilung, R_0, ist das Integral I2 konstant und zwar gleich der Masse der Kugel mit Radius R_0:

$$\mathrm{I2} = \int_{V(r)} \rho(\vec{r})\mathrm{d}V = \frac{4}{3}\pi\,\rho\,R_0^3 \tag{3}$$

Setzt man I1 und I2 in Gleichung 2 ein und löst nach $G(r)$ auf so bekommt man:

$$G(r) = -\frac{4}{3}\pi\,\gamma\,\rho\,\frac{R_0^3}{r^2}$$

Für das Gravitationsfeld erhalten wir:

$$\vec{G}(r) = \begin{cases} -\hat{r}\,\frac{4}{3}\pi\,\gamma\,\rho\,r & r \leq R_0 \\ -\hat{r}\,\frac{4}{3}\pi\,\gamma\,\rho\,\frac{R_0^3}{r^2} & r \geq R_0 \end{cases} \tag{4}$$

$\hat{r}$ bezeichnet den Einheitsvektor in r–Richtung. Für $r = R_0$ gelten beide Ausdrücke. Das Gravitationsfeld ist stetig in $r = R_0$.
Das negative Vorzeichen bedeutet, dass das Gravitationsfeld in negative r–Richtung zeigt, also zum Mittelpunkt der Kugel. Die Gravitationkraft ist immer anziehend.

b) Die Kraft auf eine Probemasse, m, ist das Produkt aus Gravitationsfeld, $\vec{G}(r)$, und der Masse, m:

$$\vec{F}(r) = \begin{cases} -\hat{r}\,\frac{4}{3}\pi\,\gamma\,\rho\,m\,r & r \leq R_0 \\ -\hat{r}\,\frac{4}{3}\pi\,\gamma\,\rho\,m\,\frac{R_0^3}{r^2} & r \geq R_0 \end{cases} \tag{5}$$

c) Hierfür setzt man r $(= R_0)$, R_0, γ und ρ in Gleichung 4 ein:

$$\begin{aligned} \|\vec{G}(r = R_0)\| &= \frac{4}{3}\pi\,\gamma\,\rho\,R_0 \\ &= \frac{4}{3}\pi \cdot 6{,}67408 \cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \cdot 5{,}506 \cdot 10^3\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 6{,}375 \cdot 10^6\mathrm{m} \\ &= 9{,}811\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \end{aligned} \tag{6}$$

d) Siehe Abb. 4.

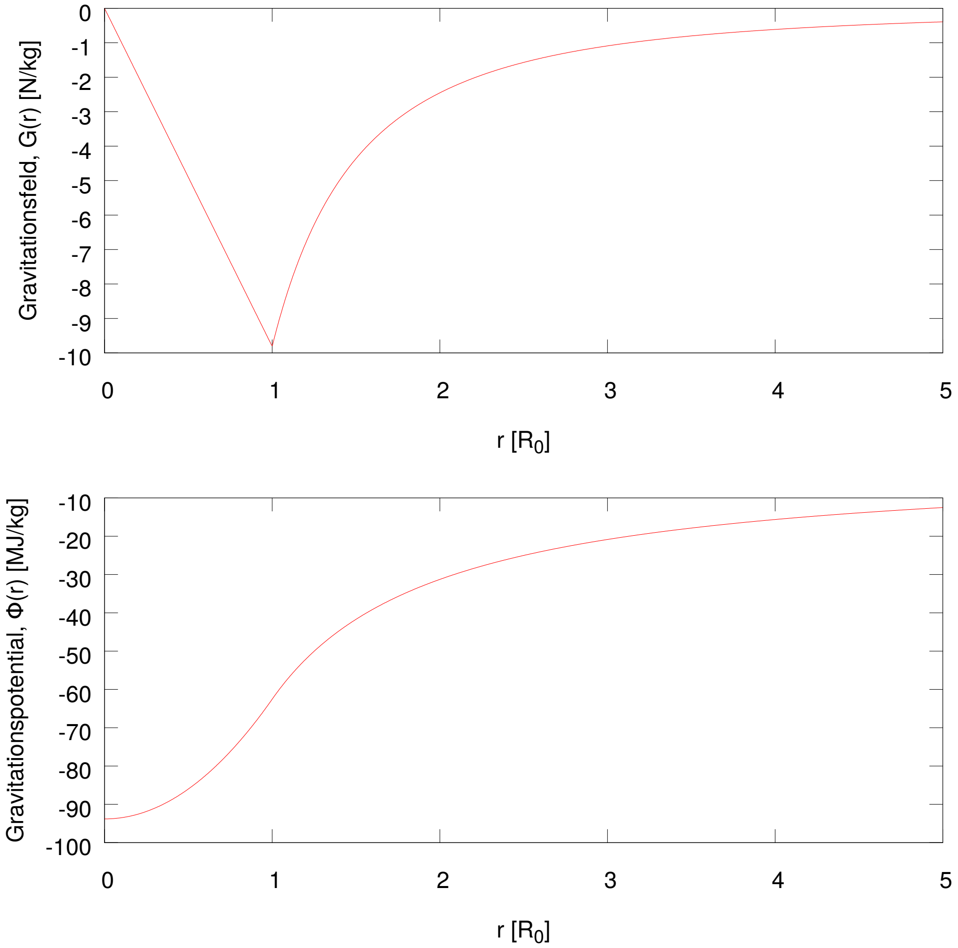

Abbildung 4: Gravitationsfeld– und potential als Funktion des Abstands vom Erdmittelpunkt in Einheiten des Erdradius, R_0.

e) Hierfür setzt man r ($= R_{Mond} = 1{,}737 \cdot 10^6\text{m}$), γ und $\rho_{Mond} = 3{,}34 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ in Gleichung 4 ein:

$$\begin{aligned}\|\vec{G}(r = R_{Mond})\| &= \frac{4}{3}\pi\,\gamma\,\rho_{Mond}\,R_{Mond} \\ &= \frac{4}{3}\pi \cdot 6{,}67408 \cdot 10^{-11}\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\,\text{s}^2} \cdot 3{,}34 \cdot 10^3\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 1{,}737 \cdot 10^6\text{m} \\ &= 1{,}622\frac{\text{N}}{\text{kg}} \end{aligned} \tag{7}$$

Zum Vergleich Gravitationsfeld der Erde auf dem Mond:

$$r = \Delta_{Erde-Mond} + R_0 = 3{,}84 \cdot 10^8\text{m} + 0{,}06 \cdot 10^8\text{m} = 3{,}9 \cdot 10^8\text{m}$$

$$
\begin{aligned}
\|\vec{G_{Erde}}(r)\| &= \frac{4}{3}\pi\,\gamma\,\rho\,\frac{R_0^3}{r^2} \\
&= \frac{4}{3}\pi \cdot 6{,}67408 \cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \cdot 5{,}506 \cdot 10^3\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot \frac{(6{,}375 \cdot 10^6\mathrm{m})^3}{(3{,}9 \cdot 10^8\mathrm{m})^2} \\
&= 0{,}03\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \qquad (8)
\end{aligned}
$$

$$g_{Erde} \approx 6 \cdot g_{Mond} \approx 300 \cdot g_{Erde-Mond}$$

f) Da das Gravitationsfeld, $\vec{G}(r)$, radialsymmetrisch ist und nur von r abhängt, bekommen wir das Gravitationspotential, Φ, als Integral über das Gravitationsfeld:

$$\Phi(r) = -\int_\infty^r G(r')\,\mathrm{d}r' \qquad (9)$$

Da das Potential nur bis auf eine beliebige additive Konstante bestimmt ist, können wir die untere Grenze des Integrals frei wählen. Oft wird die Konvention gewählt, dass das Potential im Unendlichen verschwindet, was gleichbedeutend ist mit ∞ als untere Integrationsgrenze. Wir unterscheiden wieder zwei Fälle:

Fall 1: $r \geq R_0$

$$
\begin{aligned}
\Phi(r) &= -\int_\infty^r G(r')\,\mathrm{d}r' \\
&= \frac{4}{3}\pi\,\gamma\,\rho\,R_0^3 \int_\infty^r \frac{\mathrm{d}}{r'^2} = \frac{4}{3}\pi\,\gamma\,\rho\,R_0^3\,\frac{-1}{r'}\bigg|_\infty^r \\
&= -\frac{4}{3}\pi\,\gamma\,\rho\,\frac{R_0^3}{r} \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Fall 2: $r \leq R_0$

$$
\begin{aligned}
\Phi(r) &= -\int_\infty^r G(r')\,\mathrm{d}r' = \underbrace{-\int_\infty^{R_0} G(r')\,\mathrm{d}r'}_{\Phi(R_0)} - \int_{R_0}^r G(r')\mathrm{d}r' \\
&= \Phi(R_0) + \frac{4}{3}\pi\,\gamma\,\rho \int_{R_0}^r r'\,\mathrm{d}r' = \Phi(R_0) + \frac{4}{3}\pi\,\gamma\,\rho\,\frac{r'^2}{2}\bigg|_{R_0}^r \\
&= \Phi(R_0) + \frac{2}{3}\pi\,\gamma\,\rho\,\left(r^2 - R_0^2\right) \\
&= -\frac{2}{3}\pi\,\gamma\,\rho\,\left(3R_0^2 - r^2\right) \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Es ergibt sich:

$$\Phi(r) = \begin{cases} -\frac{2}{3}\pi\,\gamma\,\rho\,\left(3R_0^2 - r^2\right) & r \leq R_0 \\ -\frac{4}{3}\pi\,\gamma\,\rho\,\frac{R_0^3}{r} & r \geq R_0 \end{cases} \qquad (12)$$

Das Potential ist ebenfalls in Abb. 4 dargestellt.

g) Die Gravitationskraft ist definiert als:

$$F = \gamma \frac{m_{Erde} m_{Mond}}{\Delta^2_{Erde-Mond}} = 6{,}67408 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \frac{5{,}972 \cdot 10^{24}\mathrm{kg} \cdot 7{,}349 \cdot 10^{22}\mathrm{kg}}{(3{,}84 \cdot 10^8\mathrm{m})^2} = 1{,}99 \cdot 10^{20}\mathrm{N}$$

h) Die potentielle Energie, die eine Masse gewinnt, wenn sie aus dem Gravitationsfeld der Erde zu entfernen wird, beträgt: $E_{\text{pot}} = m\,[\Phi(\infty) - \Phi(R_0)] = -m\Phi(R_0)$. Die kinetische Energie einer Masse beträgt: $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$. Setzt man $E_{\text{pot}} = E_{\text{kin}}$ und löst nach v auf, erhält man:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{-2\Phi(R_0)} = R_0 \sqrt{2\,\frac{4}{3}\pi\,\gamma\,\rho} \\ &= 6{,}375 \cdot 10^6\mathrm{m} \sqrt{\frac{8}{3}\pi 6{,}67408 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} 5{,}506 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} \\ &= 11{,}18 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{13}$$

Die Fluchtgeschwindigkeit wird auch als zweite kosmische Geschwindigkeit bezeichnet.

i) Die rücktreibende Kraft (Gravitationskraft) ist für $r \leq R_0$ proportional zum Abstand vom Erdmittelpunkt und zu diesem gerichtet, wie beim harmonischen Oszillator, wo die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung ist. Auch Sie werden harmonisch oszillieren.

j) Hierzu müssen wir die Bewegungsgleichung aufstellen und lösen: Nach Newton gilt: Masse mal Beschleunigung ist gleich der Summe der angreifenden Kräfte: $ma = mG$:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - G &= 0 \\ \ddot{x} + \underbrace{\frac{4}{3}\pi\,\gamma\,\rho}_{\omega^2} \cdot x &= 0 \\ \ddot{x} + \omega^2 \cdot x &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Die Kreisfrequenz der Schwingung ist identifiziert und außerdem $\omega = 2\pi/T$ (T: Periode der Schwingung). Die andere Seite der Erde erreichen Sie nach einer halben Periode:

$$\begin{aligned} t_E &= \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi\,\gamma\,\rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{4 \cdot 6{,}67408 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} 5{,}506 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}} \\ &= 2532\,\mathrm{s} \approx 42\,\mathrm{min} \end{aligned} \tag{15}$$