Institut für Angewandte Physik
und Messtechnik
Prof. Dr. Günther Dollinger

Übungen zur Experimentalphysik I

Musterlösung Blatt 4

Aufgabe 1 Wasser

Nehmen Sie Wasser im flüssigen Zustand (Dichte $\rho = 1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$)

a) Wie groß ist die molare Masse von Wasser in g/mol?

b) Welches Volumen nimmt ein 1 mol Wasser ein?

Das Wasser (1 mol) geht nun in den gasförmigen Zustand über (behandeln Sie es wie ein ideales Gas).

c) Welches Volumen nimmt das gasförmige Wasser bei $\theta = 0°$ C und einem Druck von $p = 1000\,\mathrm{hPa}$ ein?

d) Um welchen Faktor unterscheiden sich die Dichten (flüssig - gasförmig)?

e) Wie viele Wassermoleküle sind vorhanden?

f) Schätzen Sie den mittleren Abstand der Moleküle im flüssigen und gasförmigen Zustand ab.

Lösung zu Aufgabe 1

Die Größen Masse m, Stoffmenge n, Volumen V und Teilchenanzahl N sind miteinander verknüpft!

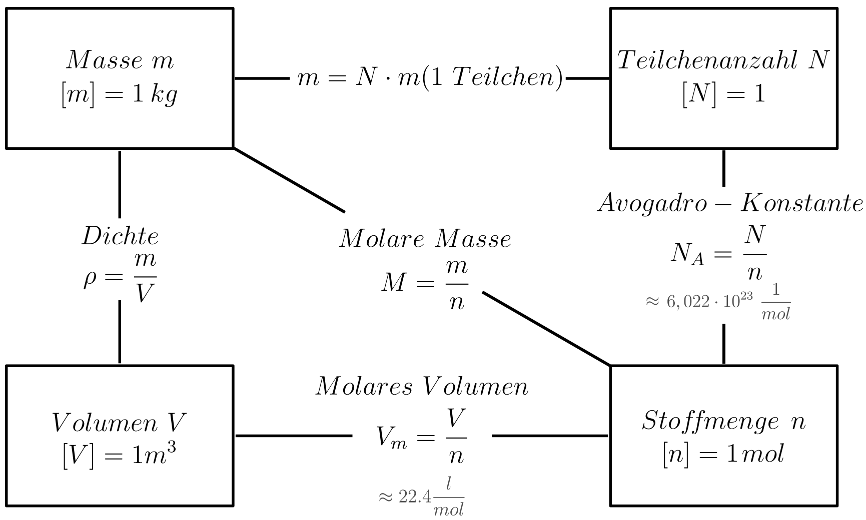

Abbildung 1: Zusammenhang Volumen, Molare Masse, Masse, Stoffmenge und Teilchenzahl

a) Die molare Masse M_{H_2O} von Wasser (H_2O) ist $M_{H_2O} = 2\,M_H + M_O = 2 \cdot 1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} + 1 \cdot 16\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} = 18\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$

b) 1 Mol flüssiges Wasser entspricht 18 g und $\rho = 1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ damit

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{18\,\mathrm{g}}{1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}} = 18\,\mathrm{cm}^3 = 18\,\mathrm{Milliliter}$$

c) Anmerkung zur Einheit Pascal. Drücke sollten immer in Pascal [Pa] umgerechnet werden, da dies eine kohärente SI-Einheit ist, denn 1 Pa = 1 $\mathrm{N/m^2}$. Weiterhin wird verwendet, dass $\left[\mathrm{Pa} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}\right]$. Ein Bar [bar] entspricht 10^5 Pa.
Rechnung für die Annahme eines idealen Gases! $p = 1000\,\mathrm{hPa}$, $T = 0°\mathrm{C} = 273,15\,\mathrm{K}$

$$pV = nRT$$

$$V = \frac{nRT}{p} = \frac{1\,\mathrm{mol}\,8,31\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}\,273,15\,\mathrm{K}}{10^5\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}} = 2,27\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3 = 22,7\,\mathrm{Liter}$$

Anmerkung: Bei Normaldruck 1013,25 hPa wäre $V = 22,4\,\mathrm{Liter}$

d)

$$m_{fl} = m_{gas}$$

$$\rho_{fl}\,V_{fl} = \rho_{gas}\,V_{gas} \Rightarrow \frac{\rho_{fl}}{\rho_{gas}} = \frac{V_{gas}}{V_{fl}} = \frac{22,7\,\mathrm{Liter}}{18\cdot 10^{-3}\,\mathrm{Liter}} = 1261,1$$

e) 1 Mol enthält $6,022\cdot 10^{23}$ H_2O Moleküle, $N_A = \frac{N}{n}$ (N_A Avogadro-Konstante, N Teilchenanzahl, n Stoffmenge)

f) Für $6,022\,10^{23}$ gleichmäßig verteile Teichen gilt: $\sqrt[3]{N}$. Bei einem Würfel mit dem Volumen V entspricht die Kantenlänge $a = \sqrt[3]{V}$. Der mittlere Abstand ist damit:

$$\bar{x}_{fl} = \sqrt[3]{\frac{V_{fl}}{N}} = \sqrt[3]{\frac{18\,\mathrm{cm}^3}{6,022\cdot 10^{23}}} = 3,10\cdot 10^{-8}\,\mathrm{cm} = 0,310\,\mathrm{nm}$$

$$\bar{x}_{gas} = \sqrt[3]{\frac{V_{gas}}{N}} = \sqrt[3]{\frac{22\,700\,\mathrm{cm}^3}{6,022\cdot 10^{23}}} = 3,35\cdot 10^{-7}\,\mathrm{cm} = 3,35\,\mathrm{nm}$$

Aufgabe 2 ideales Gas

Ein Behälter mit einem Volumen von $V = 10$ Liter ist mit reinem Sauerstoff (^{16}O) gefüllt. Bei einer Raumtemperatur ($\theta = 20°\mathrm{C}$) herrscht ein Druck von $p_0 = 0,5\cdot 10^7\mathrm{Pa}$.

a) Berechnen Sie den Druck p_1, wenn die Temperatur auf $\theta = 100°\mathrm{C}$ erhöht wird.

b) Berechnen Sie die Masse eines O_2-Moleküls.

c) Wie viele Freiheitsgrade der Bewegung hat ein O_2-Molekül?

d) Welche Energie muss dem Gas für die Temperaturerhöhung in Aufgabe a) zugeführt werden?

e) Der Behälter wird geöffnet. Im Behälter stellt sich der Umgebungsdruck $p_N = 1000\,\mathrm{hPa}$ und $\theta = 20°\mathrm{C}$ ein. Wie groß ist die nun im Behälter verbleibende Gasmasse?

Lösung zu Aufgabe 2

a) $T_0 = 20°\text{C} = 293,15\text{K}$, $T_1 = 100°\text{C} = 373,15\text{K}$. Das Volumen des Behälters ($V_0 = V_1$) und die Stoffmenge n ist konstant, dadurch

$$p_0 V_0 \;=\; n\,R\,T_0 \Rightarrow \frac{p_0}{T_0} \;=\; \frac{n\,R}{V_0}\text{und} p_1 V_1 \;=\; n\,R\,T_1 \Rightarrow \frac{p_1}{T_1} \;=\; \frac{n\,R}{V_1}$$

$$\frac{p_0}{T_0} = \frac{p_1}{T_1} \Rightarrow p_1 = p_0\,\frac{T_1}{T_0} \;=\; 0,5 \cdot 10^7\,\text{Pa}\,\frac{373,15\,\text{K}}{293,15\,\text{K}}$$
$$= 0,6365 \cdot 10^7\,\text{Pa} \;=\; 63,65\,\text{bar}$$

b) Sauerstoff kommt auf der Erde zu 99,756% als ^{16}O vor. Ein O_2-Molekül besteht aus 2 Atomen, die molare Masse M_{O_2} beträgt:

$$M_{O_2} = 2\,M_O \;=\; 2 \cdot 16\,\frac{\text{g}}{\text{mol}} \;=\; 32\frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

mit $n_{O_2} = \frac{m_{O_2}}{M_{O_2}}$ und $p\,V \;=\; n\,R\,T$ ergibt sich:

$$m_{O_2} = M_{O_2}\,\frac{p\,V}{R\,T} \;=\; 32 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{kg}}{\text{mol}}\,\frac{0,5 \cdot 10^7\,\frac{\text{J}}{\text{m}^3}\,10 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3}{8,31\,\frac{\text{J}}{\text{mol}\,\text{K}}293,15\,\text{K}} \;=\; 0,6567\,\text{kg}$$

Das gespeicherte Gas wiegt also 0,6567 kg, über $N_A = \frac{N}{n}$ errechnet sich die Anzahl der Moleküle

$$N = N_A n = N_A \frac{m_{O_2}}{M_{O_2}} = 6,022 \cdot 10^{23}\frac{1}{\text{mol}}\frac{0,6567\text{kg}}{32 \cdot 10^{-3}\frac{\text{kg}}{\text{mol}}} = 0,1236 \cdot 10^{26}\,\text{Molekuele}$$

Damit ergibt sich die Masse eines O_2-Moleküls zu:

$$m = \frac{m_{O_2}}{N} \;=\; \frac{0,6567\,\text{kg}}{0,1236\,10^{26}} \;=\; 5,31 \cdot 10^{-26}\,\text{kg}$$

Alternative Lösung I: Man betrachtet ein Mol des Gases und Teilt durch die Teilchenanzahl N,

$$\frac{n}{N} \;=\; \frac{m}{M_{O_2}} \Rightarrow m \;=\; \frac{n\,M_{O_2}}{N} \;=\; \frac{1\,\text{mol}\,32 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{kg}}{\text{mol}}}{6,022 \cdot 10^{23}} \;=\; 5,31 \cdot 10^{-26}\,\text{kg}$$

Alternative Lösung II: Die Aufgabe geht deutlich schneller, wenn die Atomare Masseneinheit $u = 1,66 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$ bekannt ist. Damit ist die Masse $m = 32\,u = 5,31 \cdot 10^{-26}\,\text{kg}$

c) Jedes Molekül mit n Atomen besitzt allgemein $f = 3\,n$ Freiheitsgrade. Ein zweiatomiges lineares Molekül besitzt demnach 6 Freiheitsgrade, 3 Freiheitsgrade der Translation, 2 Freiheitsgrade der Rotation und 1 Freiheitsgrade der Vibration. Die Freiheitsgrade 3 der Translation entsprechen den Bewegungen entlang der Raumachsen . Die 2 Freiheitsgrade der Rotation entsprechen der Rotation um die y-Achse bzw. z-Achse in der z-x Ebene bzw. der y-x Ebene. Der Freiheitsgrad der Vibration entlang der Bindungsachse (x-Achse) errechnet sich über $f_{vib} = 3\,n - f_{Trans} - f_{Rot}$. Der Freiheitsgrad der Vibration wird jedoch erst bei hohen Temperaturen angeregt.

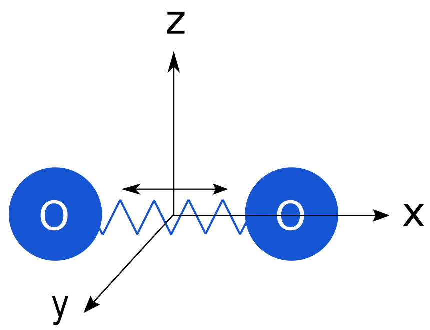

Abbildung 2: Modell eines O_2-Moleküls. Die Doppelbindung des linearen Moleküls kann bei hohen Temperaturen zu einer Streckschwingung angeregt werden.

d) Es gilt für ein Molekül $E = \frac{f}{2}\,k_B\,T$ mit $f = 5$. Für die gesamte zugeführte Energie

$$E_{Ges} = N\,\frac{f}{2}\,k_B\,\Delta T = \;0,1236{\cdot}10^{26}\,\frac{5}{2}\,1,38{\cdot}10^{-23}\,\mathrm{J/K}\,(373,15{-}293,15)\,\mathrm{K} = 3,411{\cdot}10^{4}\,\mathrm{J}$$

$$n = \frac{m_{O_2}}{M_{O_2}} \;=\; \frac{p_N\,V}{R\,T}$$

$$m_{O_2} = M_{O_2}\,\frac{p_N\,V}{R\,T} \;= 32\cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}\;\frac{1\cdot 10^{5}\,\frac{J}{\mathrm{m}^3}\;10\cdot 10^{-3}\mathrm{m}^3}{8,31\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}\,293,15\,\mathrm{K}} \;=\; 0,013\,\mathrm{kg}$$

Aufgabe 3 Barometrische Höhenformel I

Ein Ballon schwebt, wenn sein Gesamtgewicht gleich dem Gesamtgewicht der verdrängten Luft (Auftriebskraft) ist. Anders ausgedrückt muss seine Gesamtmasse m_{ges} gleich der Masse m_L der verdrängten Luft sein. Die Gesamtmasse m_{ges} setzt sich zusammen aus der Masse m_F des Füllgases und der „Nettoballonmasse“ m_B, die sich aus Ballonhülle, Korb, Passagieren, Geräten usw. ergibt.
Ein nach unten offener Heißluftballon vom Volumen $V = 4300\,\mathrm{m}^3$ habe die Nettoballonmasse $m_B = 1450\,\mathrm{kg}$. Da der Ballon zur Atmosphäre hin offen ist, ergibt sich ein Druckausgleich zwischen der Gasfüllung (gegeben durch die erwärmte Luft) und der Atmosphäre. Der Luftdruck am Boden beträgt $p_0 = 980\,\mathrm{hPa}$. Die Lufttemperatur soll unabhängig von der Höhe $T_0 = 273\,\mathrm{K}$ betragen. Für die mittlere molare Masse M_L der Luft nehmen wir den Wert $M_L = 29\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$ an. Bei der Berechnung kann die Gültigkeit der idealen Gasgleichung vorausgesetzt werden.

a) Welche Temperatur T_1 muss die Luft im Ballon überschreiten, damit er vom Boden abheben kann?

b) Welche mittlere Temperatur T_2 muss die Luft haben, damit er in die Höhe $h_2 = 3000\,\mathrm{m}$ schwebt?

c) Gibt es für die Steighöhe des Ballons eine ober Grenze?

Für Aufgabe b) muss die barometrische Höhenformel angewandt werden $p(h) = p_0 \, \mathrm{e}^{-\frac{M\,g\,h}{R\,T_0}}$

Lösung zu Aufgabe 3

Die Temperatur T_0 und das Volumen V sind fest vorgegeben, darum hängt die Masse der verdrängten Luft m_L nur vom Druck p ab, also $m_L = m_L(p(h))$. Die Masse der erwärmten Luft im Ballon m_F hängt von Druck und ihrer Temperatur T_F ab, also $m_F = m_F(p(h), T_F)$. Für einen schwebenden Ballon muss die Masse der verdrängten Luft der Gesamtmasse des Ballons entsprechen $m_{ges} = m_L = m_F + m_B$, damit:

$$m_L(p) = m_F(p, T_F) + m_B$$

Geteilt durch das Volumen des Ballons V erhält man:

$$\Delta\rho = \rho_L(p) - \rho_F(p, T_F) \; = \; \frac{m_B}{V} \tag{1}$$

Mit ρ_L der Dichte der Atmosphäre und ρ_F der Dichte der Luft im Ballon. Mit Hilfe der Gasgleichung und $V_{L,\,F} = \frac{m}{\rho_{L,\,F}}$ ergibt sich:

$$p_L \frac{m}{\rho_L} = nRT_L \Rightarrow \rho_L = \frac{m}{n}\frac{p_L}{RT_L} = M\frac{p_L}{RT_L} \tag{2}$$

$$p_F \frac{m}{\rho_F} = nRT_F \Rightarrow \rho_F = \frac{m}{n}\frac{p_F}{RT_0} = M\frac{p_F}{RT_F} \tag{3}$$

Durch den Druckaustausch ist weiterhin $p_F = p_L = p$. Setzt man Gleichung (2) und (3) in (1) ein:

$$\Delta\rho = \frac{Mp}{R}\left(\frac{1}{T_L} - \frac{1}{T_F}\right) = \frac{m_B}{V} \tag{4}$$

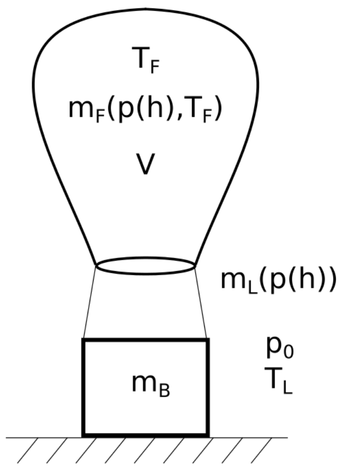

Abbildung 3: Skizze des Ballons zu Aufgabe 3 mit relevanten Abhängigkeiten.

a) Gesucht ist die Temperatur bei der der Ballon am Boden gerade schwebt. Dazu wird in Gleichung (4) für $p = p_0$ der Druck am Boden eingesetzt. Für die Temperatur der verdrängten Luft wird $T_L = T_0$ gesetzt. Die gesuchte Temperatur T_1 entspricht der Temperatur des Füllgases T_F, dazu wird Gleichung (4) umgestellt,

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_0} - \frac{R\,m_B}{M\,V\,p_0} = \frac{1}{273\mathrm{K}} - \frac{8,31\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}1450\mathrm{kg}}{29\cdot 10^{-3}\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}4300\mathrm{m}^3 98\cdot 10^3\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}} = 2,67710^{-3}\frac{1}{\mathrm{K}} \quad (5)$$

$$\Rightarrow T_1 = 373,61\mathrm{K}$$

Bei T_1 schwebt der Ballon, um abzuheben muss die Temperatur überschritten werden.

b) Für den Druck p in der Höhe h gilt $p(h) = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT_0}}$. Für eine Höhe von 3000 m ergibt sich ein Druck von

$$p_2(3000\mathrm{m}) = 980 e^{-\frac{29\cdot 10^{-3}\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}9,81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}3000\mathrm{m}}{8,31\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}273\mathrm{K}}}\mathrm{hPa} = 673\mathrm{hPa}$$

Für die Höhe von 3000 m wird in Gleichung (4) $p = p_2$ und $T_L = T_0$ gesetzt (laut Aufgabentext ist die Temperatur unabhängig von der Höhe), die gesuchte Temperatur des Füllgases in 3000 m Höhe T_2 entspricht wieder T_F in Gleichung (4),

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{T_0} - \frac{Rm_B}{MVp_2} = \frac{1}{273\mathrm{K}} - \frac{8,31\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}1450\mathrm{kg}}{29\cdot 10^{-3}\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}4300\mathrm{m}^3 6,7310^4\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}} = 2,22710^{-3}\frac{1}{\mathrm{K}}$$

$$T_2 = 448,99\,\mathrm{K}$$

Wie schon in in a) vermutet ist $T_2 > T_1$

c) Für die Lösung betrachtet man den temperaturabhängigen Teil der Gleichung (4), mit der Idee das Füllgas beliebig hoch erhitzen zu können

$$\lim_{T_F\to\infty}\frac{Mp}{R}\left(\frac{1}{T_L} - \frac{1}{T_F}\right) = \frac{Mp}{R}\left(\frac{1}{T_L} - 0\right) = \frac{m_B}{V}$$

Damit ist der minimale Druck p_{min} bei dem der Ballon gerade noch schwebt berechenbar durch:

$$p_{min} = \frac{m_B R T_0}{VM} = \frac{1450\mathrm{kg}8,31\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}273\mathrm{K}}{4300\mathrm{m}^3 29\cdot 10^{-3}\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}} = 264\mathrm{hPa}$$

Der minimale Druck in die Höhenformel eingesetzt liefert die maximale Steighöhe h_{max}

$$p_{min}(h_{max}) = p_0 e^{-\frac{Mgh_{max}}{RT_0}}$$

$$\ln\left(\frac{p_{min}}{p_0}\right) = -\frac{Mgh_{max}}{RT_0}$$

$$h_{max} = -\frac{\ln\left(\frac{p_{min}}{p_0}\right)RT_0}{Mg} = -\frac{\ln\left(\frac{264\mathrm{hPa}}{980\mathrm{hPa}}\right)8,31\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}273\mathrm{K}}{29\cdot 10^{-3}\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}9,81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 10,46\mathrm{km}$$