Institut für Angewandte Physik
und Messtechnik
Prof. Dr. Günther Dollinger

Übungen zur Experimentalphysik I

Musterlösung Blatt 3

Aufgabe 1 Trägheistmoment II

Ein Vollzylinder (Radius R, Masse M, homogene Dichte ρ), ein unendlich dünner Hohlzylinder (Radius R, Masse M) und eine Kugel (Radius R, Masse M, homogene Dichte ρ) rollen reibungsfrei über eine schiefe Ebene hinunter.

a) Welcher Körper ist als Erster unten? Berechnen Sie dazu das entsprechende Trägheitsmoment der Kugel (Zylinderträgheitsmomente sind aus der Vorlesung bekannt).

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Körper wenn die Starthöhe auf der schiefen Ebene 2 m beträgt.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Berechne zuerst das Trägheitsmoment der Kugel. Allgemein gilt: $J = \int r^2 \mathrm{d}m$ und $dm = \rho \cdot \mathrm{d}V$
Das Trägheitsmoment einer Scheibe ist bekannt ($J_S = \frac{1}{2}mR^2$). Die Kugel kann als Zusammensetzung von aufeinander gestapelten Scheiben betrachtet werden (siehe Skizze).

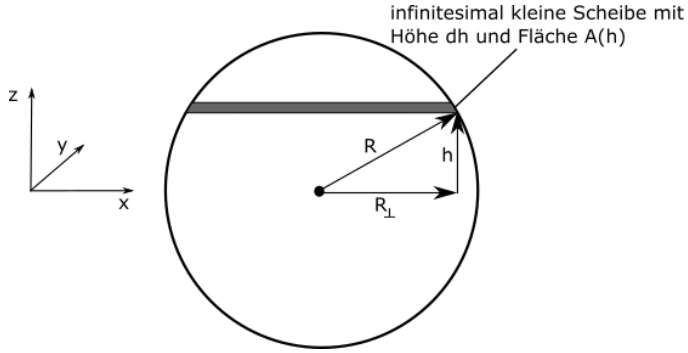

Abbildung 1: Zerlegung der Kugel in kleine Scheiben.

Ansatz:

$$\mathrm{d}J = \frac{1}{2}\mathrm{d}m(h) \cdot R_\perp^2(h)$$

Die Masse einer Scheibe ist von der Höhe h abhängig und betrachtet wird NUR der senkrechte Abstand $R_\perp$ von der Drehachse, welcher auch von h abhängig ist. Es gilt:

$$\mathrm{d}J = \frac{1}{2}\rho \mathrm{d}V(h) \cdot R_\perp^2(h) = \frac{1}{2}\rho A \mathrm{d}h \cdot R_\perp^2(h) = \frac{1}{2}\rho\pi \mathrm{d}h \cdot R_\perp^{2^2}(h) = \frac{1}{2}\rho\pi \mathrm{d}h \cdot (R^2 - h^2)^2$$

Die Integrationsgrenzen für h sind -R und R. Die Symmetrie der Kugel erlaubt uns die Integrationsgrenzen von 0 bis R zu wählen, also das berechnen der halben Kugel. Verdoppeln ergibt die ganze Kugel.

$$J = \frac{1}{2}\rho\pi \cdot 2\int_0^R \mathrm{d}h(R^4 - 2R^2h^2 + h^4) = \rho\pi(R^5 - \frac{2}{3}R^5 + \frac{1}{5}R^5) = \rho\pi\frac{8}{15}R^5$$

aus $\rho = \frac{M}{V}$ und $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, also $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ ergibt sich:

$$J = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{8}{15}\pi R^5 = \frac{2}{5}MR^2$$

Die Bewegungsenergie der Kugel ist aufgeteilt in Rotationsenergie $\frac{1}{2}J\omega^2$ und lineare Bewegungsenergie $\frac{1}{2}Mv^2$. Je kleiner das Trägheitsmoment umso größer ist der Anteil an linearer Bewegungsenergie! Mit $J_K = \frac{2}{5}MR^2$, $J_{VZ} = \frac{1}{2}MR^2$ und $J_{HZ} = MR^2$

$$J_K < J_{VZ} < J_{HZ}$$

Die Kugel ist am schnellsten unten gefolgt vom Vollzylinder und zuletzt dem Hohlzylinder.

b) Energieerhaltung!

$$Mgh = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2 \qquad \omega = \frac{v}{R}$$

für Kugel: $gh = \frac{1}{5}v^2 + \frac{1}{2}v^2 = \frac{7}{10}v^2$ $\qquad v = \sqrt{\frac{10}{7}gh} = \sqrt{\frac{10}{7}\cdot 9,81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 2\,\mathrm{m}} = 5,29\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

für Vollzylinder: $gh = \frac{1}{4}v^2 + \frac{1}{2}v^2 = \frac{3}{4}v^2$ $\qquad v = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = \sqrt{\frac{4}{3}\cdot 9,81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 2\,\mathrm{m}} = 5,16\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

für Hohlzylinder: $gh = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}v^2 = v^2$ $\qquad v = \sqrt{gh} = \sqrt{9,81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 2\,\mathrm{m}} = 4,43\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

ALTERNATIV: Berechnung Trägheitsmoment der Kugel mit Kugelkoordinaten

$$\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

Wieder ist nur der senkrechte Abstand zur Drehachse $r_\perp$ zu betrachten der in Kugelkoordinaten ausgedrückt $r_\perp = r\cdot sin\theta$ ergibt. Es folgt

$$I = \int r_\perp^2\mathrm{d}m = \rho\int r_\perp^2\mathrm{d}V = \rho\int r^2\sin^2\theta\mathrm{d}V$$

Mit dV von Oben und entsprechenden Integrationsgrenzen für eine Kugel ergibt sich:

$$I = \rho\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{R=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi} r^4\sin^3\theta\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi\rho\cdot\frac{1}{5}R^5[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta]_0^\pi = 2\pi\rho\cdot\frac{1}{5}R^5\cdot\frac{4}{3}$$

mit $\rho = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3}$ folgt

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

Aufgabe 2 Trägheitsmoment und Drehimpuls I

Eine punktförmige Masse m rotiert an einem masselosen Faden (Länge r_0) mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_0.

a) Geben sie das Trägheitsmoment I an.

b) Wie groß ist der Drehimpuls L_0?

c) Der Faden wird durchtrennt (Zeitpunkt t_0). In welche Richtung bewegt sich die Masse?

d) Bleibt der Drehimpuls des Systems erhalten?

Lösung zu Aufgabe 2

a) Bei einem beliebigen starren Körper, dessen Massenelemente Δm_i den Abstand r_i zur Drehachse haben, ist das Trägheitsmoment

$$J = \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

Für eine punktförmige Masse m auf einer Kreisbahn mit dem Radius r_0 gilt:

$$J = m r_0^2$$

b)

$$\vec{L}_0 = \vec{r}_0 \times \vec{p}$$

c) Beim Durchtrennen des Fadens fliegt m <u>in Richtung von $\vec{p}$</u>.

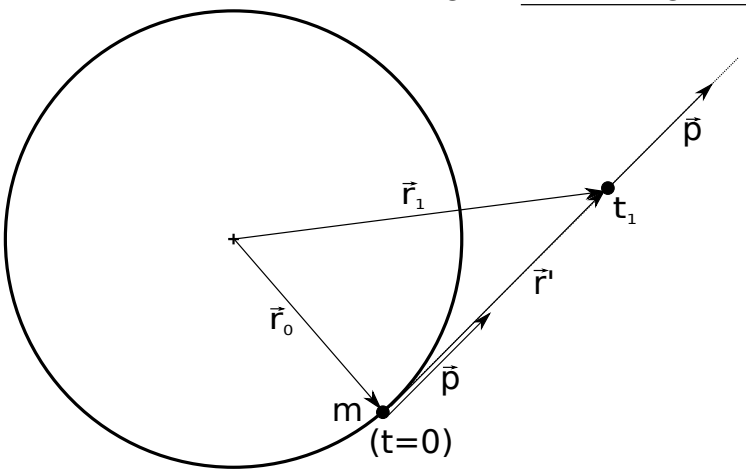

Abbildung 2: Lösungsskizze zum rotierenden Massenelement.

d) Nach der Zeit t_1 ist m $\vec{r}_1$ vom Rotationszentrum entfernt.

$$\rightarrow \vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{p}$$

wobei $\vec{r_1} = \vec{r}_0 + \vec{r}\,'$ mit $\vec{r}\,'$ der Verschiebungsvektor ist.

$$\rightarrow \vec{L}_1 = (\vec{r}_0 + \vec{r}\,') \times \vec{p} = \vec{r}_0 \times \vec{p} + \vec{r}\,' \times \vec{p}$$

$\vec{r}\,' \times \vec{p} = 0$ da $\vec{r}\,' \parallel \vec{p}$

$$\Rightarrow \vec{L}_0 = \vec{L}_1$$

Allgemein gilt:
Der Drehimpuls ist invariant unter Verschiebungen entlang des Vektors $\vec{p}$

Aufgabe 3 Kreisel

Ein Kinderkreisel (Scheibe) mit der Länge $R = 3\,\text{cm}$, Breite $r = 2\,\text{cm}$ und der Masse $m = 30\,\text{g}$ wird so gedreht, dass er mit 10 Umdrehungen pro Sekunde rotiert. Der Winkel zum Boden sei $\alpha = 60°$.

a) Berechnen Sie das wirkende Moment M für den Kreisel.

b) Mit welcher Larmorfrequenz ω_L präzediert der Kreisel? Wie verändert sich ω_L für einen baugleichen Kreisel mit doppelter Masse?

c) Für welche Frequenz sind bei gegebenem Kreisel die Larmorfrequenz ω_L und die Kreiselfrequenz ω gleich groß?

d) Beschreiben Sie qualitativ was für $\lim\limits_{\omega \to 0} \omega_L(\omega)$ bzw. $\lim\limits_{\omega \to \infty} \omega_L(\omega)$ passiert.

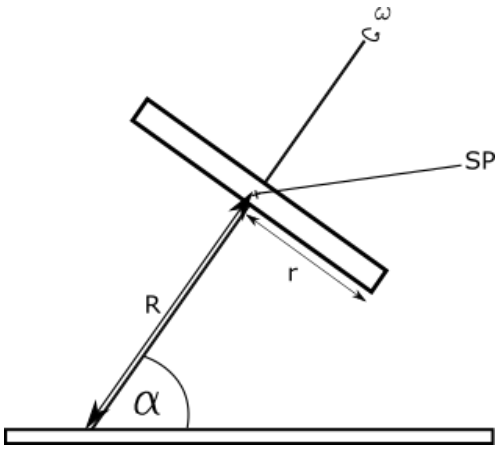

Abbildung 3: Kreisel

Lösung zu Aufgabe 3

a) Das Drehmoment ist definiert als $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. Man betrachte deswegen $R_\perp = R\cos\alpha$ oder wie in der VL $R_\perp = R\sin\beta$.

$$\Rightarrow |\vec{M}| = R\cos\alpha\; mg = 0,03\,\text{m} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,03\,\text{kg} \cdot 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 4,5 \cdot 10^{-3}\,\text{Nm}$$

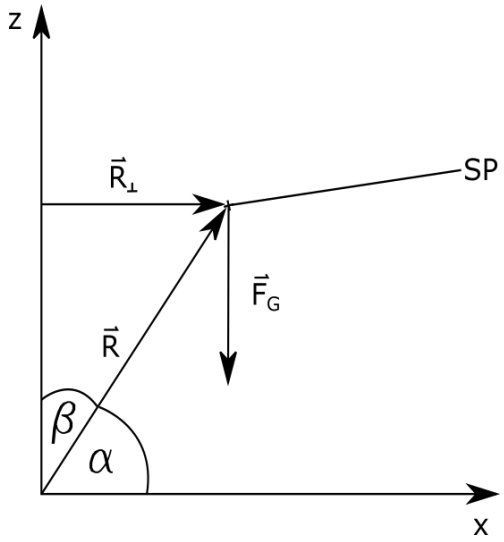

Abbildung 4: Kreisel Lösung

b) Aus der Vorlesung gilt:

$$\omega_L = \frac{|\vec{M}|}{L_\perp} = \frac{Rmg\cos\alpha}{L\cos\alpha} = \frac{mgR}{L} = \frac{mgR}{J\omega}$$

Der Kreisel ist eine Kreisscheibe und hat deswegen das Trägheitsmoment $J = \frac{1}{2}mr^2$. Nach ersetzen ergibt sich:

$$\omega_L = \frac{Rmg}{\frac{1}{2}mr^2\omega} = \frac{2Rg}{r^2\omega}$$

Aus der Angabe ergibt sich eine Kreiselfrequenz $f = 10\,\mathrm{Hz}$. Also $\omega = 2\pi f = 62,8\,\frac{1}{\mathrm{s}}$.

$$\Rightarrow \omega_L = \frac{2\cdot 0,03\,\mathrm{m}\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{(0,02\,\mathrm{m})^2\cdot 62,8\,\frac{1}{\mathrm{s}}} = 23,89\,\frac{1}{\mathrm{s}} \sim 3,8\,\frac{\text{Umdrehungen}}{\mathrm{s}}$$

Die Lamorfrequenz ist unabhängig von der Masse und bleibt somit gleich.

c) $\omega_L = \omega$

$$\omega_L = \frac{2Rg}{r^2\omega_L} \Rightarrow \omega_L^2 = \frac{2Rg}{r^2}$$

$$\omega_L = \sqrt{\frac{2Rg}{r^2}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0,03\,\mathrm{m}\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{(0,02\,\mathrm{m})^2}} = 38,73\,\frac{1}{\mathrm{s}} \sim 6,2\,\frac{\text{Umdrehungen}}{\mathrm{s}}$$

d) für $\omega \to 0$ geht $\omega_L \to \infty$, der Kreisel fällt um
für $\omega \to \infty$ geht $\omega_L \to 0$, der Drehimpuls ist so groß, dass das Drehmoment der Erde einen vernachlässigbaren Einfluss hat und der Kreisel bleibt an derselben Stelle