Institut für Angewandte Physik
und Messtechnik
Prof. Dr. Günther Dollinger

Übungen zur Experimentalphysik I

Musterlösung Blatt 2

Aufgabe 1 Schiefer Wurf

Ein Student steht auf dem Dach eines mehrstöckigen Hauses und wirft einen Schneeball senkrecht nach oben, so dass er 5,0 m über der Abwurfhöhe umkehrt.

a) Mit welcher Geschwindigkeit v_0 hat er den Ball abgeworfen?

b) Wie lange dauert es, bis er den Ball wieder auffangen kann?

c) Bis zu welcher Distanz kann der Student andere Kameraden treffen, die 12m unter ihm am Boden stehen, wenn die Anfangsgeschwindigkeit v_0 aus Aufgabe a) und ein Abwurfwinkel von $\alpha = 30°$ gegeben ist?

d) Auf dem Nachbargebäude (gleiche Höhe) steht ein weiterer Student. Wie weit darf das Gebäude maximal entfernt sein damit der Student den Kameraden treffen kann? Berechnen Sie dazu den optimalen Winkel bei gegebenem v_0 von a).

Hinweis: $\sin(x) \cdot \cos(x) = 0,5 \cdot \sin(2x)$

Lösung zu Aufgabe 1

a) Als Koordinatennullpunkt wählen wir die Abwurfhöhe. Beim Umkehren hat der Schneeball die Höhe $\mathrm{h} = 5{,}0\,\mathrm{m}$. Die gesamte kinetische Energie geht in potentielle Energie über. Beachte, dass der Energieerhaltungssatz nur Aussagen über den Betrag der Geschwindigkeit zulässt!
Rechne mit dem Energieerhaltungssatz: $mgh = \frac{1}{2}mv_0^2$

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 5\,\mathrm{m}} = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

b) Es wirkt nur die Erdbeschleunigung in z. Es folgt:

$$\ddot{z} = -g$$

$$\dot{z} = -gt + v_0$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0 \overset{!}{=} 0$$

z wird 0 gesetzt, da der Schneeball wieder auf der gleichen Höhe gefangen wird. Mit den Anfangsbedingungen $z_0 = 0$ ergibt sich.

$$-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t = 0$$

$$-\frac{1}{2}gt + v_0 = 0$$

$$t = \frac{2v_0}{g} = \frac{2 \cdot 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 2,0\,\mathrm{s}$$

ALTERNATIV: Wegen der Energieerhaltung hat der Schneeball beim Fangen des Balls bei h = 0 die Geschwindigkeit $-v_0$.

$$v(t) = -gt + v_0 \overset{!}{=} -v_0$$

$$\Rightarrow\ t = \frac{2v_0}{g} = \frac{2 \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 2,0\,\mathrm{s}$$

c) Komponentenweise betrachten des schiefen Wurfs mit Koordinatenursprung beim Abwurf des Schneeballs ($x_0 = z_0 = 0$). Es wirkt nur die Erdbeschleunigung.

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0_x} \\ -gt + v_{0_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos\alpha \\ -gt + v_0 \cdot \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \\ v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$$

Der Schneeball trifft einen Kopf wenn er die Höhe $z(t) = z_k = -12\,\mathrm{m}$ erreicht. Die Fallzeit bestimmt die maximale Flugdauer des Schneeballs, deshalb berechnen wir zuerst die Zeit t, bei welcher der Schneeball die Kopfhöhe erreicht, also $z(t) = z_k$.

$$v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = z_k$$

$$v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 - z_k = 0$$

Auflösen mit Mitternachtsformel (alternativ auch p-q Formel)

$$t_{1,2} = -\frac{2}{2g} \cdot \left(-v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha - 4 \cdot \frac{1}{2} g z_k} \right)$$

$$t_{1,2} = \frac{1}{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \cdot \left(10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 0,5 \pm \sqrt{10^2\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \cdot 0,5^2 + 2 \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 12\,\mathrm{m}} \right) = 2,1\,\mathrm{s}\ (\text{bzw.} -1,1\,\mathrm{s})$$

Die Zeit t kann nun in $x(t)$ eingesetzt werden um die Reichweite zu bestimmen.

$$x(t = 2,1\,\mathrm{s}) = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2,1\,\mathrm{s} = 18,2\,\mathrm{m}$$

d) Wir wollen nun $z(x)$ berechnen um die allgemeine Bahnkurve zu bestimmen. Dazu lösen wir die x-Komponente nach t auf.

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

und setzen in $z(t)$ ein.

$$z(x) = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} + \frac{v_0 \sin\alpha}{v_0 \cos\alpha} \cdot x \stackrel{!}{=} 0$$

Auflösen nach x und einsetzen von $\sin\alpha \cos\alpha = 0,5 \cdot \sin 2\alpha$:

$$-\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} x = 0$$

$$x = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

Ableiten nach α für Extremwertbildung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{2v_0^2}{g} \cos 2\alpha \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = 0$$

für $\alpha = 45°$ bzw. $135°$
Die maximale Reichweite ergibt sich zu

$$x(\alpha = 45°) = \frac{v_0^2}{g} \sin(2 \cdot \alpha) = \frac{10^2 \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \sin 90° = 10\mathrm{m}$$

Aufgabe 2 Einfaches Pendel I

An einem Seil der Länge 2 m hängt ein punktförmiges Gewicht der Masse 30 kg. Stellen Sie die Differentialgleichung der Bewegung für φ(t) aus dem Kräftegleichgewicht auf.

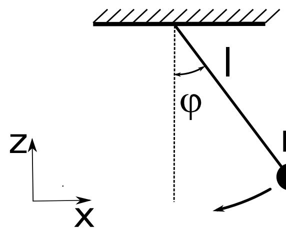

Abbildung 1: einfaches Pendel

Lösung zu Aufgabe 2

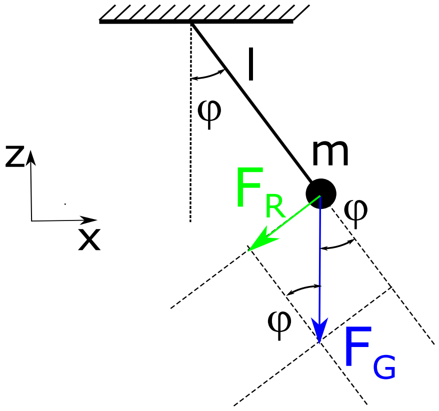

Abbildung 2: Skizze zum einfachen Pendel

Es gilt:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}$$

Es wirkt die Rückstellkraft, als tangentielle Komponente der Gewichtskraft $\vec{F}_G$:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_G \cdot \sin\varphi$$

Man betrachtet nun das Newtonsche Gesetz in Abhängigkeit des Drehwinkels. Es gilt:

$$r(t) = l \cdot \varphi(t)$$

$$a(t) = \ddot{r}(t) = l \cdot \ddot{\varphi}(t)$$

$$\Rightarrow ml\ddot{\varphi}(t) = -mg\sin(\varphi(t))$$

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{l}\sin(\varphi(t)) = 0$$

Aufgabe 3 Pendel II

a) An einem Seil der Länge 2 m hängt ein punktförmiges Gewicht der Masse 30 kg. Stellen Sie die Differentialgleichung der Bewegung für φ(t) aus dem Energieerhaltungssatz auf.

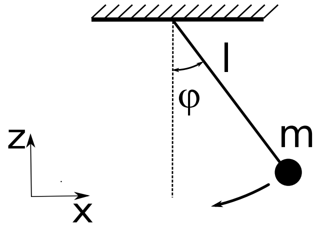

Abbildung 3: einfaches Pendel

b) Lösen Sie die DGL, wenn das Pendel bei $t = 0$ um einen Winkel von ϕ_0 ausgelenkt ist und eine Geschwindigkeit von ω_0 hat.

c) Zusatzaufgabe I: Nun ist $\phi_0 = 5°$ und $\omega_0 = 0,55 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. Berechnen Sie die Amplitude der Schwingung.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Es gilt:

$$E_{pot} + E_{kin} = \text{const.}$$
$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \text{const.}$$

mit $h = l \cdot (1 - \cos(\varphi))$ gilt:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgl(1 - \cos(\varphi)) = \text{const.}$$

$$r(t) = l\varphi(t)$$
$$v(t) = \dot{r}(t) = l\dot{\varphi}(t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos(\varphi)) = \text{const.}$$
$$l^2\dot{\varphi}^2 + 2gl - 2gl\cos(\varphi) = \text{const.}$$

Man bildet die Ableitung:

$$l^2 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + 2gl\sin(\varphi)\dot{\varphi} = 0$$

Wenn nun gilt $\dot{\varphi} \neq 0$, dann ergibt sich:

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{l}\sin(\varphi(t)) = 0$$

Dies ist eine nichtlineare DGL. Für kleine Winkel gilt aber $\sin(\varphi) \approx \varphi$ (Kleinwinkelnäherung)

$$\Rightarrow \ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{l}\varphi(t) = 0$$

Man erhält eine homogene DGL 2. Ordnung.

b) Lösungsansatz: $\varphi(t) = Ae^{\lambda t}$ Man benötigt noch $\dot{\varphi}(t)$ und $\ddot{\varphi}(t) \rightarrow$

$$\varphi(t) = Ae^{\lambda t}$$

$$\dot{\varphi}(t) = \lambda Ae^{\lambda t}$$
$$\ddot{\varphi}(t) = \lambda^2 Ae^{\lambda t}$$

Einsetzen:

$$A\lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{g}{l}Ae^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$$
$$\lambda^2 = -\frac{g}{l}$$
$$\lambda = \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{g}{l}} = \pm \mathrm{i}\omega$$

λ kann also zwei Werte annehmen und wird folgendermaßen geschrieben:

$$\varphi(t) = A_+ e^{\mathrm{i}\omega t} + A_- e^{-\mathrm{i}\omega t}$$

A_+ und A_- sind komplexe Konstanten.

$$\varphi(t) = (a + \mathrm{i}b)e^{\mathrm{i}\omega t} + (c + \mathrm{i}d)e^{-\mathrm{i}\omega t}$$

Die Rechnung erfolgt analog zu letzter Woche:

$$\varphi(t) = 2a\cos(\omega t) - 2b\sin(\omega t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \tag{1}$$

Anfangsbedingungen: Bei $t = 0$ gilt $\varphi(0) = \phi_0$ und $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$.

$$\varphi(0) = A\cos(\omega 0) + B\sin(\omega 0) = A = \phi_0$$
$$\dot{\varphi}(t) = -\omega A\sin(\omega t) + \omega B\cos(\omega t)$$
$$\dot{\varphi}(0) = \omega B = \omega_0 \to B = \frac{\omega_0}{\omega}$$
$$\varphi(t) = \phi_0\cos(\omega t) + \frac{\omega_0}{\omega}\sin(\omega t) \tag{2}$$

c) Zur Bestimmmung der Amplitude ist Gleichung 2 schwierig zu verwenden, da dies eine Summe zweier Schwingungen darstellt. Deshalb nutzt man aus, dass Gleichung 1 auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\varphi(t) = C\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Wobei φ_0 eine Phasenverschiebung und C die Amplitude ist. Beide Konstanten werden über die Anfangsbedingungen bestimmt:

$$\varphi(0) = C\cos(\omega 0 + \varphi_0) = C\cos(\varphi_0) = \phi_0$$
$$\dot{\varphi}(t) = -\omega C\sin(\omega t + \varphi_0)$$
$$\dot{\varphi}(0) = -\omega C\sin(\varphi_0) = \omega_0$$

Quadratische Addition führt zu:

$$C^2\sin^2(\varphi_0) + C^2\cos^2(\varphi_0) = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \phi_0^2$$

$$C^2(\sin^2(\varphi_0) + \cos^2(\varphi_0)) = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \phi_0^2$$

Wichtig! $\sin^2(\varphi_0) + \cos^2(\varphi_0) = 1$ und $\frac{\sin(\varphi_0)}{\cos(\varphi_0)} = \tan(\varphi_0)$

$$C^2 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \phi_0^2$$

$$C = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \phi_0^2}$$

$$\tan(\varphi_0) = -\frac{\omega_0}{\omega\phi_0}$$

$$\varphi_0 = \arctan(-\frac{\omega_0}{\omega\phi_0})$$

Daraus folgt für $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \phi_0^2} \cos(\omega t + \arctan(-\frac{\omega_0}{\omega\phi_0}))$$

Die Amplitude der Bewegung berechnet sich nun:

$$C = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \phi_0^2} = \sqrt{\frac{\omega_0^2 l}{g} + \phi_0^2} = \sqrt{\frac{(0,55\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}})^2 \cdot 2\mathrm{m}}{10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} + (5^\circ)^2}$$

Die Angabe des Winkels darf nicht in $^\circ$ erfolgen sondern muss in rad umgerechnet werden $1^\circ = \frac{\pi}{180}\mathrm{rad}$

$$C = \sqrt{\frac{0,605\frac{\mathrm{rad}^2}{\mathrm{s}^2}\mathrm{m}}{10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} + (\frac{5\pi}{180})^2\mathrm{rad}^2} = \sqrt{0,068\mathrm{rad}} = 0,26\mathrm{rad} = 0,26\frac{180^\circ}{\pi} = 15^\circ$$

Aufgabe 4 Elastischer Stoß

Ein Körper der Masse M und der Geschwindigkeit v_0 stößt vollkommen elastisch und zentral auf einen Körper der Masse m. Berechnen Sie die Geschwindigkeiten v_M und v_m der beiden Massen nach dem Stoß. Setzen Sie $M = a \cdot m$ und diskutieren Sie die folgenden Fälle:

a) Die Masse M sei kleiner als die Masse m ($a < 1$)

b) Die Masse M sei gleich der Masse m ($a = 1$)

c) Die Masse M sei größer als die Masse m ($a > 1$)

Lösung zu Aufgabe 4

Es gilt Impulserhaltung:

$$p_{vor} = p_{nach}$$

$$p_0 = p_M + p_m$$

Wobei $p_0 = M \cdot v_0$ der Impuls der Kugel 1 vor dem Stoß ist. Kugel 2 ist vor dem Stoß in Ruhe. $p_M = M \cdot v_M$ ist der Impuls der Kugel 1 nach dem Stoß und $p_m = m \cdot v_m$ der Impuls der Kugel 2 nach dem Stoß. Also:

$$Mv_0 = Mv_M + mv_m$$

Auflösen nach v_M:

$$v_M = v_0 - \frac{m}{M} v_m \tag{3}$$

Aus der Energieerhaltung folgt:

$$E_{kin}^{vor} = E_{kin}^{nach}$$

$$\frac{1}{2} M v_0^2 = \frac{1}{2} M v_M^2 + \frac{1}{2} m v_m^2$$

$$M v_0^2 = M v_M^2 + m v_m^2 \tag{4}$$

Setzte Gleichung 3 in Gleichung 4 ein:

$$M v_0^2 = M(v_0 - \frac{m}{M} v_m)^2 + m v_m^2$$

$$M v_0^2 = M(v_0^2 - 2\frac{m}{M} v_m v_0 + \frac{m^2}{M^2} v_m^2) + m v_m^2$$

$$M v_0^2 = M v_0^2 - 2m v_m v_0 + \frac{m^2}{M} v_m^2 + m v_m^2$$

$$0 = -2m v_m v_0 + (\frac{m^2}{M} + m) v_m^2$$

$$2m v_m v_0 = (\frac{m^2}{M} + m) v_m^2$$

$$2m v_0 = (\frac{m^2}{M} + m) v_m$$

$$v_m = \frac{2m}{\frac{m^2}{M} + m} v_0 \tag{5}$$

Setze nun für $M = a \cdot m$ in Gleichung 5:

$$v_m = \frac{2m}{(\frac{1}{a} + 1)m} v_0 = \frac{2}{(\frac{1}{a} + 1)} v_0 = \frac{2a}{1 + a} v_0 \tag{6}$$

Zur Berechnung von v_M setze Gleichungen 3 und 4 in Gleichung 1 ein:

$$v_M = v_0 - \frac{1}{a} \frac{2a}{1 + a} v_0$$

$$v_M = v_0 - \frac{2}{1 + a} v_0 = (1 - \frac{2}{1 + a}) v_0 = \frac{1 + a - 2}{1 + a} v_0 = \frac{a - 1}{a + 1} v_0 \tag{7}$$

a) $a < 1$: $v_M < 0 \rightarrow$ Kugel 1 wird nach hinten gestoßen.

b) $a = 1$: $v_M = 0$ und $v_m = v_0 \rightarrow$ Kugel 1 bleibt stehen und Kugel 2 bewegt sich mit v_0 nach vorne.

c) $a > 1$: $v_M > 0 \rightarrow$ Beide Kugeln bewegen sich nach vorne.