Übungen zur Experimentalphysik I

Musterlösung Blatt 1

Aufgabe 1 Vektoren I

Gegeben sind die Vektoren \vec{a} und \vec{b} .

- a) Welche Bedingung ergibt sich für \vec{a} und \vec{b} , damit das Skalarprodukt $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ ist? Wobei gilt $\vec{v}_1 = \vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{v}_2 = \vec{a} \vec{b}$.
- b) Skizzieren Sie die Lösung. Welche Winkel bilden \vec{v}_1 und \vec{v}_2 miteinander?
- c) Beweisen Sie den Satz des Pythagoras mit Hilfe der Vektorrechnung.

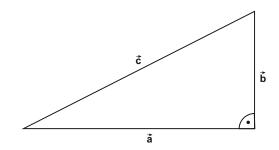


Abbildung 1: Rechtwinkliges Dreieck

Lösung zu Aufgabe 1

a)

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \stackrel{!}{=} 0 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$$

$$= (a_1 + b_1) (a_1 - b_1) + \dots + \dots$$

$$= a_1^2 + a_1 b_1 - a_1 b_1 - b_1^2 + \dots + \dots$$

$$= |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

b) Damit das Skalarprodut gleich Null ist, muss die Bedingung gelten, dass $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ist. Dann ist $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ und \vec{v}_1 und \vec{v}_2 stehen senkrecht aufeinander bzw. bilden einen 90° Winkel.

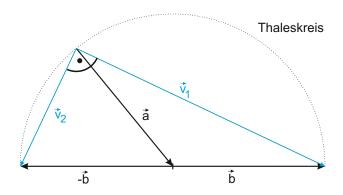


Abbildung 2: Thaleskreis

c)
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{c}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

Da $\vec{a} \perp \vec{b}$ ist $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Es gilt also $c^2 = a^2 + b^2$ Anmerkung: \vec{c}^2 entspricht $\vec{c} \cdot \vec{c} = |c| |c| \cos(\phi)$. Die Vektoren zeigen in die gleiche Richtung, damit ist $\phi = 0$ also $\vec{c} \cdot \vec{c} = c^2$. Das gilt analog auch für \vec{a} und \vec{b} .

Aufgabe 2 Vektoren II

Zeigen Sie, dass die zeitliche Ableitung $\frac{d\vec{a}}{dt}$ eines Vektors konstanter Länge ($|\vec{a}| = \text{konst.}$) auf \vec{a} senkrecht steht.

Lösung zu Aufgabe 2

Da der Betrag des Vektors $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ ist, ist auch $\vec{a} \cdot \vec{a}$ konstant. Man bildet nun die zeitliche Ableitung von $\vec{a} \cdot \vec{a}$:

$$\frac{\mathrm{d}(\vec{a} \cdot \vec{a})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t} = 2\vec{a} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}$$

da $|\vec{a}|$ = konst. gilt ist die zeitliche Ableitung gleich Null und damit

$$2\vec{a} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t} = 0$$

Da das Skalarprodukt gleich Null ist, gilt $\vec{a} \perp \frac{d\vec{a}}{dt}$.

Wichtiges Beispiel: Kreisbewegung

Der Betrag des Ortsvektors $|\vec{r}(t)|$ ist konstant, die Masse m bewegt sich auf einer Kreisbahn.

- Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$ steht senkrecht auf $\vec{r}(t)$: $\vec{v}(t) \perp \vec{r}(t)$ und sein Betrag ist konstant.
- Der Beschleunigungsvektor $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ steht senkrecht auf $\vec{v}(t)$: $\vec{a}(t) \perp \vec{v}(t)$ und sein Betrag ist konstant.

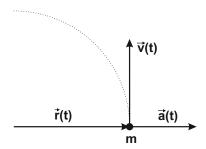


Abbildung 3: Kreisbewegung

Aufgabe 3 Vektoren III

Ein Fährboot soll von einem Punkt A über einen Fluss der Breite $d=100\,\mathrm{m}$ auf einem geraden Weg zu einem $a=200\,\mathrm{m}$ flussabwärts gelegenem Punkt B fahren. Die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses beträgt $w=2\,\mathrm{m/s}$. Die Geschwindigkeit der Bootes beträgt $v_B=4\,\mathrm{m/s}$.

a) Wie lange braucht das Boot für die Fahrt von A nach B?

Bei Hochwasser nimmt die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses zu.

b) Wie hoch darf w höchstens werden, damit die Fähre gerade noch von A nach B gelangen kann?

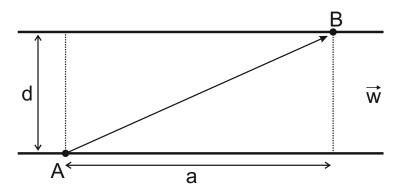
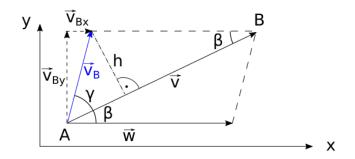


Abbildung 4: Die Fähre fährt auf dem Fluß mit Strömungsgeschwindigkeit \vec{w} von A nach B

Lösung zu Aufgabe 3

a) Die Geschwindigkeit des Bootes ist
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{Bx} + w_x \\ v_{By} + w_y \end{pmatrix}$$



Mit
$$\alpha = \beta + \gamma$$

$$\sin(90^{\circ} - \alpha) = \frac{v_{Bx}}{v_B} = \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow v_{Bx} = v_B \cos(\alpha)$$

$$\cos(90^{\circ} - \alpha) = \frac{v_{By}}{v_B} = \sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow v_{By} = v_B \sin(\alpha)$$
Damit ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_B \cos(\alpha) \\ v_B \sin(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x \\ 0 \end{pmatrix}$

Berechnung der Winkel:

$$\tan(\beta) = \frac{d}{a} \Rightarrow \beta = \arctan\left(\frac{100 \,\mathrm{m}}{200 \,\mathrm{m}}\right) = 26,57^{\circ}$$

$$h = \sin(\gamma) \, v_B$$

$$h = \sin(\beta) \, w_x$$

$$\sin(\gamma) = \frac{w_x}{v_B} \sin(\beta)$$

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{w_x}{v_B} \sin(\beta)\right) = \arcsin\left(\frac{2 \,\mathrm{m/s}}{4 \,\mathrm{m/s}} \sin(26,57^{\circ})\right) = 12,92^{\circ}$$

$$\alpha = \gamma + \beta = 39,49^{\circ}$$

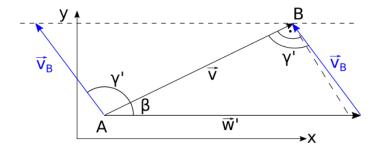
Die Geschwindigkeit des Bootes errechnet sich durch:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(4\frac{\text{m}}{\text{s}}\cos(\alpha) + 2\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(4\frac{\text{m}}{\text{s}}\sin(\alpha)\right)^2} = 5,69\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die gesuchte Dauer der Überfahrt ergibt sich $S = |\vec{v}| t$, mit $S = \sqrt{d^2 + a^2}$

$$t = \frac{S}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{d^2 + a^2}}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{(100\,\mathrm{m})^2 + (200\,\mathrm{m})^2}}{5,69\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 39\,\mathrm{s}$$

b) Das Boot muss wegen der höheren Strömungsgeschwindigkeit w' nun flussaufwärts fahren um den Punkt B noch erreichen zu können. Dabei muss \vec{v} in Richtung \overline{AB} zeigen, $|\vec{v}_B|$ und β sind konstant.



Das Dreieck ist nun nicht mehr rechtwinklig, darum muss mit dem Sinussatz gerechnet werden.

$$\frac{w_x'}{\sin(\gamma')} = \frac{v_B}{\sin(\beta)}$$

$$w_x(\gamma') = \frac{v_B}{\sin(\beta)} \sin(\gamma')$$

Jetzt muss ein Maximum von $w(\gamma')$ gesucht werden. Dazu wird die Ableitung gleich Null gesetzt:

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\gamma'} = \frac{v_B}{\sin(\beta)} \cos(\gamma')$$

Die Gleichung ist bei $\gamma' = 90^{\circ}$ gleich Null, deshalb ist w_{max} :

$$w_{max} = \frac{v_B}{\sin(\beta)} \sin(90^\circ) = \frac{4 \text{ m/s}}{\sin(26, 57^\circ)} 1 = 9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Aufgabe 4 Bahnkurve

Ein Rad mit dem Radius
r rollt mit konstanter Geschwindigkeit des Mittelpunktes
 $\vec{v}_S = v_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf der x-Achse. Zum Zeitpunkt t=0 hat der Punkt P
 (P fest auf dem

Rand des Rades) die Koordinaten $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2r \end{pmatrix}$.

Welche Bahnkurve $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ beschreibt der Punkt P?

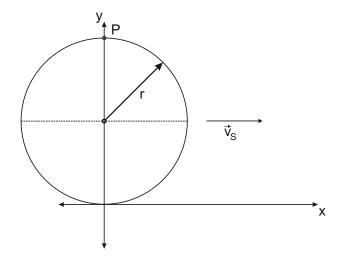


Abbildung 5: Rollendes Rad

Lösung zu Aufgabe 4

Als Winkelgeschwindigkeit ω wird durch den überstrichenen Winkel pro Zeit definiert. Die Einheit ist $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Für eine vollständige Drehung ist $s = 2\pi r$ die zurückgelegte Strecke, mit $s = v_0 t$ ergibt sich $v_0 = \frac{2\pi r}{T}$, wobei T die Zeitdauer einer Drehung ist.

$$\frac{v_0}{r} = \frac{2\pi}{T} = \omega$$

Der Mittelpunkt des Rades bewegt sich auf der Höhe r mit der Geschwindigkeit v_0 , also

$$\vec{r_s}(t) = \left(\begin{array}{c} v_0 \, t \\ r \end{array}\right)$$

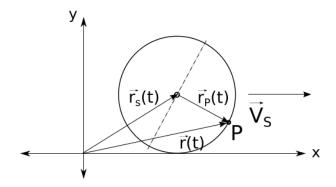
Der Punkt P bewegt sich auf einem Kreis mir dem Radius r bezogen auf den Mittelpunkt, also

$$\vec{r}_k(t) = r \left(\begin{array}{c} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{array} \right)$$

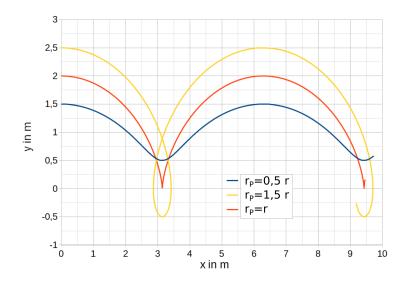
Die gesuchte Bahnkurve $\vec{r}(t)$ des Punktes P ergibt sich aus der Überlagerung beider Bewegungen:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_s(t) + \vec{r}_k(t) = \begin{pmatrix} v_0 t \\ r \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

Zum Zeitpunkt t=0 sollen die Koordinaten des Punkts P gleich (0, 2r) sein. Überprüfen durch einsetzen.



Bahnkurven für Punkte $r_P = 0, 5r; r; 1, 5r \text{ mit } r = 1 \text{ m und } v_0 = 1 \text{ m/s}$:



Aufgabe 5 Freier Fall I

Ein Stein fällt von einer Brücke ins Wasser ($g=10\,\frac{\rm m}{\rm s^2}$). Die Flugzeit beträgt 4,0 s. Berechnen Sie die Höhe der Brücke.

Lösung zu Aufgabe 5

Der Ursprung des gewählten Koordinatensystems ist beim "Fallpunkt", also $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Der Stein fällt von der Brücke, hat also keine Anfangsgeschwindigkeit. Somit gilt: $v_{0_x} = v_{0_y} = v_{0_z} = 0$. Wir haben nur die Erdbeschleunigung, die in negativer z-Richtung wirkt. Es ergibt sich:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$m \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} v_{0_x} \\ v_{0_y} \\ -gt + v_{0_z} \end{pmatrix}$$

$$m\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} v_{0x}t + x_0 \\ v_{0y}t + y_0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + z_0 \end{pmatrix}$$

Einsetzen:

$$\Rightarrow m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$$

Es folgt: $z = -\frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}\cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 4^2\,\text{s}^2 = -80\,\text{m}$