Zusammenfassung der 8. Vorlesung

- **Zusammenfassung der Beschreibung dynamischer Systeme im Bildbereich.**
  - **Übertragungsfunktion**
  - **Pole und Nullstellen**
  - **Pole und Eigenbewegungen**

- **Stabilität dynamischer Systeme**
  - **Definition der asymptotischen Stabilität**
  - **Instabilität und Grenzstabilität**
  - **Algebraische Stabilitätskriterien**
    - Notwendige und hinreichende Bedingungen des Hurwitz-Kriterium

- **Pol-Nullstellen-Kompensation zur Beeinflussung der Dynamik eines Systems**
- **Analyse des Regelkreises**
  - Erweiterter Standardregelkreis
  - Übertragungsfunktion $G_0(s)=G_R(s)G_S(s)$ des offenen Kreises
  - Führungsübertragungsfunktion $G_W(s)$
  - Störungsübertragungsfunktion $G_Z(s)$

$$G_W(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}$$

$$G_z(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{1}{1+G_0(s)}$$

$$G_W(s) = \frac{\frac{Z_0(s)}{N_0(s)}}{1+\frac{Z_0(s)}{N_0(s)}} = \frac{\frac{Z_0(s)}{N_0(s)}}{\frac{N_0(s)+Z_0(s)}{N_0(s)}} = \frac{Z_0(s)}{N_0(s)+Z_0(s)}$$

$$G_Z(s) = \frac{1}{1+\frac{Z_0(s)}{N_0(s)}} = \frac{1}{\frac{N_0(s)+Z_0(s)}{N_0(s)}} = \frac{N_0(s)}{N_0(s)+Z_0(s)}$$

Anforderungen an die Regelung:

Stabiliät

Schnelligkeit

Genauigkeit

Robustheit

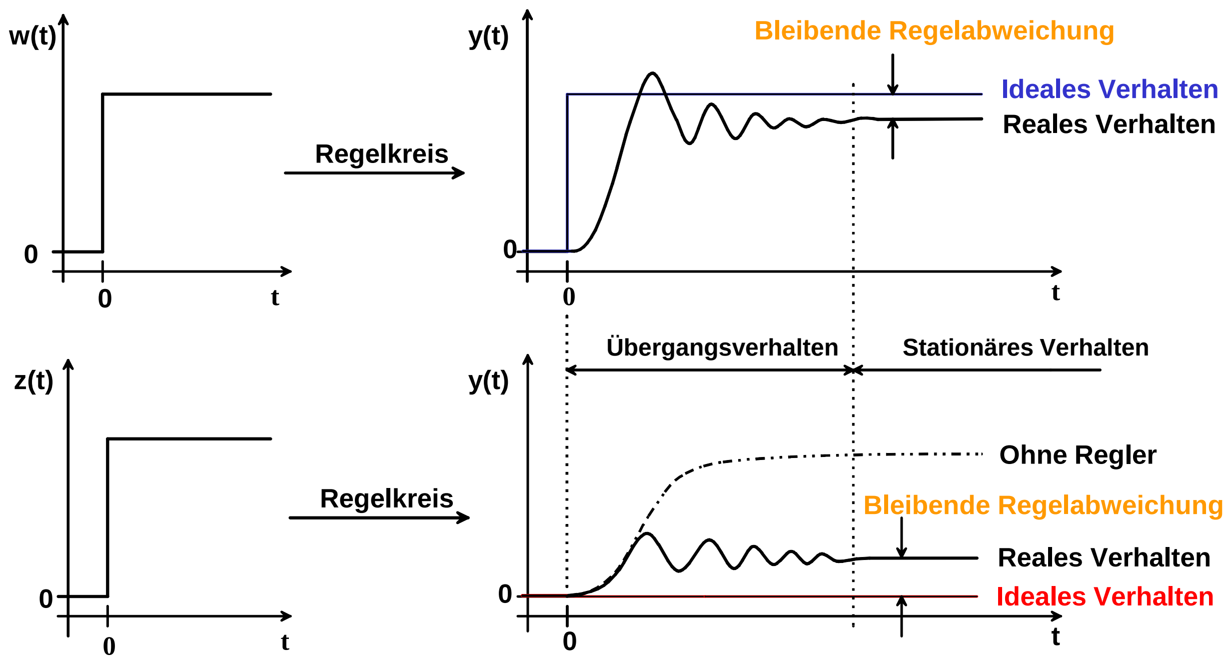
Stationäres Verhalten des Regelkreises

Definition:

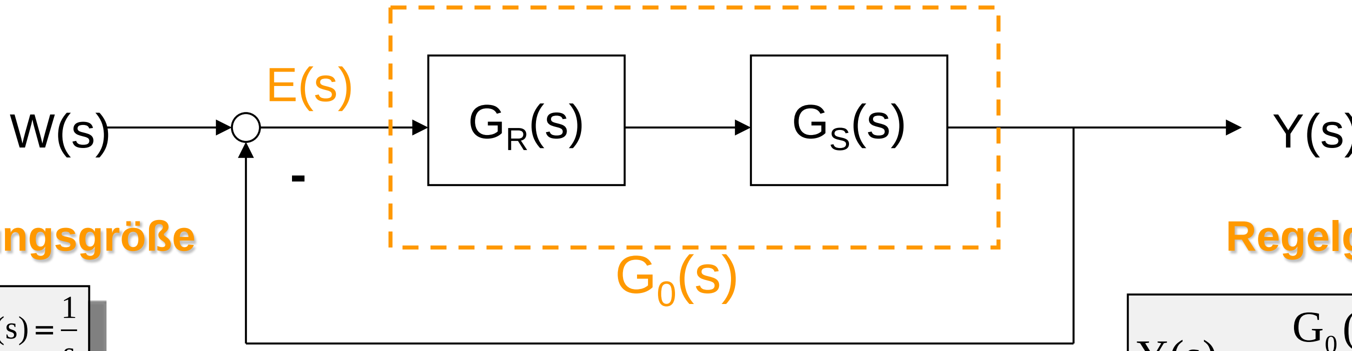
Die **bleibende Regelabweichung e_∞** stellt die Abweichung zwischen Führungs- und Regelgröße im stationären Verhalten nach einem angelegten Eingangssignal dar.

Führungsverhalten

Störverhalten



Bleibende Regelabweichung: Führungsverhalten



Führungsgröße

$$W(s) = \frac{1}{s}$$

Regelgröße

$$Y(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} W(s)$$

Bleibende Regelabweichung

$$e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{t\to\infty}\left(w(t) - y(t)\right)$$

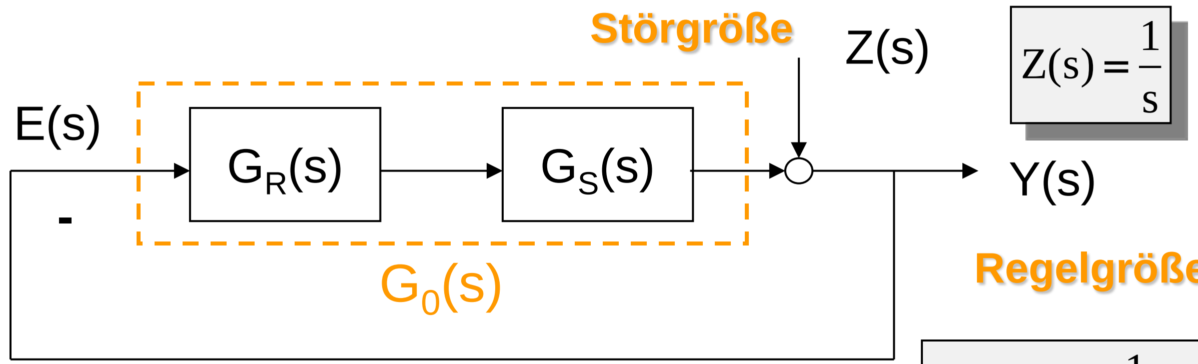
Endwertsatz der Laplace-Transformation

$$= \lim_{s\to 0} s\left(W(s) - Y(s)\right)$$

$$= \lim_{s\to 0} s\left(W(s) - \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} W(s)\right)$$

$$= \lim_{s\to 0} \underbrace{sW(s)}_{1}\left(1 - \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}\right) = \lim_{s\to 0} \frac{1+G_0(s)-G_0(s)}{1+G_0(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+G_0(s)}$$

Bleibende Regelabweichung: Störverhalten



$$Z(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{1+G_0(s)} Z(s)$$

Bleibende Regelabweichung

$$e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t) = -\lim_{t\to\infty} y(t)$$

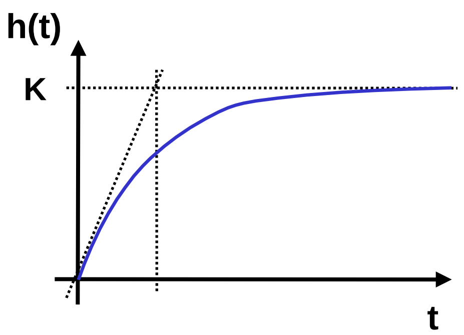
$$= -\lim_{s\to 0} sY(s)$$

$$= -\lim_{s\to 0} \cancel{s}\left(\frac{1}{1+G_0(s)}\cancel{Z(s)}\right)$$

$$= -\lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{1+G_0(s)}\right)$$

Der Betrag der bleibenden Regelabweichung ist in beiden Fällen gleich groß und von $G_0(s)$ für $s \to 0$ (Verstärkung des offenen Kreises) abhängig.

Systeme mit Ausgleich

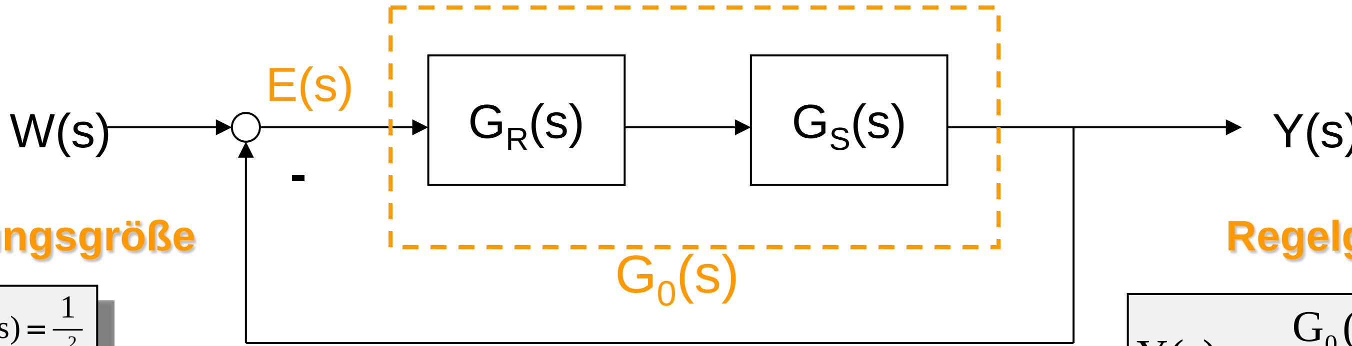


Der stationäre Endwert der Übergangsfunktion *h(t)* *gibt das statische Verstärkungsverhältnis eines Systems wieder und wird als Systemverstärkung K bezeichnet.*

$$\boxed{K = h(\infty) = \lim_{t\to\infty} h(t)}$$

$$= \lim_{s\to 0} sH(s) = \lim_{s\to 0} sG(s)U(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} \cancel{s}G(s)\frac{1}{\cancel{s}} \quad \boxed{= G(0)}$$



Führungsgröße

$$W(s)=\frac{1}{s^2}$$

Regelgröße

$$Y(s)=\frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}W(s)$$

Bleibende Regelabweichung

$$e_\infty=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{t\to\infty}\big(w(t)-y(t)\big)$$

$$=\lim_{s\to 0}s\big(W(s)-Y(s)\big)$$

wenn $G_0(s)$ P-Verhalten hat

$$=\lim_{s\to 0}s\left(W(s)-\frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}W(s)\right)$$

$$=\lim_{s\to 0}\underbrace{sW(s)}_{1/s}\left(1-\frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}\right)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left(\frac{1}{1+G_0(s)}\right)=\infty$$

Explizite Berechnung für verschiedene Kombinationen von Strecke und Regler

P-Regler:

$$G_R(s) = K_R$$

I-Regler:

$$G_R(s) = \frac{K_R}{s}$$

PT$_n$-Strecken:

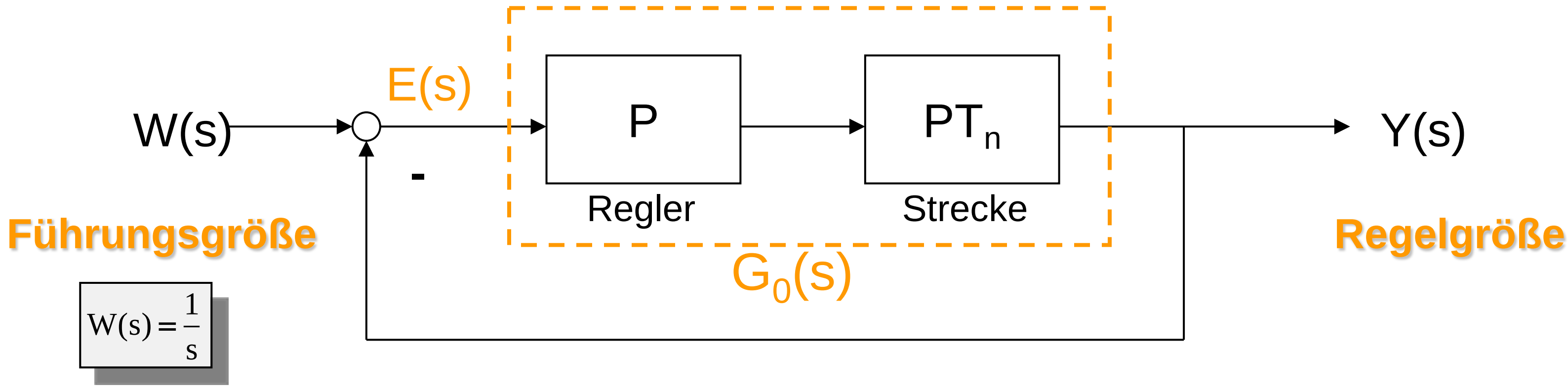
$$G_S(s) = \frac{K_S}{1 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + \cdots + a_n \cdot s^n}$$

IT$_n$-Strecken:

$$G_S(s) = \frac{K_S}{s \cdot \left(1 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + \cdots + a_n \cdot s^n\right)}$$

Stationäres Verhalten des Regelkreises (3)

P-Regler mit PT_n-Strecke für $w(t)=1(t)$:



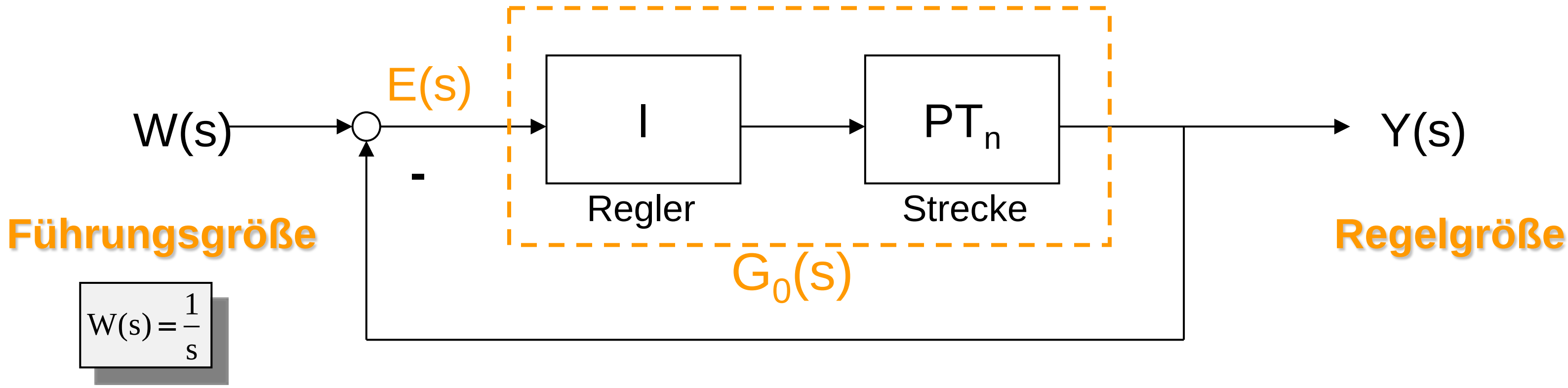
$$G_0(s)=G_R(s)G_S(s)=\frac{K_R K_S}{1+a_1\cdot s+a_2\cdot s^2+\cdots+a_n\cdot s^n}$$

$G_0(s)$ hat P-Verhalten

$$e_\infty=\lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{1+G_0(s)}\right)=\frac{1}{1+K_R K_S}=\frac{1}{1+K_0}$$

K_0 : Kreisverstärkung

I-Regler mit PT_n-Strecke bzw. P-Regler mit IT_n-Strecke für $w(t)=1(t)$:



$$G_R(s)=\frac{K_R}{s} \quad G_S(s)=\frac{K_S}{1+T_1 s} \quad \Rightarrow \quad G_0(s)=\frac{K_R K_S}{s(1+T_1 s)} \quad \Leftarrow \quad G_R(s)=K_R \quad G_S(s)=\frac{K_S}{s(1+T_1 s)}$$

$$G_0(s)=G_R(s)G_S(s)=\frac{K_R K_S}{s(1+a_1\cdot s+a_2\cdot s^2+\cdots+a_n\cdot s^n)}$$

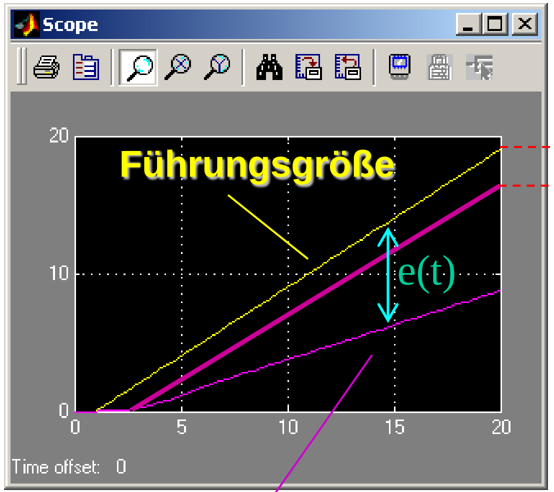
$G_0(s)$ hat I-Verhalten

$$\lim_{s\to 0} G_0(s)=\infty \quad \Rightarrow \quad e_\infty=\lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{1+G_0(s)}\right)=0$$

P-Regler mit PT$_n$-Strecke und $w(t) = t\cdot 1(t)$:

$$G_0(s)=G_R(s)G_S(s)=\frac{K_R K_S = K_0}{1+a_1\cdot s+a_2\cdot s^2+\cdots+a_n\cdot s^n}$$

$$e_\infty=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left(\frac{1}{1+G_0(s)}\right)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1+K_0}=\infty$$



$\frac{1}{K_0}$

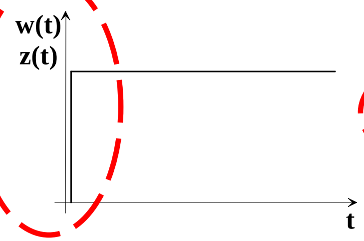
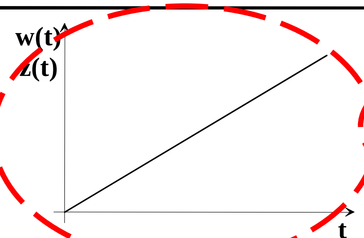
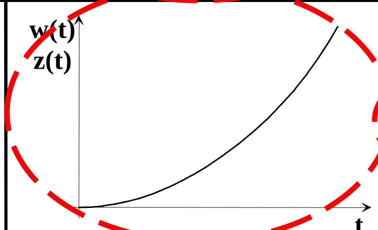
Regelgröße

P-Regler mit IT$_n$-Strecke und $w(t) = t\cdot 1(t)$:

$$G_0(s)=G_R(s)G_S(s)=\frac{K_R K_S}{s(1+a_1\cdot s+a_2\cdot s^2+\cdots+a_n\cdot s^n)}=\frac{Z_0(s)}{N_0(s)}\Rightarrow\lim_{s\to 0}G_0(s)=\infty$$

$$e_\infty=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left(\frac{1}{1+G_0(s)}\right)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left(\frac{1}{1+\frac{Z_0(s)}{N_0(s)}}\right)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left(\frac{N_0(s)}{Z_0(s)+\cancel{N_0(s)}}\right)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left(\frac{N_0(s)}{Z_0(s)}\right)=\frac{1}{K_0}$$

Stationäre Regelgüte: Fehlerarten

Ordnung	Zeitsignal	Bildfunktion	Signalform	Fehlerart - Regelgüte
1	$\sim t^0\, 1(t)$	$\sim \frac{1}{s}$		Regelfehler 1.Ordnung **Lagefehler**
2	$\sim t^1\, 1(t)$	$\sim \frac{1}{s^2}$		Regelfehler 2. Ordnung Geschwindigkeitsfehler
3	$\sim t^2\, 1(t)$	$\sim \frac{1}{s^3}$		Regelfehler 3. Ordnung Beschleunigungsfehler

Stationäre Regelgüte

Verstärkung des proportionalen Systemteils

$$G_0(s) = \frac{K_0}{s^\ell} \frac{1 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2 + \cdots + b_m \cdot s^m}{1 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + \cdots + a_{n-\ell} \cdot s^{n-\ell}}$$

Systemtyp $G_0(s)$	Sprung $1(t)$	Rampe $t1(t)$	Parabel $t^2 1(t)$
P–Verhalten ($l = 0$)	$\frac{1}{1+K_0}$	∞	∞
I–Verhalten ($l = 1$)	0	$\frac{1}{K_0}$	∞
I_2–Verhalten ($l = 2$)	0	0	$\frac{1}{K_0}$

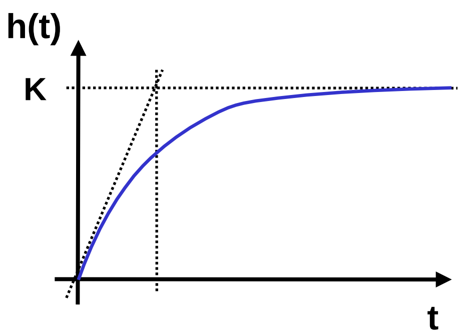
P-Regler an einer Strecke mit Ausgleich bewirkt eine bleibende Regelabweichung !!

I-Regler an einer Strecke mit Ausgleich regelt **sprungförmige** Anregungen vollständig aus !!!!

Die stationäre Regelgüte ist sowohl von der Art der Anregung als auch vom Verhalten des offenen Systems abhängig.

Systemverstärkung

Systeme mit Ausgleich



Der stationäre Endwert der Übergangsfunktion *h(t)* gibt das *statische Verstärkungsverhältnis eines Systems wieder und wird als Systemverstärkung K bezeichnet.*

$$\boxed{K = h(\infty) = \lim_{t\to\infty} h(t)}$$

$$= \lim_{s\to 0} sH(s) = \lim_{s\to 0} sG(s)U(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} sG(s)\,{}^{1}\!/\!{}_{s} \boxed{= G(0)}$$

Systeme ohne Ausgleich

$$\boxed{G_0(s) = \frac{K_0}{s^{\ell}}\,\frac{1+\beta_1\cdot s+\beta_2\cdot s^2+\cdots+\beta_m\cdot s^m}{1+\alpha_1\cdot s+\alpha_2\cdot s^2+\cdots+\alpha_{n-\ell}\cdot s^{n-\ell}}}$$

Wenn der proportionale Übertragungsanteil

$$\boxed{K_0\cdot\frac{1+\beta_1\cdot s+\beta_2\cdot s^2+\cdots+\beta_m\cdot s^m}{1+\alpha_1\cdot s+\alpha_2\cdot s^2+\cdots+\alpha_{n-\ell}\cdot s^{n-\ell}}}$$

nur Pole in der linken *s*-Halbebene hat, dann ist *K_0* der Endwert der Übergangsfunktion dieses Terms.

Diese Verstärkung *K_0* des proportionalen Übertragungsanteil bestimmt das stationäre Verhalten des Regelkreise (vgl. Skript SRT, Tabelle 3.1) und wird auch bei Systemen ohne Ausgleich als Systemverstärkung (Verstärkung des offenen Systems) bezeichnet.