Zusammenfassung der 7. Vorlesung

Beschreibung des dynamischen Verhaltens eines linearen Systems im Bildbereich

- **Definition der Übertragungsfunktion:** $G(s) = Y(s)/U(s)$.
- **Üfkt. ist die Laplacetransfomierte der Gewichtsfunktion:**

$$G(s) = \mathfrak{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty g(t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt$$

- **Unterscheidung Pole und Nullstellen der Üfkt.**
- **Polynomform und Pol-Nullstellen-Form der Üfkt.**

Zusammenfassung der 7. Vorlesung

Beschreibung des dynamischen Verhaltens eines linearen Systems im Bildbereich

- **Charakterisierung der Üfkt. durch Pol-Nullstellen-Bild.**
- **Bedeutung der Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion.**
  - **Eigendynamik, Stabilität, Pole und Zeitverhalten.**
- **Technische Realisierbarkeit von Übertragungsfunktionen: Systeme mit Grad Z(s) > Grad N(s) sind nicht realisierbar.**

Eigenschaften der Nullstellen

- **Die Nullstellen bestimmen mit, mit welchem Gewicht, die zu einem Pol λ gehörende Exponentialfunktion $e^{\lambda t}$ in die Eigendynamik eingeht.**

- **Eine Nullstelle N_i der Übertragungsfunktion blockiert die Übertragung eines Signals $u(t) = e^{N_i t}$ mit der komplexen Frequenz N_i.**

- **Die Nullstellen der Übertragungsfunktion haben keinen Einfluß auf die Stabilität des dynamischen Systems.**

- **Die Nullstellen beeinflussen aber sehr wohl die Stabilität des rückgekoppelten Systems.**

Eigenschaften der Nullstellen (2)

Blockierung der Signalübertragung

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

Die Übertragungsfunktion hat 2 Pole bei $s = p_1 = -2$ und $s = p_2 = -3$ und eine Nullstelle bei $s = N_1 = -1$.

Das Eingangssignal $u(t) = e^{N_i t} = e^{-t}$ wird durch $G(s)$ nicht übertragen:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

Tabelle A.2, Korrespondenz 3

$$= \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} \cdot \mathfrak{L}\left\{e^{-t}\right\} = \frac{\cancel{s+1}}{(s+2)(s+3)} \cdot \frac{1}{\cancel{s+1}} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i} y(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j} u(t - T_t)$$

Totzeit

Der Rechtsverschiebungssatz (Tabelle A.1) der Laplace-Transformation liefert eine transzendente Übertragungsfkt.:

$$G(s) = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} e^{-T_t s}$$

Beschreibung im Bildbereich: Zusammenfassung

- **Beschreibung des Übertragungsverhaltens durch gebrochen rationale Funktionen (Übertragungsfunktionen):**

$$G(s) := \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{m-1} s^{m-1} + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n}$$

- **Für Systeme mit Totzeit, tritt noch eine transzendente Funktion auf:**

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} \cdot e^{-sT_t}$$

- **Das Nennerpolynom** $N(s)$ **der Übertragungsfunktion wird charakteristisches Polynom genannt, da die Lösungen (Pole) der charakteristischen Gleichung** $N(s) = 0$ **die Eigenbewegungen des Systems bestimmen.**

Beschreibung im Bildbereich: Zusammenfassung

- **Damit die Eigenbewegungen eines Systems abklingen, müssen alle Pole von $G(s)$ negative Realteile haben.**
- **Je größer die Beträge der Realteile der Pole von $G(s)$ sind, um so kleiner sind die zugehörigen, die Verzögerung bestimmenden Zeitkonstanten.**
- **Dicht am Ursprung der s-Ebene liegende Pole (große Zeitkonstanten) haben einen dominierenden Einfluss auf das Übertragungsverhalten.**
- **Die Lage der Nullstellen der Übertragungsfunktion hat einen wesentlichen Einfluss auf das Übergangsverhalten (transiente Verhalten) eines Systems.**

Anforderungen an die Regelung:

Stabiliät

Schnelligkeit

Genauigkeit

Robustheit

Definition 3.1 (*Stabilität*)

i) Eine **Ruhelage** eines dynamischen Systems heißt (*asymptotisch*) **stabil**, wenn das System nach Auslenkung aus der Ruhelage selbsttätig in die Ruhelage zurückkehrt (Bild 3.2).

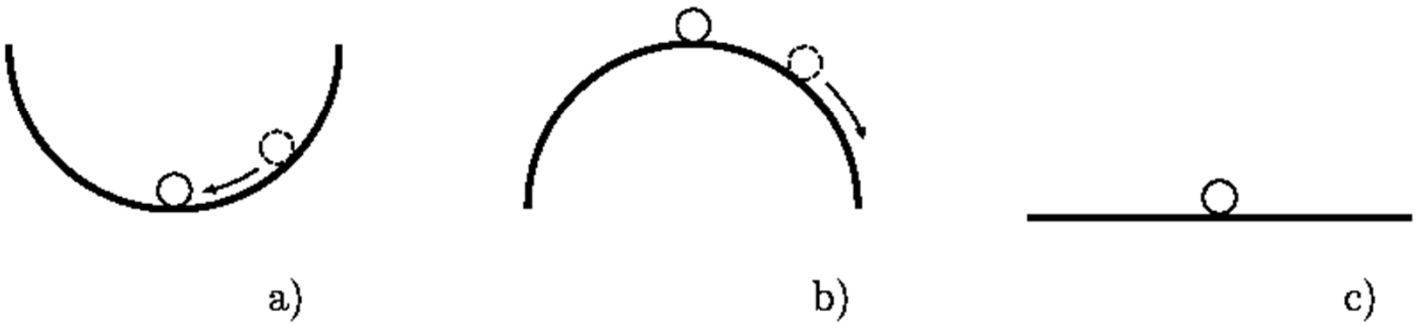


Bild 3.2: Stabilität von Ruhelagen
a) stabile Ruhelage b) instabile Ruhelage c) indifferente Ruhelage

Stabilität dynamischer Systeme (2)

Definition 3.2 (*Stabilität eines linearen Systems*)

Eine lineares, zeitinvariantes Übertragungssystem heißt **asymptotisch stabil**, wenn seine Gewichtsfunktion auf Null abklingt, d.h. wenn

$$\lim_{t \to \infty} g(t) = 0 \tag{3.25}$$

gilt.

Asymptotische Stabilität

Ein lineares Übertragungssystem ist genau dann asymptotisch stabil, wenn für die Wurzeln p_i seiner charakteristischen Gleichung

$$\mathrm{Re}\, p_i < 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots n$$

erfüllt ist.

Stabilität dynamischer Systeme (3)

Definition:

Das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion G(s) bezeichnet man als **charakteristisches Polynom**.

$$C(s) = a_0 + a_1 \cdot s^1 + \cdots + a_n \cdot s^n = a_n \prod_{k=1}^{n} \left(s - p_k\right)$$

Die Gleichung zur Bestimmung der Polstellen nennt man die **charakteristische Gleichung**:

$$C(s) = a_0 + a_1 \cdot s^1 + \cdots + a_n \cdot s^n = 0$$

Ihre Lösungen werden auch als **Wurzeln** bezeichnet.

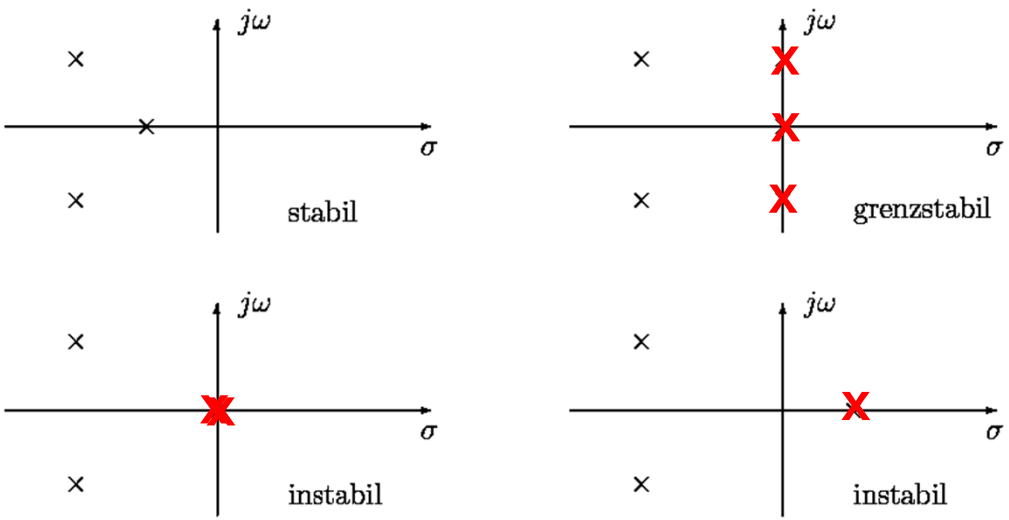
Stabilität dynamischer Systeme (4)

Instabilität

Ein lineares System ist genau dann instabil, wenn mindestens ein Pol seiner Übertragungsfunktion in der rechten s–Halbebene liegt, oder wenn mindestens ein mehrfacher Pol auf der Imaginärachse der s–Ebene vorhanden ist.

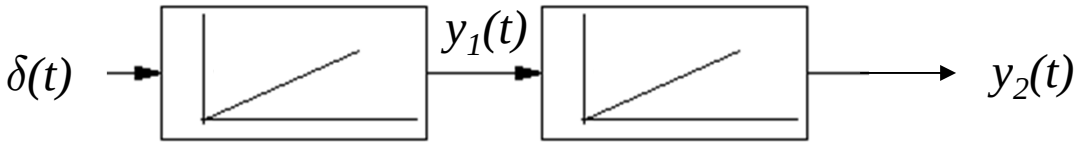
Grenzstabilität

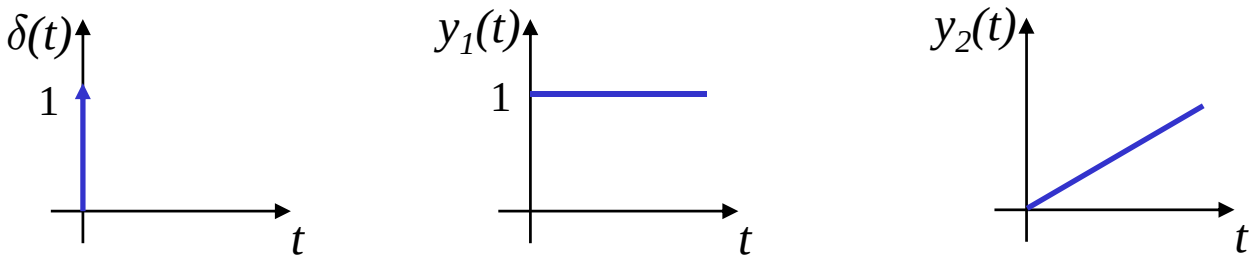
Ein lineares System ist genau dann grenzstabil, wenn kein Pol der Übertragungsfunktion in der rechten s–Halbebene liegt, keine mehrfachen Pole auf der Imaginärachse auftreten und auf dieser mindestens ein *einfacher* Pol vorhanden ist.



Beispiel für Instabilität

Doppelpol im Ursprung





Motivation:

- Die Nullstellenbestimmung ist für Polynome

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s^1 + a_0$$

  vom Grad $n \geq 4$ im allgemeinen nur numerisch möglich.

- Für die Stabilitätsanalyse braucht man die genaue Lage der Nullstellen nicht zu kennen, sondern man fragt nur danach, ob alle Nullstellen von $P(s)$ in der linken s-Halbebene liegen (ein solches Polynom $P(s)$ nennt man stabil bzw. ein Hurwitz-Polynom).

Hurwitz-Kriterium (1895)

Notwendige Bedingung:
Alle Koeffizienten des Polynoms $P(s)$ müssen vorhanden sein und das gleiche Vorzeichen besitzen. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, so ist $P(s)$ kein Hurwitz-Poynom.

Hurwitz-Kriterium

Hinreichende Bedingung:

Die Hurwitzdeterminante H_{n-1} und alle ihre Hauptdeterminanten $H_i (i = 1, 2, \ldots, n-2)$ sind positiv (1. und 2. notwendig und hinreichend).

$$H_{n-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} H_1 & H_2 & H_3 & & & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & a_1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_2 & a_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_5 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} \end{array} \quad (3.30)$$

mit $a_{n-i} = 0$ für $n - i < 0$; $i = 0, 1, 2, \ldots$.

$$H_1 = a_{n-1} > 0 \qquad H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0 \qquad H_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} > 0$$

Beispiel:

Gegeben sei das Polynom $P(s) = 6s^3 + 4s^2 + 2s + 1$ ⇒

$$a_n = a_3 = 6$$
$$a_{n-1} = a_2 = 4$$
$$a_{n-2} = a_1 = 2$$
$$a_{n-3} = a_0 = 1$$

Notwendige Bedingung ist erfüllt, da alle a_i vorhanden und positiv sind.

Berechnung der Hauptdeterminanten:

$$H_1 = a_{n-1} = 4 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

⇒ **Das Polynom $P(s)$ ist ein Hurwitz-Polynom !**

Berechnung von H_n ist nicht notwendig:

$$H_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot H_2 = 2 > 0$$

Anforderungen an die Regelung:

Stabiliät

Schnelligkeit

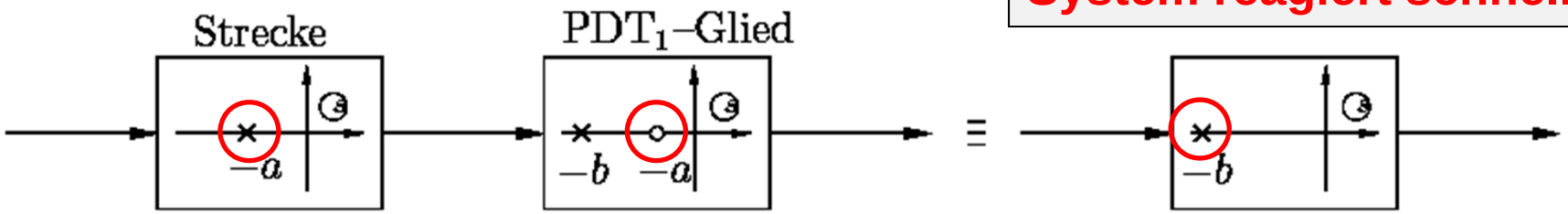
Genauigkeit

Robustheit

Pol-Nullstellen-Kompensation

Die Übertragungseigenschaften eines dynamischen Systems können durch eine Pol-Nullstellen-Kompensation (Steuerung) verändert werden:

System reagiert schneller

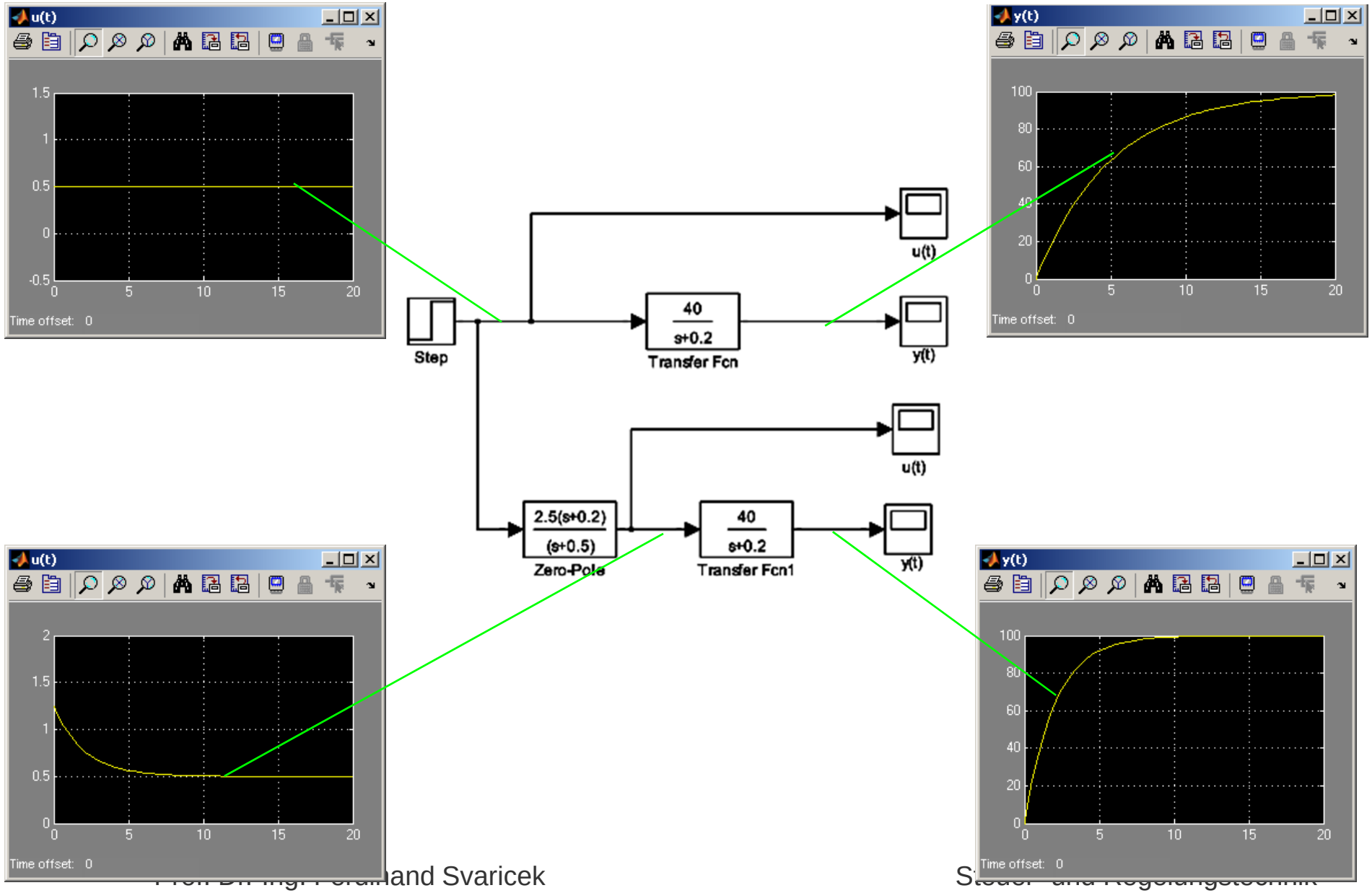


$$G_S(s) = \frac{1}{s+a} \qquad G_K(s) = \frac{s+a}{s+b} \qquad G(s) = G_S(s) \cdot G_K(s) = \frac{1}{s+b}$$

Voraussetzungen:

- **Die Strecke (Lage der zu kompensierenden Pole) muß bekannt sein.**
- **Eine Polkompensation ist nur in der linken *s*-Halbebene, also für stabile Pole möglich.**

Pol-Nullstellen-Kompensation (2)



Anforderungen an die Regelung:

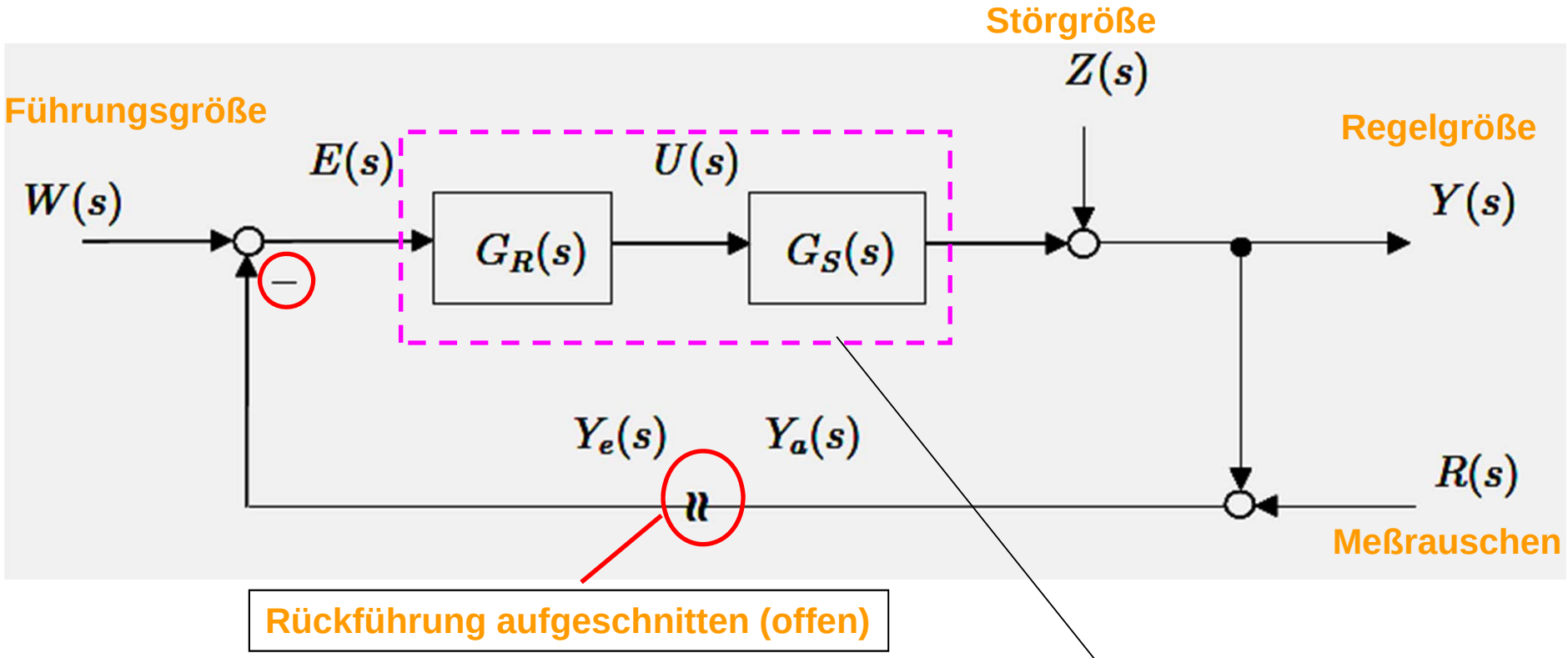
Stabiliät

Schnelligkeit

Genauigkeit

Robustheit

Standardregelkreis

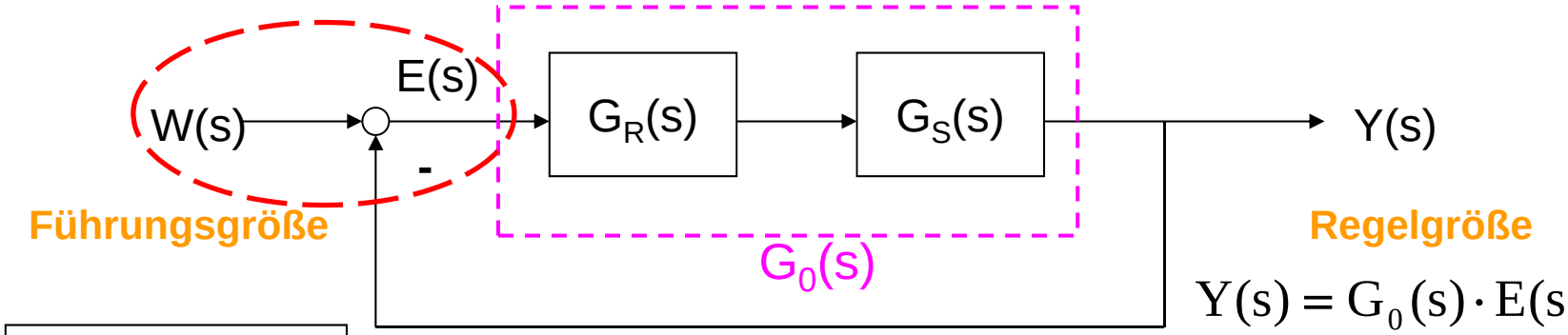


Übertragungsfunktion $G_0(s)$ des offenen Regelkreises für $z=w=r=0$**:**

$$G_0(s) =: G_R(s)G_S(s)$$

$$\Rightarrow \quad Y_a(s) = -G_R(s)G_S(s)Y_e(s) = -G_0(s)Y_e(s)$$

Führungsübertragungsfunktion



$$Y(s) = G_0(s) \cdot E(s)$$
$$= G_0(s)[W(s) - Y(s)]$$

Definition:

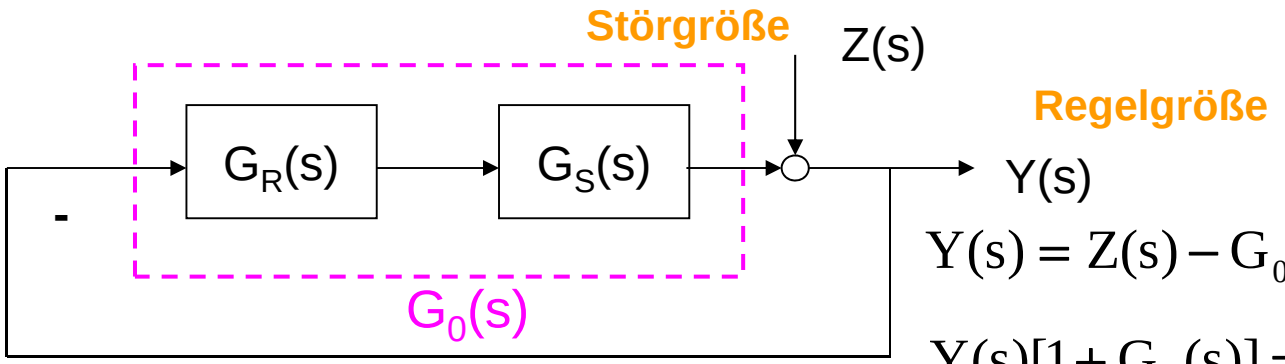
Die **Führungsübertragungsfunktion $G_W(s)$** gibt die Wirkung der Führungsgröße W(s) auf die Regelgröße Y(s) an. Für den Standard-Regelkreis berechnet sie sich durch:

$$Y(s)[1 + G_0(s)] = G_0(s)W(s) \quad \Rightarrow \quad \boxed{G_W(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}}$$

Führungsverhalten: $Y(s) = G_W(s) \cdot W(s)$

Regelungsaufgabe: $Y(s) := W(s) \quad \Rightarrow \quad G_w(s) = 1$

Störübertragungsfunktion



$$Y(s) = Z(s) - G_0(s) \cdot Y(s)$$

$$Y(s)[1 + G_0(s)] = Z(s)$$

Definition:

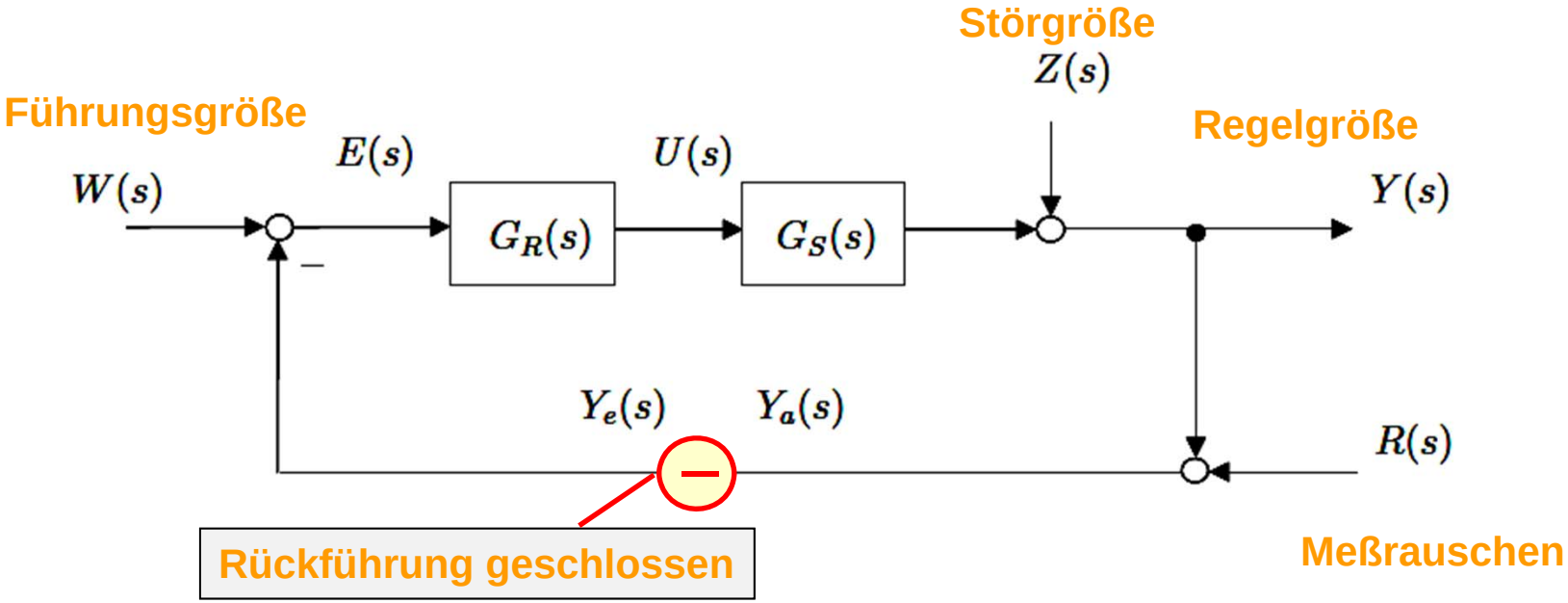
Mit der **Störübertragungsfunktion $G_z(s)$** lassen sich die Wirkungen der externen Störungen Z(s) auf die Regelgröße Y(s) berechnen. Für den Standard-Regelkreis lautet sie:

$$G_z(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{1}{1 + G_0(s)}$$

Störverhalten: $Y(s) = G_z(s) \cdot Z(s)$

Regelungsaufgabe: $Y(s) := 0 \quad \Rightarrow \quad G_z(s) = 0$

Standardregelkreis(2)



$$Y(s) = \frac{1}{1+G_0(s)}\,Z(s) + \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}\,W(s) - \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}\,R(s)$$

$\rightarrow 0 \qquad \rightarrow 1 \qquad \rightarrow 0$

Zielkonflikt

Typischer Amplitudenverlauf für $G_w(s)$ und $G_z(s)$

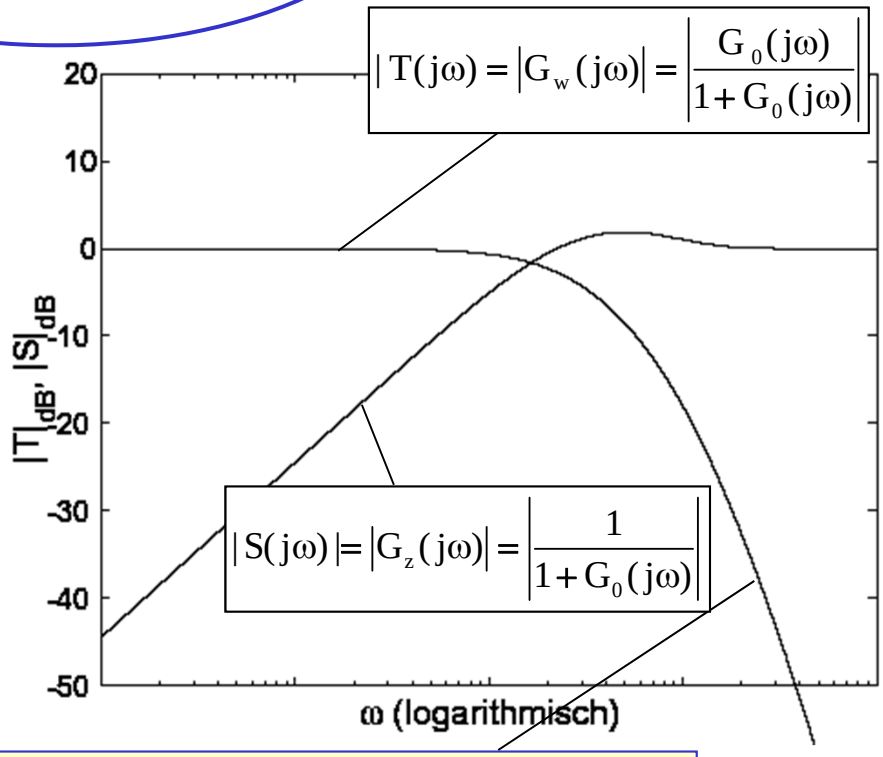
$$Y(s) = \frac{1}{1+G_0(s)} Z(s) + \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} W(s) - \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} R(s)$$

$\rightarrow 0$ $\rightarrow 1$ $\rightarrow 0$

Zielkonflikt

Eine Auflösung des Zielkonfliktes ist mit Hilfe der Eigenschaften der Signale Z(jω), W(jω), und R(jω) möglich:

Z(jω) und W(jω) haben in der Regel Tiefpaßverhalten, das Meßrauschen R(jω) ist breitbandig.



Unterdrückung des Meßrauschens

PT2-System (komplexe Pole)

Differentialgleichung:

$$\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{y}(t) + \frac{2D}{\omega_0}\dot{y}(t) + y(t) = K\,u(t)$$

Übertragungsfunktion:

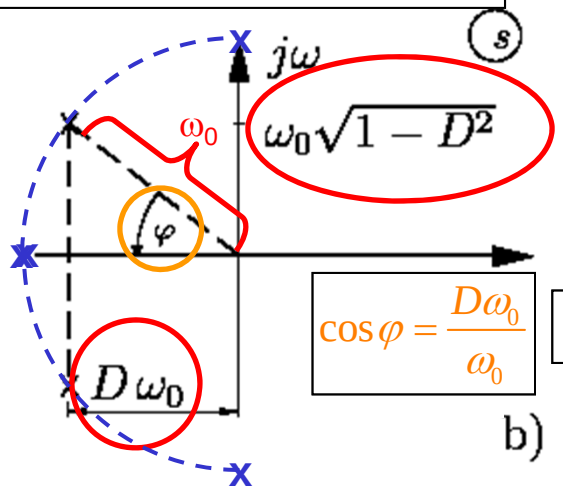
$$G(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2D}{\omega_0}s + 1}$$

Pole: Aus $s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$ folgt

$$s_{1,2} = -D\omega_0 \pm \sqrt{(D\omega_0)^2 - \omega_0^2}$$

$$= -D\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{D^2 - 1}$$

$$|s_{1,2}| = \sqrt{(D\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - D^2)} = \omega_0$$



$$\cos\varphi = \frac{D\omega_0}{\omega_0} = D$$

Für $D < 1$ ergibt sich:

$$s_{1,2} = -D\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - D^2}$$

Für $D = 1$ ergibt sich: $s_1 = s_2 = -\omega_0$

und für $D = 0$: $s_{1,2} = \pm j\omega_0$