# Zusammenfassung der 6. Vorlesung

- **Dynamische Systeme 2-ter Ordnung ($PT_2$-System)**
  - **Schwingungsfähige Systeme 2-ter Ordnung.**
    - Systeme mit Speicher für potentielle und kinetische Energie
    - **Beispiel:** Feder-Masse-Dämpfer System.
    - Normierte Differentialgleichung (Dämpfungsgrad D, Eigenfrequenz $\omega_0$).

# Zusammenfassung der 6. Vorlesung

- **Totzeitsysteme**
  - Treten beim Transport von Masse, Energie und Information auf.
- **Systeme ohne Ausgleich (I-Glieder)**
  - Treten bei Füll– und Positionierungsaufgaben auf.
  - **Ideales I-System**
    - Füllstand eines Beckens.
    - Lageregelung eines Hubschraubers.
- **$IT_1$-Systeme:** I-Systeme mit Verzögerung 1. Ordnung
  - Elektrischer Förderantrieb.
- **Zusammenfassung**
  - Klassifizierung des dynamischen Verhaltens von linearen Systemen: **P-, $PT_1$-, $PT_2$-, $PT_N$-, I-, $IT_1$-Systeme**

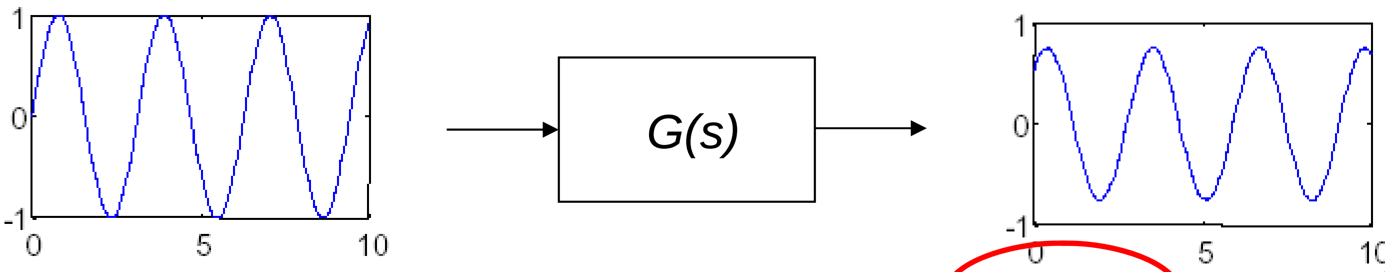
- **Experimentelle Modellierung einer elektrischen Drosselklappe**
  - Rapid Control Prototyping System.
  - Automatische C-Code Generierung mit Hilfe von Matlab/Simulink.
  - **Ergebnis:**
    - Das dynamische Verhalten des Drosselklappenwinkels zeigt $IT_1$-Verhalten.
    - Die Parameter $(K_I, T_1)$ des $IT_1$-Systems sind abhängig von der Amplitude des Eingangssignal.

    $\Rightarrow$

    Drosselklappe zeigt nichtlineares Verhalten.

# Beschreibung im Frequenz- und Bildbereich

- **Die Reaktionen eines Systems auf harmonische Eingangssignale verschiedener Frequenzen werden untersucht.**
- **Signale und Systeme werden mit Hilfe der Laplace-Transformation als Funktion einer komplexen Variablen** $s$ **beschrieben.**
- **Das stationäre Übertragungsverhalten von sinusförmigen Eingangssignalen wird für** $s=j\omega$ **durch die Übertragungsfunktion** $G(s)$ **beschrieben.**




$u(t) = \sin(\omega t)$

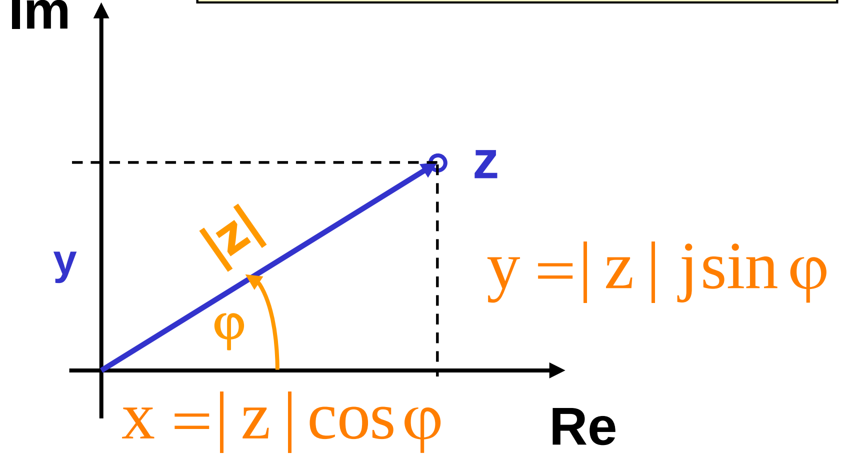
$y(t) = |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$

## Kartesische Koordinaten

$$z = x + jy$$

**Darstellung als Zeiger (Vektor) in der komplexen Zahlenebene (Gaußschen Zahlenebene).**

## Gaußsche Zahlenebene




## Polarkoordinaten

$$z = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

## Exponentialform

**Aus der Eulersche Identität**

$$\boxed{e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi}$$

**folgt** $z = |z|\, e^{j\varphi} = |z|\, e^{j\measuredangle z}$

**Definition: Laplace-Transformierte**

Ist $f(t)$ ein Signal mit der Eigenschaft $f(t) = 0$ für $t < 0$,
so lautet die einseitige **Laplace-Transformierte:**

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-s \cdot t} \, dt = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Integraltransformation

$$F(s) \bullet\!\!-\!\!\circ f(t)$$

Korrespondenzzeichen

**Laplace-Operator:** $s \equiv \sigma + j\omega$

**Bezeichnungen:**

$f(t)$ : Originalfunktion, Zeitbereich

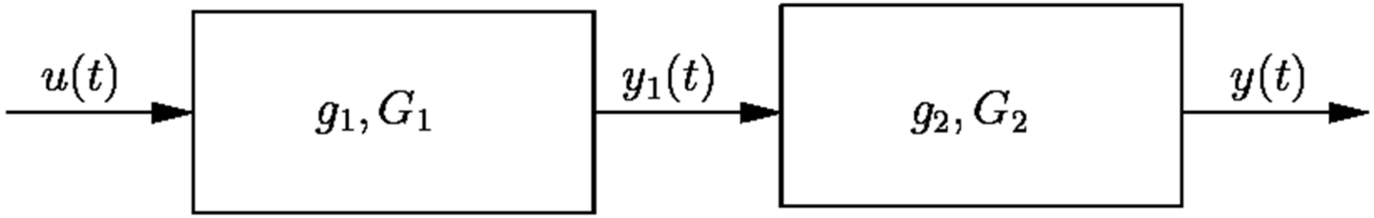
$F(s)$ : Bildfunktion, Bildbereich, Laplace-Bereich

## Welche Vorteile hat der Frequenz- und Bildbereich ?

- Beschreibung, Analyse und Entwurf von Regelungssystemen ist im Frequenz- und Bildbereich häufig sehr viel einfacher als im Zeitbereich.
  - Umwandlung linearer DGL mit konstanten Koeffizienten in algebraische Gleichung (Laplace-Transformation).
  - Zusammenfassen und Verknüpfen von Teilsystemen ist einfach möglich (Blockschaltbildalgebra).
- Das Übertragungsverhalten linearer Systeme kann durch eine gebrochen rationale Übertragungsfunktion beschrieben und analysiert (Pole und Nullstellen) werden.

# Anwendung des Faltungssatzes

## Reihenschaltung zweier Systeme




## Lösung im Zeitbereich (Faltungsintegral)

$$y(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty g_1(v) \cdot g_2(\tau) \cdot u(t-\tau-v)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}v$$

## Lösung im Bildbereich (Faltungssatz)

$$\boxed{Y_1(s) = G_1(s)U(s)}$$

$$\boxed{Y(s) = G_2(s)Y_1(s)} \quad \boxed{= G_2(s)G_1(s)U(s)}$$

**Faltungssatz stellt die Grundlage der Block-schaltbildalgebra dar (Tabelle A.1).**

**Gegeben:**

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \quad \cdots \quad + a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) =$$

$$b_0 u(t) + b_1 \dot{u}(t) + \quad \ldots \quad + b_m u^{(m)}(t) \quad ; m \leq n$$

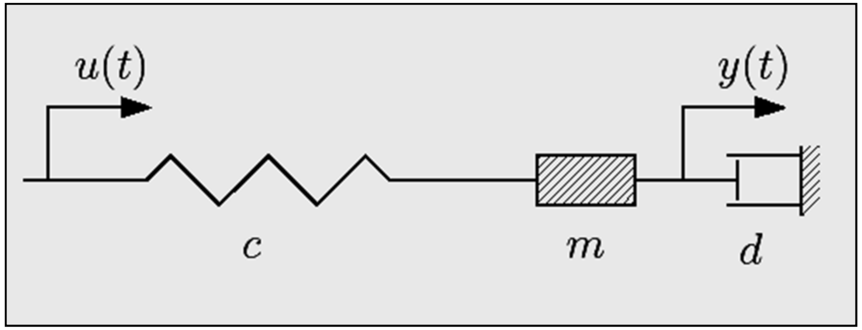
**Definition: Übertragungsfunktion**

Die **Übertragungsfunktion** *G(s)* eines Systems bestimmt sich über das Verhältnis der Laplace-Transformierten seiner Ein- und Ausgangssignale:

$$G(s) \equiv \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \quad \cdots \quad + b_{m-1} s^{m-1} + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \quad \cdots \quad + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n}$$

Y(s) und U(s) sind die Ein- und Ausgangsgrößen des Systems im Bildbereich.

# Übertragungsfunktion: Beispiel




$$\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{y}(t) + \frac{2D}{\omega_0}\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

**Anwendung des Differentiationssatzes auf**

$$\ddot{y}(t) + 2D\omega_0\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 u(t)$$

**für** $\ddot{y}(0) = \dot{y}(0) = y(0) = 0$ **liefert:**

$$s^2Y(s) + 2D\omega_0 sY(s) + \omega_0^2 Y(s) = \omega_0^2 U(s)$$

$$Y(s)(s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2) = \omega_0^2 U(s)$$

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}}$$

## Zusammenhang Gewichts- und Übertragungsfunktion

**Die Übertragungsfunktion G(s) lässt sich über die Gewichtsfunktion g(t) durch die Laplace-Transformation bestimmen:**

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty g(t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt$$

## Pole und Nullstellen

**Zähler und Nenner der Übertragungsfunktion**

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{m-1} s^{m-1} + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n} = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

**lassen sich in Linearfaktoren** (Fundamentalsatz der Algebra, Bronstein S. 576) **zerlegen:**

Lösungen der Gleichung $Z(s) = 0$

$$\mathbf{Z(s)} = b_0 + b_1 \cdot s^1 + \cdots + b_m \cdot s^m = b_m \prod_{j=1}^{m} (s - n_j)$$

Lösungen der Gleichung $N(s) = 0$

$$\mathbf{N(s)} = a_0 + a_1 \cdot s^1 + \cdots + a_n \cdot s^n = a_n \prod_{i=1}^{n} (s - p_i)$$

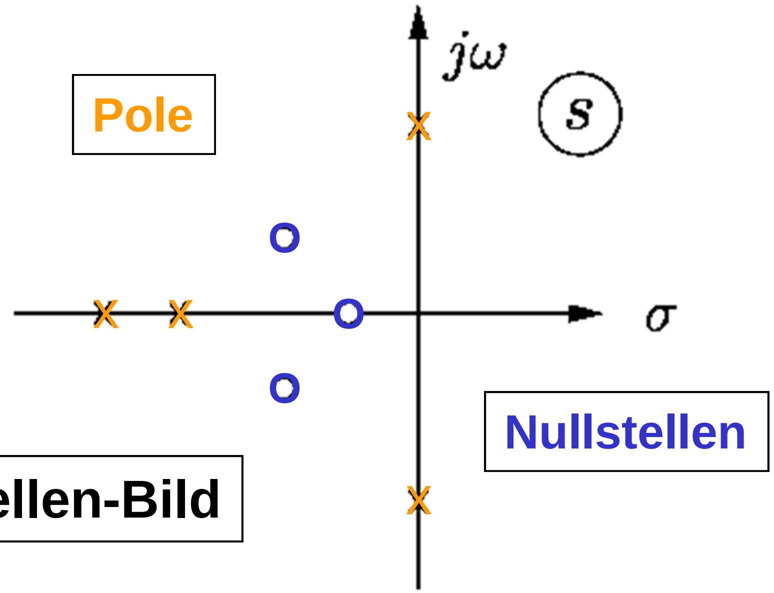
**$n_i$ : Nullstellen und**
**$p_i$ : Pole der Übertragungsfunktion $G(s)$**

## Darstellungsformen

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 \cdot s^1 + \cdots + b_m \cdot s^m}{a_0 + a_1 \cdot s^1 + \cdots + a_n \cdot s^n} \qquad \text{(Polynomform)}$$

$$G(s) = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{\prod_{j=1}^{m} (s - n_j)}{\prod_{i=1}^{n} (s - p_i)} \qquad \text{(Pol-Nullstellen-Form)}$$

**Das Pol-Nullstellen-Bild beschreibt eine Übertragungsfunktion bis auf den Faktor $b_m/a_n$ vollständig !!**

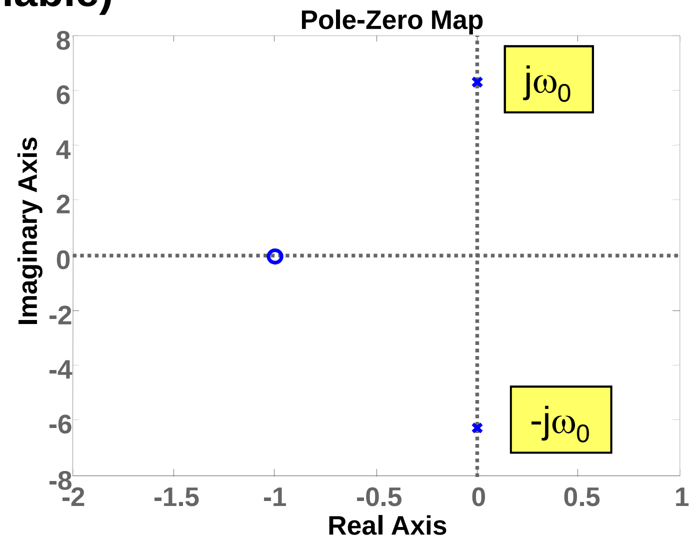



**Pol- Nullstellen-Bild**

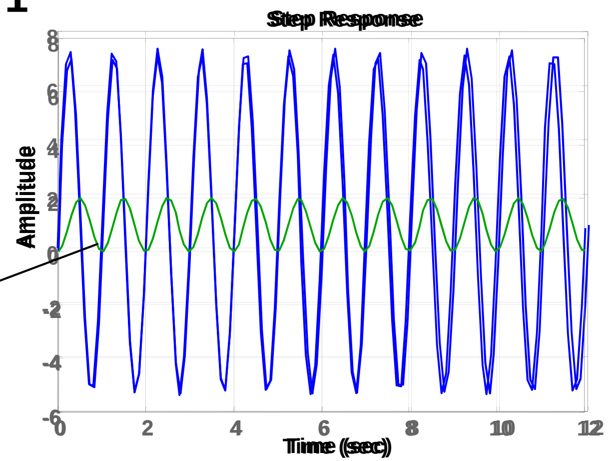
# Pole und Nullstellen: Matlab-Beispiel

```
% Beispiel Pol-Nullstellen-Verteilung und Sprungantwort eines PT2-Systems
%
s = tf('s') % Definition der Üfkt. G(s) = s (Laplace-Variable)
%
% Dämpfungsgrad D
D = 0
%
% Eigenfrequenz
w_0 = 2*pi
%
% Definition der Übertragungsfunktion

G_s = w_0^2*(s+1)/(s^2+2*D*w_0*s+w_0^2)
%
% Darstellung der Pol-Nullstellen-Verteilung in Bild 1
figure(1)
pzmap(G_s)

%
% Darstellung der Sprungantwort in Bild 2
figure(2)
step(G_s)
```

$$G(s) = \frac{\omega_0^2 \, (s+1)}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$$




$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$$



# Übertragungsfunktion: Realisierbarkeit

**Für** *m (Grad Z(s)) > n (Grad N(s))* **gilt**

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{Z_1(s)}{N(s)} + k_0 + k_1 s + \ldots + k_{m-n} s^{m-n}$$

**mit** *Grad* $Z_1(s) = n - 1$

## Es treten ideal differenzierende Glieder auf !

$$\boxed{u(t) = \sin \omega t} \Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{du(t)}{dt}} = \boxed{\omega \cos \omega t}$$

Ideales D-Glied ist technisch nicht realisierbar !!!

**Beispiel für** Grad Z(s) > Grad N(s) **:**

$$\boxed{G(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s+1} =}$$

$$\begin{array}{l} s^2 + s + 1 : (s+1) = s + \dfrac{1}{s+1} \\ \underline{-(s^2 + s)} \\ \qquad\qquad 0 + 1 \end{array}$$

Ideales D-Glied !!!

# Eigenschaften der Pole

- **Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion sind wichtige Kenngrößen eines dynamischen Systems.**

- **Die Eigenbewegung (Eigendynamik) eines dynamischen Systems setzt sich aus Exponential-funktionen $e^{\lambda_i t}$ zusammen, deren Exponenten gerade den Polen entsprechen $(\lambda_i = p_i)$.**

- **Haben sämtliche Pole negativen Realteil, so klingt die Eigenbewegung ab, das System ist stabil.**

- **Die Differenz $n$-$m$ der Ordnungen des Zähler- und Nennerpolynoms der Üfkt. wird Differenzgrad genannt, und ist eine weitere wichtige Kenngröße.**

# Eigendynamik eines Systems

**Die Eigendynamik beschreibt die Eigenbewegung eines dynamischen Systems, die das System ohne Erregung von außen auf Grund einer Anfangs-auslenkung ausführt.**

**"Kurzer Hammerschlag"**

**System**
**Übertragungsfunktion**
**G(s)**

$\longrightarrow$ $\boxed{Y(s) = G(s)}$

$$\boxed{Y(s) = G(s) \cdot \mathcal{L}\{\delta(t)\}} \quad \boxed{= \ G(s) \cdot 1 = G(s)}$$

**Korrespondenztabelle Nr. 34**

**Die Übertragungsfunktion G(s) beschreibt die Eigendynamik eines dynamischen Systems !**

# Partialbruchzerlegung

**Beispiel:**

$$G(s)=\frac{(s+N)}{(s+2)(s+3)}=\frac{R_1}{(s+2)}+\frac{R_2}{(s+3)}$$

$$=\frac{(R_1+R_2)s+3R_1+2R_2}{(s+2)(s+3)}$$

**Koeffizientenvergleich** $R_1+R_2=1 \Rightarrow R_1=1-R_2$

$3R_1+2R_2=N$ **einsetzen von** $R_1$ **liefert:** $3-3R_2+2R_2=N$

$\Rightarrow -R_2=N-3$

$\Rightarrow R_2=3-N\,,\; R_1=N-2 \Rightarrow$

$$\boxed{G(s)=\frac{N-2}{(s+2)}+\frac{3-N}{(s+3)}}$$

**Korresp. 3 in Tabelle A.2:**

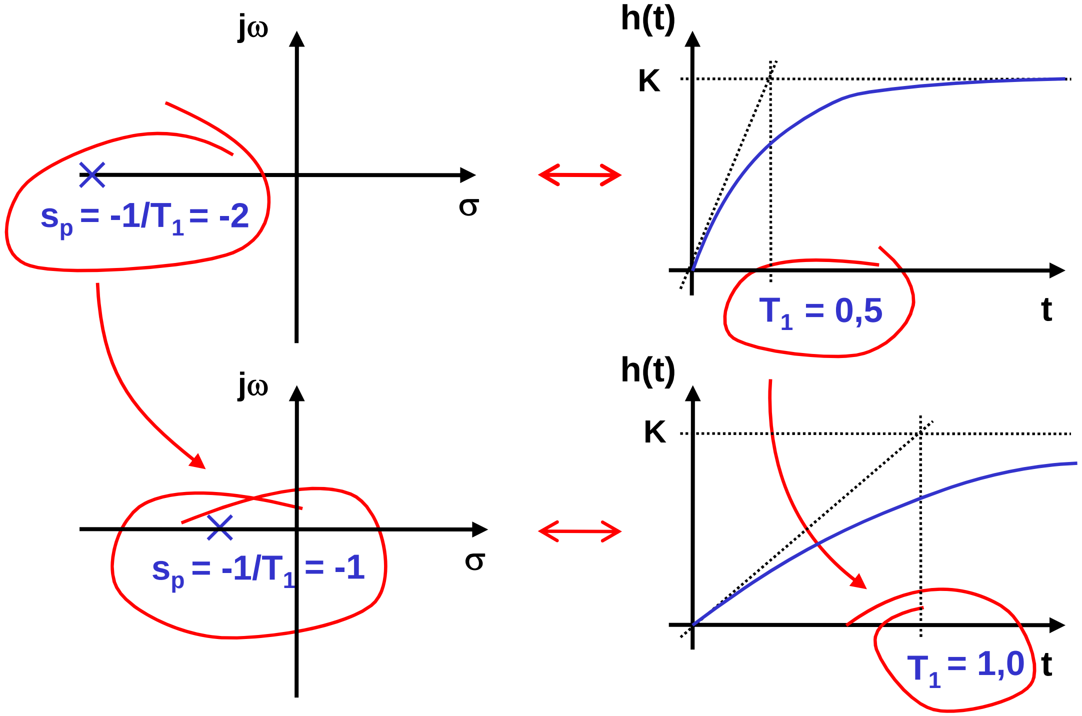
$$\boxed{g(t)=(N-2)e^{-2\cdot t}+(3-N)e^{-3\cdot t}}$$

**PT$_1$-System:** $$G(s) = \frac{K}{1 + sT_1}$$

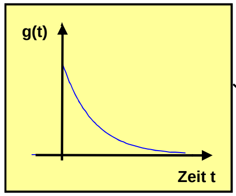
**Nullstellen:** Keine

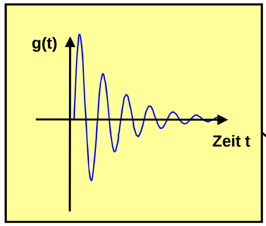
**Polstelle:** $$s_p = -\frac{1}{T_1}$$

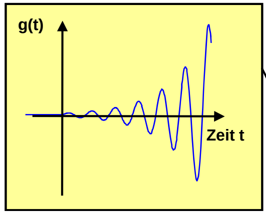
Ein System reagiert um so schneller, je weiter entfernt sich ein Pol von der Imaginärachse befindet.

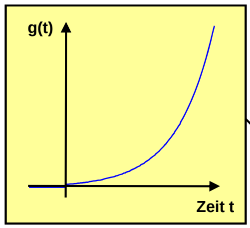


# PT2-System: Pole und Zeitverhalten

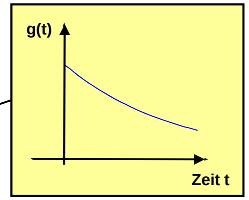


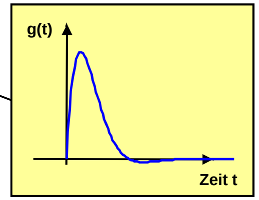



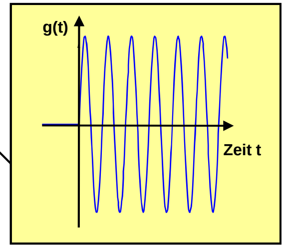



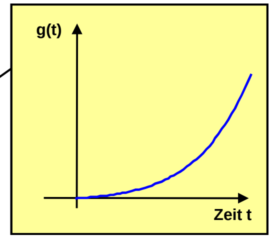



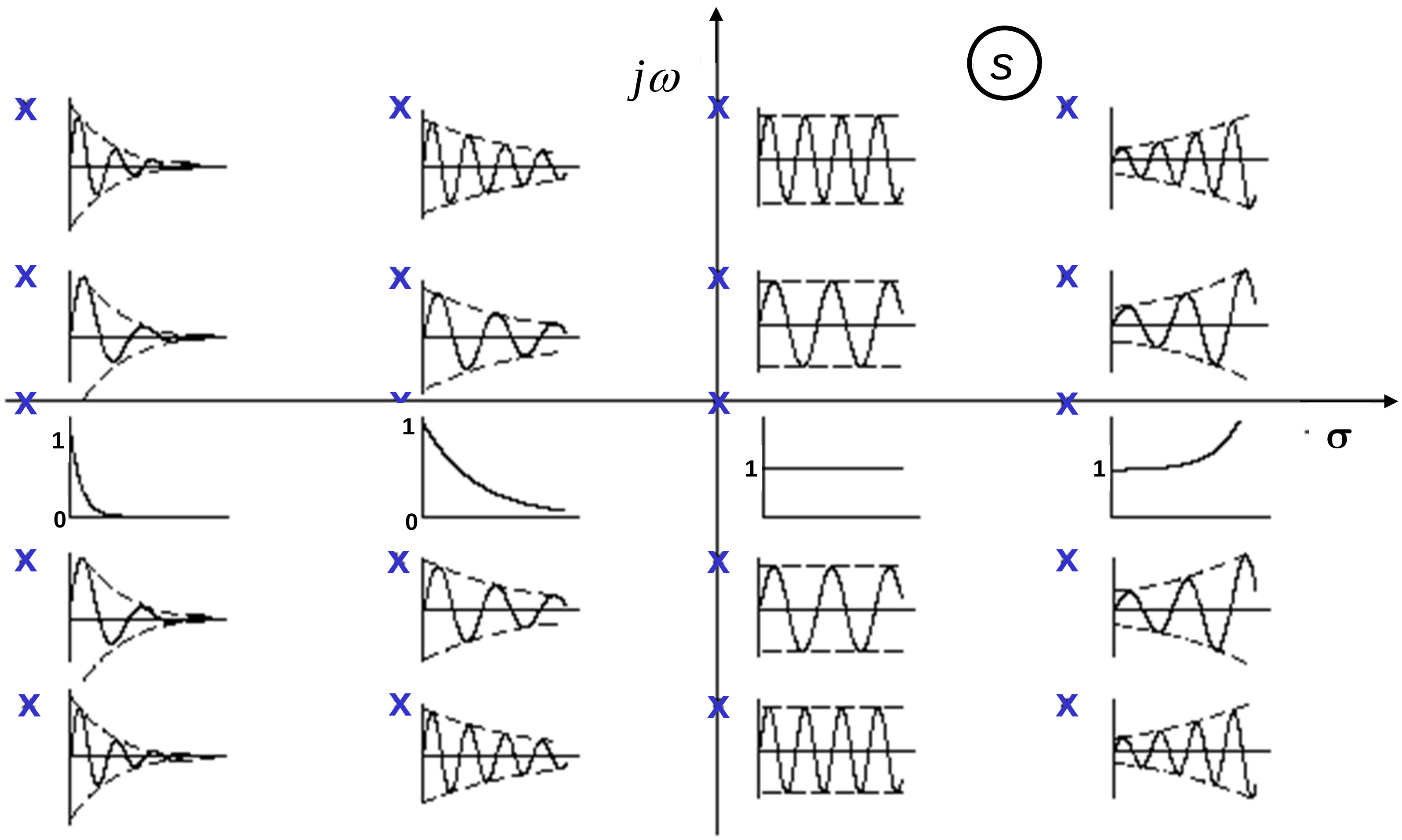

| Dämpfung | Systemeigenschaft | Pole |
|---|---|---|
| $D > 1$ | überkritisch gedämpft | negative Pole |
| $D = 1$ | kritisch gedämpft | negativer reeller Doppelpol |
| $\frac{1}{\sqrt{2}} < D < 1$ | gedämpft ohne Resonanzüberhöhung | konjugiert komplexe Pole mit negativen Realteilen |
| $0 < D < \frac{1}{\sqrt{2}}$ | gedämpft mit Resonanzüberhöhung | konjugiert komplexe Pole mit negativen Realteilen |
| $D = 0$ | ungedämpft | konjugiert komplexe Pole mit verschwindenden Realteilen |
| $-1 < D < 0$ | instabil | konjugiert komplexe Pole mit positiven Realteilen |
| $D = -1$ | instabil | positiv reeller Doppelpol |
| $D < -1$ | instabil | positive reelle Pole |




$j\omega$
s
σ
1
0
1
0
1
1