Zusammenfassung der 4. Vorlesung

- **Lösung von Regelungsaufgaben**
- **Modellbildung dynamischer Systeme**
  - Experimentell und analytisch
  - Modellierung im Zeit- und Bildbereich
- **Lineare Systeme**
  - **Lineare Systeme ⇔ Superpositionsprinzip**
- **Linearisierung nichtlinearer Systeme**
  - **Linearisierung des dynamischen Verhaltens (Taylorreihen-Entwicklung)**

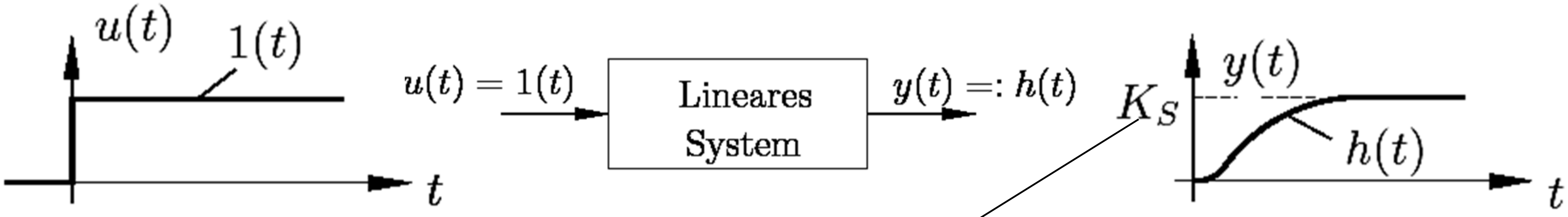
Zusammenfassung der 4. Vorlesung

- **Linearisierung nichtlinearer Systeme**
  - **Linearisierung des statischen Verhaltens (statische Kennlinie)**
    - Graphische Linearisierung (nichtlineare Funktion wird durch Tangente im Arbeitspunkt ersetzt)
    - Analytische Linearisierung (Taylorreihen-Entwicklung im Arbeitspunkt und Vernachlässigung der höheren Ableitungen)

- **Modellierung mit Hilfe von Testsignale**
  - Sprungfunktion, Übergangsfunktion

Sprungantwort

Definition 2.4 Ein dynamisches System sei zu einem Zeitpunkt $t = t_0$ energiefrei, d.h. alle Anfangsbedingungen der beschreibenden Differentialgleichung sind Null. Die Systemantwort des durch die Einheitssprungfunktion $u(t) = 1(t)$ erregten Systems heißt die **Sprungantwort** oder Übergangsfunktion $h(t)$. □



Sprungfunktion 1(t)

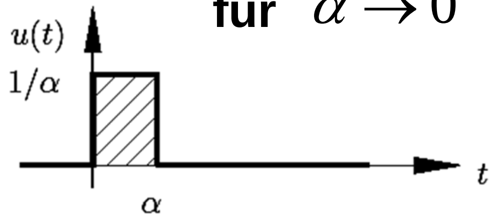
Sprungantwort h(t)

$$K_S = h(\infty) = \lim_{t \to \infty} h(t)$$

Systemverstärkung

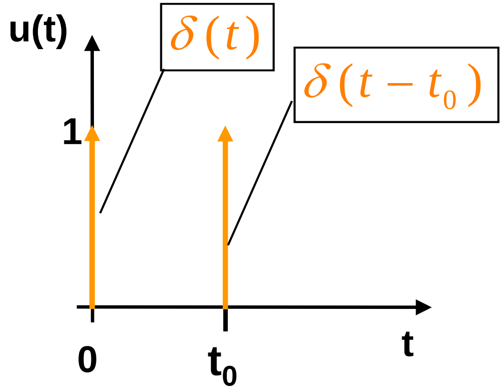
Impulsfunktion und Impulsantwort

$$u(t) = \frac{1}{\alpha}[1(t) - 1(t-\alpha)]$$



für $\alpha \to 0 \quad \Rightarrow$

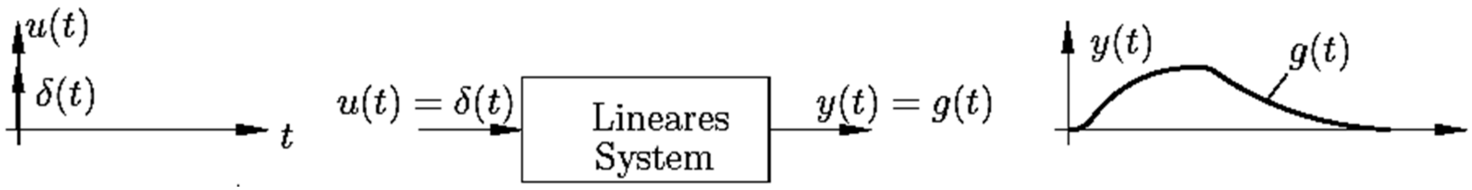
Dirac'scher Deltaimpuls $\delta(t)$



Recheckimpuls mit normierter Impulsfläche 1

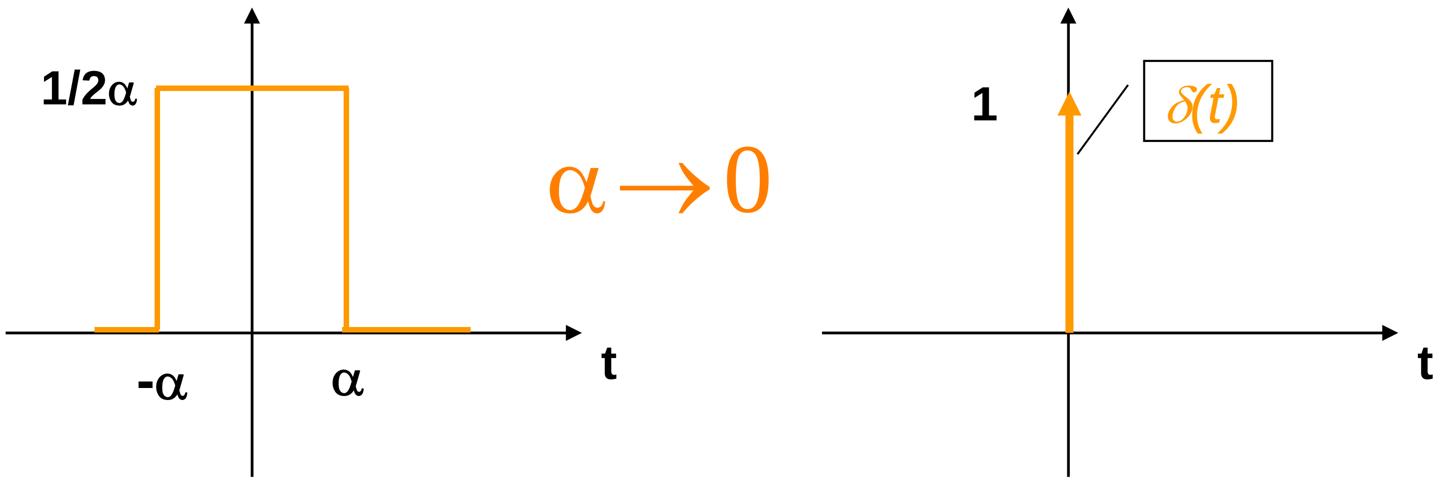
Symbolische Darstellung

Definition 2.5
Die Systemantwort eines Systems bei Erregung durch $\delta(t)$ heißt: **Impulsantwort** oder Gewichtsfunktion $g(t)$. □



Dirac'scher Deltaimpuls $\delta(t)$

Gewichtsfunktion $g(t)$



Die Deltafunktion ist eine Distribution oder verallgemeinerte Funktion

⇒ **Ein von Null verschiedener Funktionswert ergibt sich nicht durch Einsetzen eines Argumentes, sondern durch eine Rechenvorschrift.**

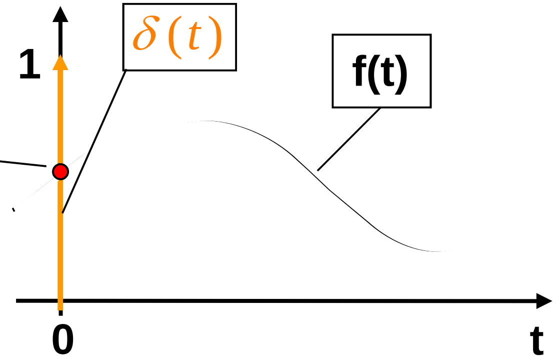
Ausblendeigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

Ausblendeigenschaft des Deltaimpulses

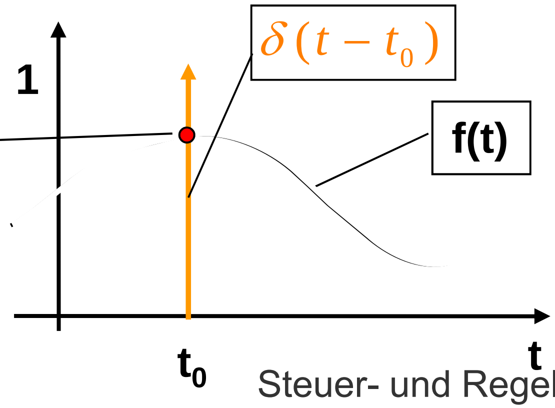
Das Integral über das Produkt einer Funktion *f(t)* mit dem Deltaimpuls *δ(t)* blendet alle Funktionswerte bis auf *f(0)* aus:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$



Ausblendeigenschaft des verschobenen Deltaimpulses:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$



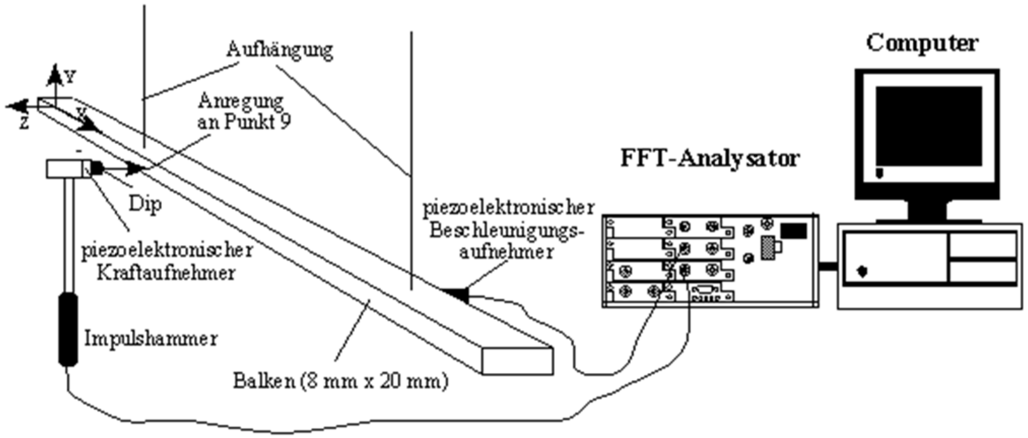
Messung der Gewichtsfunktion

"Kurzer Hammerschlag"

dynamisches System

$y(t) = g(t)$

Praktische Messung einer Näherung der Gewichtsfunktion mit Hilfe eines Impulshammers



Faltungsintegral

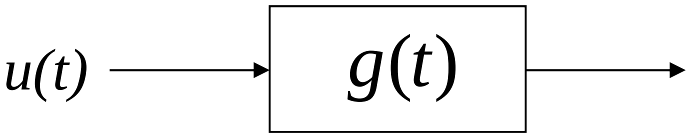
Definition:

$$y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Eigenschaften:

- **Beschreibt die Beziehung zwischen Eingangs- und Ausgangssignal im Zeitbereich.**
- **Bestimmung des Ausgangssignals für beliebige Eingangssignale.**

Achtung: t ist eine Konstante

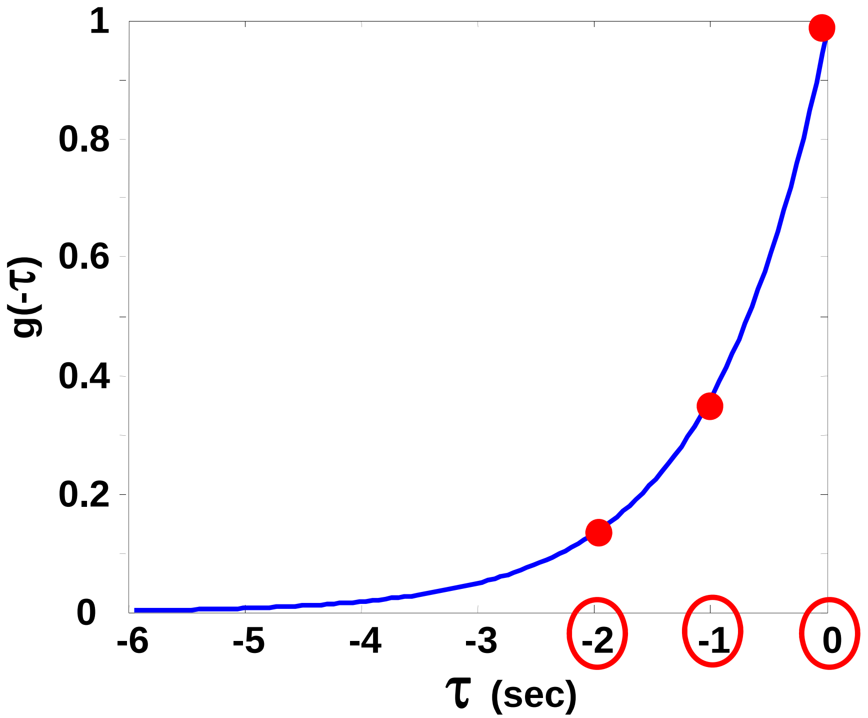


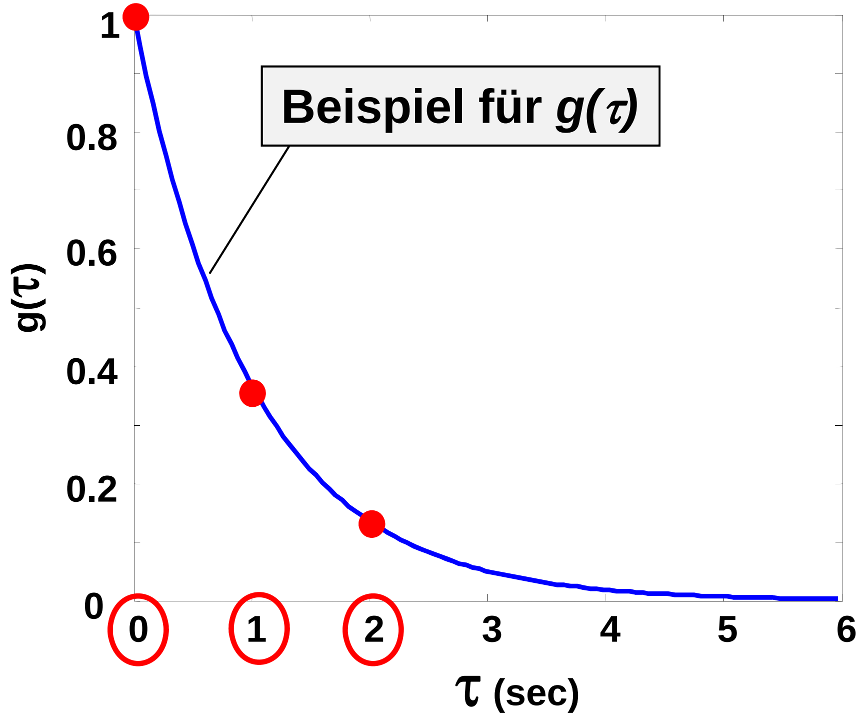
$$y(t) = \int_0^t g(v)u(t-v)\mathrm{d}v$$

Gewichtsfunktion enthält die gesamte Information über das dynamische Verhalten eines linearen Systems.

Woher kommt der Begriff Faltungsintegral?

Betrachtung des Terms $g(-\tau)$ ($g(t-\tau)$ für $t = 0$)





$g(-\tau) = 0$ für $\tau > 0$, $g(-\tau) = g(\tau)$ für $\tau \leq 0$

$g(-\tau)$ erhält man durch umklappen (falten) von $g(\tau)$

Unterscheidung:

- **Übertragungsmodell** (Klemmenmodell)
- **Zustandsgrößenmodell** (Zustandsmodell)

Die Zustandsgrößen beschreiben den Energie-gehalt der im System enthaltenen Speicher-elemente.

Beispiel: Feder-Dämpfer-Masse-System

Feder: Speicher für potentielle Energie

Masse: Speicher für kinetische Energie

System von Differentialgleichungen 1-ter Ordnung

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) \\
y(t) &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t) + du(t)
\end{aligned}
\qquad
\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}
\qquad
\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{c}^T = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix}
$$

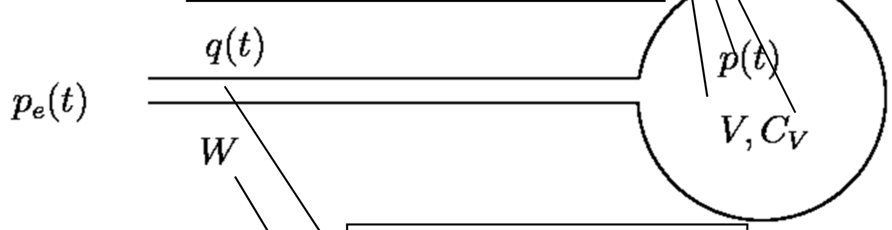
Beispiel: Pneumatischer Speicher

u → **Technisches Übertragungssystem** → *y*

u → **Modell des technischen Übertragungssystems** → *y*

?

Druck, Volumen Speicherkapazität



Durchfluß Strömungs-widerstand

$$q(t) = \frac{1}{W}\left[p_e(t) - p(t)\right]$$

$$\dot{p}(t) = \frac{1}{C_V} q(t)$$

Eingangsgröße: $u(t) = p_e(t)$

Ausgangsgröße: $y(t) = p(t)$

Gesetze: Durchfluß = Druckgefälle / Strömungswiderstand

Druckänderung = Durchfluß / Speicherkapazität

$$C_V W \dot{p}(t) + p(t) = p_e(t)$$

Beispiel: Pneumatischer Speicher (2)

$$\left[\frac{m^3}{Pa}\right] \quad \left[\frac{Pa}{m^3/s}\right] \qquad T = C_V W \ [\mathrm{s}]$$

$$C_V W \dot{p}(t) + p(t) = p_e(t) \quad \Rightarrow \quad T\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

Proportionalübertragungsglied mit Verzögerung (Zeitkonstante) 1. Ordnung

PT$_1$-System

Anwendung der Laplace-Transformation

$$TsY(s) + Y(s) = U(s) \quad \Rightarrow \quad Y(s)(Ts+1) = U(s)$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{1+sT} \cdot U(s) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{1+sT} \cdot \underbrace{U(s)}\right\}$$

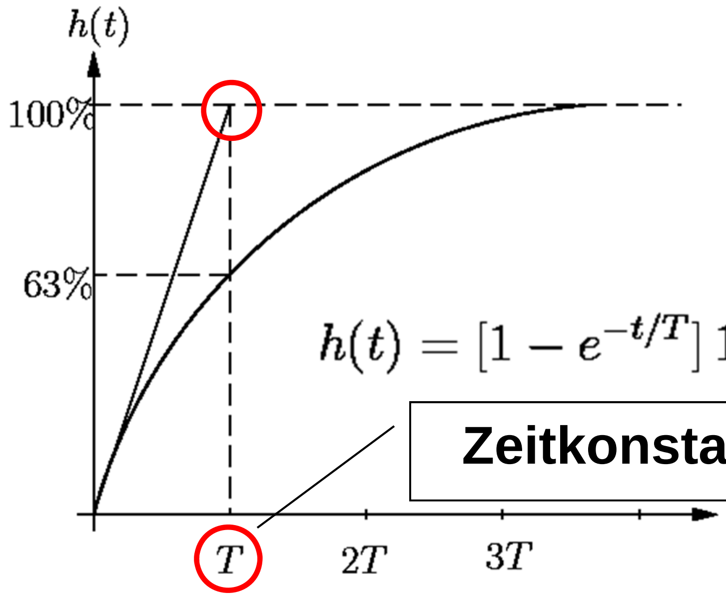
1/s **für** *u(t) = 1(t)*

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(1+sT)}\right\} = (1 - e^{-t/T}) \cdot 1(t)$$

Tabelle A.2, Korrespondenz 6

PT$_1$-System

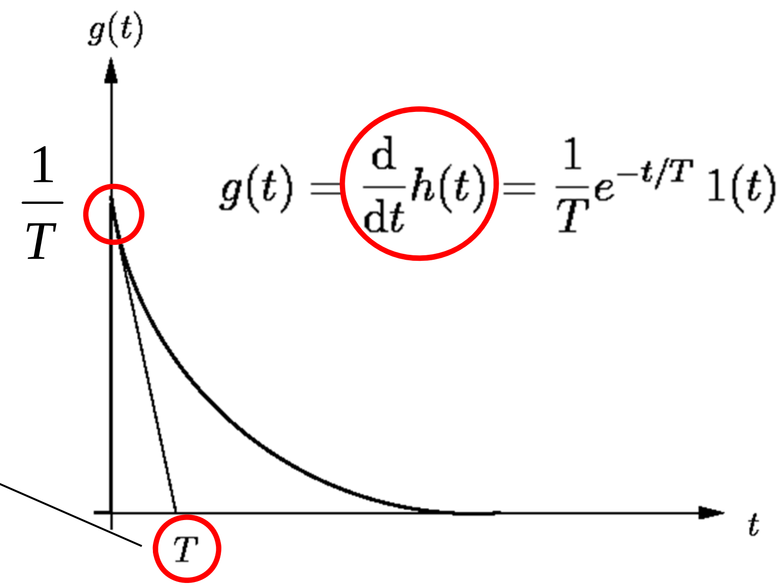
$$T\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$



$$h(t) = [1 - e^{-t/T}]\,1(t)$$

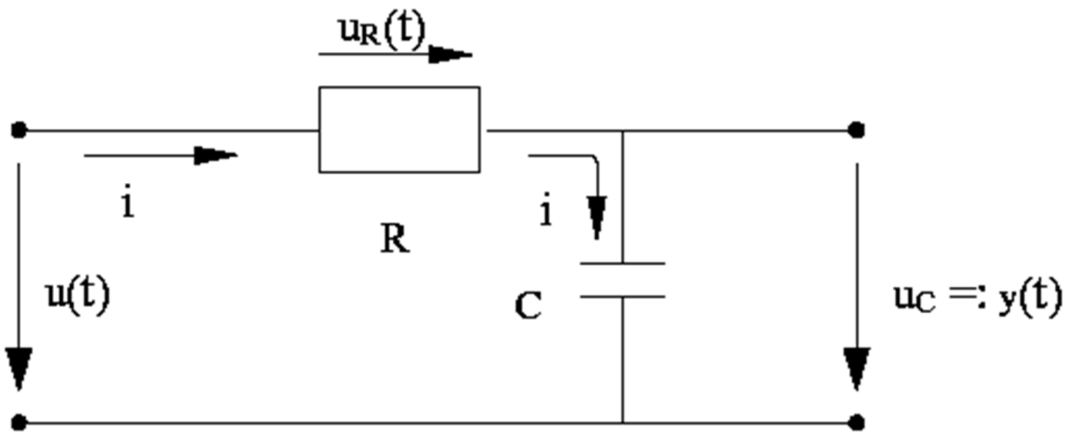
Zeitkonstante

Sprungantwort



$$g(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t) = \frac{1}{T}e^{-t/T}\,1(t)$$

Gewichtsfunktion



Eingangsgröße:

$u(t)$ = Eingangsspannung

Ausgangsgröße:

$y(t) = u_C(t)$

Gesetze: Maschensatz $u(t) = u_R(t) + u_C(t)$

Spannungsabfall am Widerstand $u_R(t) = R\, i(t)$

Kondensatorspannung $u_C(t) = 1/C \int i(t)dt$

Aus $\dot{u}_C(t) = \frac{1}{C} i(t) \Rightarrow i(t) = C\dot{u}_C(t)$ **und damit**

aus $u(t) = u_R(t) + u_C(t) \Rightarrow \boxed{u(t) = RC\dot{u}_C(t) + u_C(t)}$

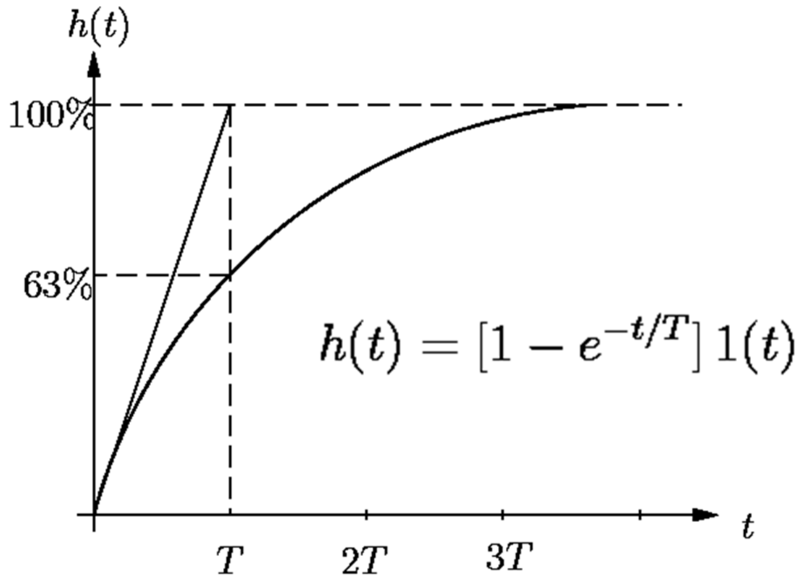
Beispiel: RC-Glied (2)

$[\Omega]\ \left[\frac{s}{\Omega}\right]$

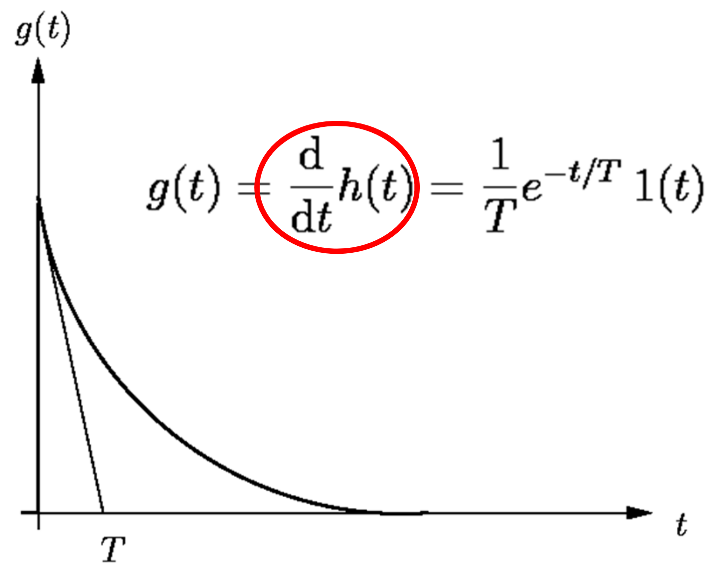
$$RC\,\dot{y}(t) + y(t) = u(t) \quad \Rightarrow \quad T = R \cdot C \quad \Rightarrow \quad T\,\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

$y(t) = u_C(t)$

PT_1-System

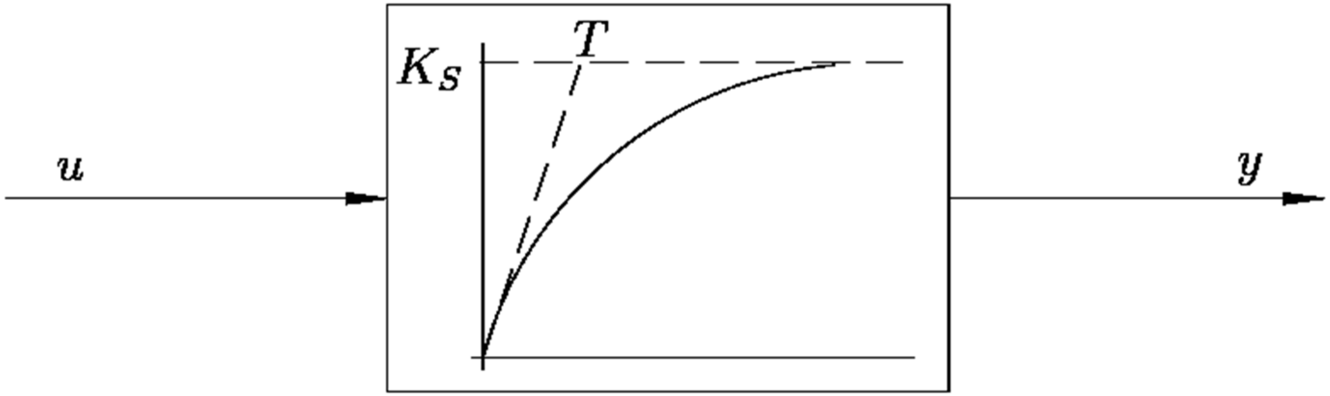


Sprungantwort



Gewichtsfunktion

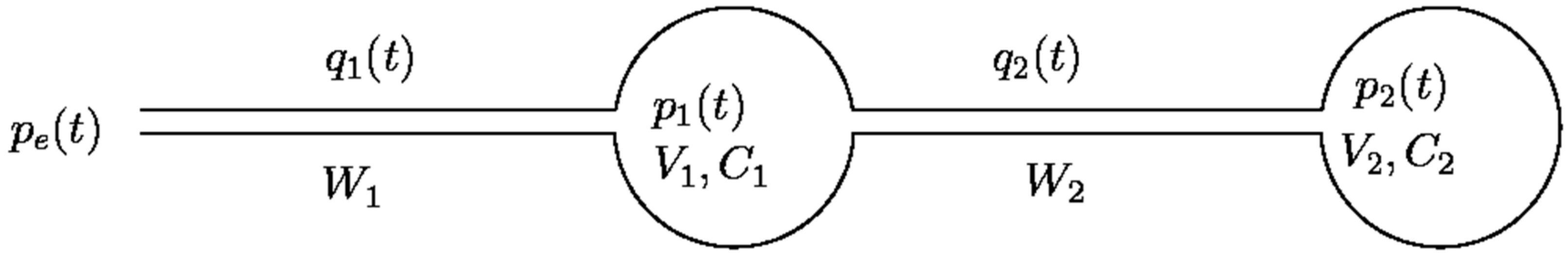
Differentialgleichung: $$T\dot{y}(t) + y(t) = K_S u(t)$$



Blockschaltbild des Systems 1. Ordnung

Kenngrößen: Zeitkonstante T
Systemverstärkung $K_S = h(\infty)$

Pneumatisches System 2. Ordnung



$$q_1(t) = \frac{1}{W_1}[p_e(t) - p_1(t)] \qquad q_2(t) = \frac{1}{W_2}[p_1(t) - p_2(t)]$$

$$\dot{p}_1(t) = \frac{1}{C_1}[q_1(t) - q_2(t)] \qquad \dot{p}_2(t) = \frac{1}{C_2} q_2(t)$$

$$\dot{p}_1(t) = -[\frac{1}{C_1 W_1} + \frac{1}{C_1 W_2}]p_1(t) - \frac{1}{C_1 W_2} p_2(t) + \frac{1}{C_1 W_1} p_e(t)$$

$$\dot{p}_2(t) = \frac{1}{C_2 W_2}[p_1(t) - p_2(t)]$$

2 gekoppelte Differentialgleichungen 1. Ordnung

Pneumatisches System 2. Ordnung (2)

Setzt man $\boxed{u(t) := p_e(t)}$ $\boxed{x_1(t) := p_1(t)}$ $\boxed{x_2(t) := p_2(t)}$ $\boxed{= y(t)}$

und $\boxed{T_1 := C_1 W_1}$ $\boxed{T_2 := C_2 W_2}$ $\boxed{T_{21} := C_1 W_2}$

erhält man ein Zustandsraummodell:

$$\boxed{\dot{x}_1(t) = -[\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_{21}}]x_1(t) - \frac{1}{T_{21}} x_2(t) + \frac{1}{T_1} u(t)}$$

$$\boxed{\dot{x}_2(t) = \frac{1}{T_2}[x_1(t) - x_2(t)]}$$

$$\boxed{y(t) = x_2(t)}$$

Pneumatisches System 2. Ordnung (3)

bzw. in Matrizendarstellung:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t)\,; \;\; \boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ y(t) &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \begin{bmatrix} -(T_1^{-1} + T_{21}^{-1}) & T_{21}^{-1} \\ T_2^{-1} & -T_2^{-1} \end{bmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} T_1^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{c}^T &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \;. \end{aligned}$$

Pneumatisches System 2. Ordnung (4)

Übertragungsmodell

$$\boxed{\dot{x}_2(t) = \frac{1}{T_2}[x_1(t) - x_2(t)]}$$

nach $x_1(t)$ auflösen liefert:

$$\boxed{x_1(t) = T_2\dot{x}_2(t) + x_2(t)} \quad \boxed{= T_2\dot{y}(t) + y(t)}$$

und

$$\boxed{\dot{x}_1(t) = T_2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t)}$$

Einsetzen in

$$\boxed{\dot{x}_1(t) = -[\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_{21}}]x_1(t) - \frac{1}{T_{21}}x_2(t) + \frac{1}{T_1}u(t)}$$

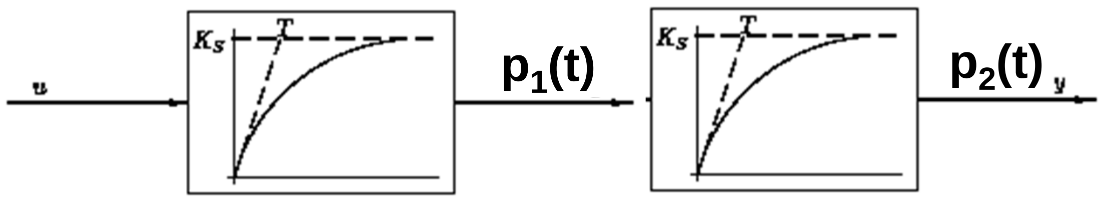
liefert

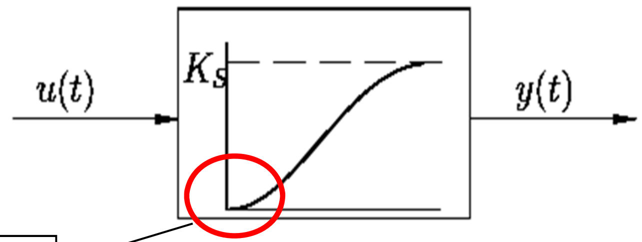
$$T_1T_2\ddot{y}(t) + (T_1 + T_2 + \frac{T_1T_2}{T_{21}})\dot{y}(t) + y(t) \quad = \quad u(t)$$

Pneumatisches System 2. Ordnung (5)

Reihenschaltung zweier PT$_1$-Systeme

PT$_2$-System

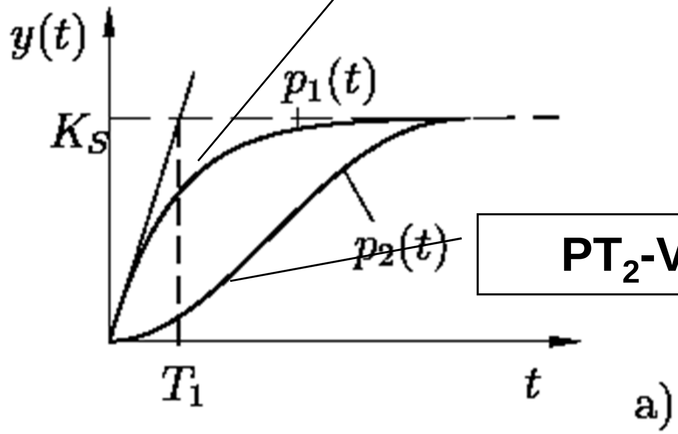




waagerechte Tangente

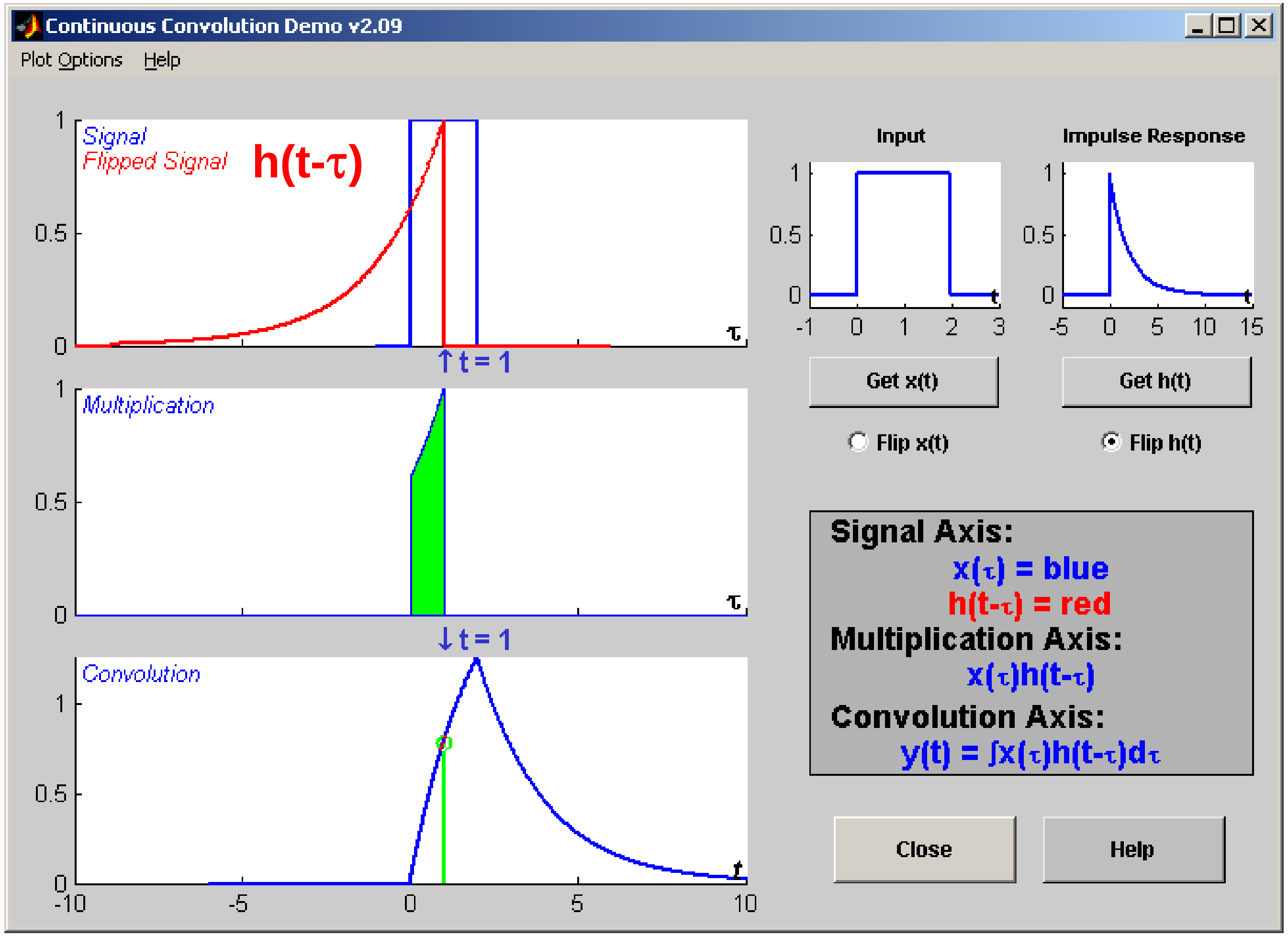
Blockschaltbild

PT$_1$-Verhalten



PT$_2$-Verhalten

Kenngröße:
Systemverstärkung K_S



http://spfirst.gatech.edu/matlab/ZipFiles/cconvdemo-v218.zip