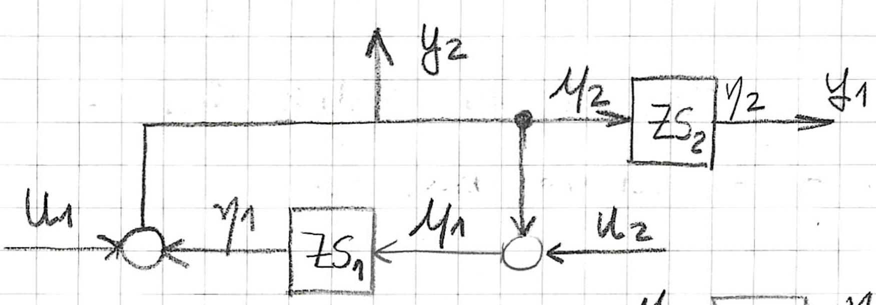
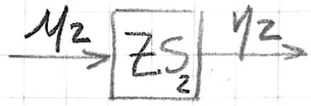
8.1 Aufgabe: A, B, C und D: $y=(y_1,y_2)$, $u=(u_1,u_2)$

Vorgehen: (Seite 804)



3)a) Verhalten der Blöcke:

• Zwei Blöcke:



$$ZS_1: \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 \mu_1 \\ \eta_1 = C_1 x_1 + D_1 \mu_1 \end{cases} \qquad ZS_2: \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 \mu_2 \\ \eta_2 = C_2 x_2 + D_2 \mu_2 \end{cases}$$

3)b) Verbindungen der Blöcke:

$$\begin{cases} \mu_1 = u_2 + \mu_2 = u_2 + u_1 + \eta_1 \\ \mu_2 = u_1 + \eta_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = \eta_2 \\ y_2 = \mu_2 = u_1 + \eta_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu = K\eta + Lu \\ y = E\eta + Fu \end{cases}$$ (Seite 811)

$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$, $\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \; /\!/$$

3)c) Zusammenfassen und Eliminieren ($x = (x_1, x_2)$)

$$\underbrace{\begin{cases} \dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}\mu & (a) \\ \eta = \bar{C}x + \bar{D}\mu & (b) \end{cases}}_{\text{Teilsysteme}} \qquad \underbrace{\begin{cases} \mu = K\eta + Lu & (c) \\ y = E\eta + Fu & (d) \end{cases}}_{\text{Verbindungen}}$$

* Ergebnis vorgestellt von Prof. Reißig in der achten Vorlesung:

$$\dot{x} = \underbrace{(\bar{A} + \bar{B}(id - K\bar{D})^{-1}K\bar{C})}_{=A} x + \underbrace{\bar{B}(id - K\bar{D})^{-1}L}_{=B} u$$

$$y = \underbrace{E(id + \bar{D}(id - K\bar{D})^{-1}K)\bar{C}}_{=C} x + \underbrace{(F + E\bar{D}(id - K\bar{D})^{-1}L)}_{=D} u$$

* Bedingung für die Verwendung dieses Ergebnisses:

$\Longrightarrow$ $(id - k\bar{D})$ muss invertierbar sein! //

$\bar{A} = diag(A_1, A_2)$, $\bar{B} = diag(B_1, B_2)$, $C = diag(C_1, C_2)$, $D = diag(D_1, D_2)$

i) $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1$ und D_2 waren gegeben.

$\bar{D} = diag(D_1, D_2) = diag(0, 0)$

- $(id - k\bar{D}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = id$

$det(id) = 1 \neq 0 \Longrightarrow (id - k\bar{D})$ ist invertierbar!

- $(id - k\bar{D})^{-1} = id^{-1} = id$ //

$\bar{A} = diag(A_1, A_2) = diag(diag(-1,-2), diag(-2,-3))$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{matrix}}^{A_1} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{matrix}}_{A_2} \end{bmatrix} \qquad \bar{B} = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}}^{B_1} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}}_{B_2} \end{bmatrix}$$

$\bar{B} = diag(B_1, B_2) = diag([0 \;\; 1]^T, [1 \;\; 0]^T)$

$\bar{C} = diag(C_1, C_2) = diag([0 \;\; 1], [1 \;\; 0]) = \begin{bmatrix} \overbrace{0 \;\; 1}^{C_1} & 0 \;\; 0 \\ 0 \;\; 0 & \underbrace{1 \;\; 0}_{C_2} \end{bmatrix}$

- $A = \bar{A} + \bar{B}(id - k\bar{D})^{-1} k \bar{C} = \bar{A} + \bar{B}\, id^{-1} k\, \bar{C} = \bar{A} + \bar{B} k \bar{C}$

$$A = \bar{A} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \bar{A} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \bar{A} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad //$$

- $B = \bar{B}(id - k\bar{D})^{-1} L = \bar{B} \cdot id^{-1} \cdot L = \bar{B} \cdot L$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad //$$

$\bullet\ C = E(id + \overset{0\ (\bar D = 0)}{\cancel{\bar D (id - k\bar D)^{-1}}} \cdot k)\bar C = E\bar C$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad //$$

$\bullet\ D = (F + \underset{0\ (\bar D = 0)}{\cancel{E\bar D (id - k\bar D)^{-1} L}}) = F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad //$

ii) $\bar D = diag(D_1, D_2) = diag(1, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Bedingung: $(id - k\bar D) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(id - k\bar D) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 \rightarrow$ nicht invertierbar!

* Die Zusammenschaltung von ZS_1 und ZS_2 kann <u>nicht</u> durch ein ZS beschrieben werden!

↳ Beweis: Elimination von η in (c):

c) $y = k\eta + Lu = k(\bar C x + \bar D y) + Lu = k\bar C x + k\bar D y + Lu$

$(id - k\bar D)\, y = k\bar C x + Lu \Rightarrow y = \underline{(id - k\bar D)^{-1}}(k\bar C x + Lu)$

Es ist nicht möglich, die interne Variable y zu eliminieren, da $(id - k\bar D)$ nicht invertierbar ist!