5. Übung Victor Chuidde Chaim

5.1 Aufgabe: $\Phi(t) = \exp(At)$? $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

Eigenwerte: $\det(A - \lambda id) = 0$

$$\det(A - \lambda id) = \det\left(\begin{bmatrix} -4-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & -4-\lambda & 1 \\ -3 & 0 & -4-\lambda \end{bmatrix}\right) = (-4-\lambda)^3 = 0$$

$\lambda_{1,2,3} = -4$ $\Rightarrow$ Die Matrix A hat Eigenwerte, die denselben Wert haben, der von 0 verschieden ist. Daher verwenden wir den EW-Verschiebungstrick.

$$A = \lambda id + (A - \lambda id)$$

$$\rightarrow \exp(At) = \exp((\lambda id + (A - \lambda id))t) =$$
$$= \exp(\lambda id t)\exp((A - \lambda id)t)$$

- $\exp((\lambda id)t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda id)^n t^n}{n!} = id \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n t^n}{n!} = id\, e^{\lambda t} = id\, e^{-4t}$
- $\exp((A - \lambda id)t) \Rightarrow A - \lambda id = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Eigenwerte von $(A - \lambda id) \Rightarrow \lambda_{1,2,3} = 0 \rightarrow$ Nilpotent!

$$(A - \lambda id)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda id)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(A - \lambda id)^m = 0$, $m \geq 3$.

$$\exp((A - \lambda id)t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A - \lambda id)^n t^n}{n!} = id + (A - \lambda id)t + \frac{(A - \lambda id)^2 t^2}{2}$$

$$\exp(A - \lambda id) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3t & 0 & t \\ -3t & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3t^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\exp((A-\lambda\,\mathrm{id})t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3t-3t^2/2 & 1 & t \\ -3t & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\exp(At) = \exp(\lambda\,\mathrm{id}\,t)\,\exp((A-\lambda\,\mathrm{id})t)$

$$\exp(At) = e^{-4t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3t-3t^2/2 & 1 & t \\ -3t & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 \\ e^{-4t}(3t-3t^2/2) & e^{-4t} & te^{-4t} \\ -e^{-4t}\,3t & 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}$$

Aufgabe 5.2 $\quad p(s) = s^3 + ks^2 + (1+k)s + 6$

1. Bedingung: Alle Koeffizienten c_0, c_1, c_2 und c_3 mit dasselben Vorzeichen.

$c_0 = 6,\quad c_1 = (1+k),\quad c_2 = k,\quad c_3 = 1 \quad \therefore$

$c_1 > 0: \quad c_1 = 1+k > 0 \iff k > -1$

$c_2 > 0: \quad c_2 = k > 0$ stärker als $\quad \boxed{k > 0}$

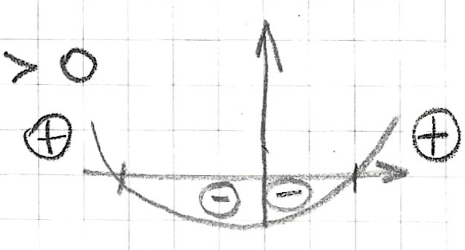
2. Bedingung: Hauptabschnittsdeterminante von $H > 0$

$$H = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 & c_5 \\ c_0 & c_2 & c_4 \\ 0 & c_1 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{array}{ccc} D_1 & D_2 & D_3 \\ \hline \end{array} \begin{bmatrix} (1+k) & 1 & 0 \\ 6 & k & 0 \\ 0 & (1+k) & 1 \end{bmatrix}$$

$D_1 > 0: \quad D_1 = 1+k > 0, \quad k > -1 \quad$ ($k > 0$ ist stärker)

$D_2 > 0: \quad D_2 = k(1+k) - 6 = k^2 + k - 6 > 0$

$$k_0 = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow k_1 = -3, \quad k_2 = 2$$



$k^2 + k - 6 > 0$ wenn $k < -3$ oder $k > 2$

$k < -3$: nicht möglich (1. Bedingung: $k > 0$)

$k > 2$: stärker als $k > 0$

$D_3 > 0: \quad D_3 = (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot D_2 = D_2 \rightarrow k > 2$

- $p(s)$ ist Hurwitz für $k > 2$. //

Aufgabe 5.3 $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [1 \; 0 \; 0]$
$D = 0$

1) $a_2 = 0$. $\Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

Eigenwerte von A: $\det(A - \lambda\, id) = 0$

Ew: $\det\left(\begin{bmatrix} a_1-\lambda & 0 & 0 \\ 5 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -4-\lambda \end{bmatrix}\right) = (a_1-\lambda)(-1-\lambda)(-4-\lambda) = 0$

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -4$, $\lambda_3 = a_1$ $\Rightarrow$ asymptotische Stabilität

Bedingung: • Für alle λ von A gilt $Re(\lambda) < 0$ (6.5 Satz, (iii)).

$\lambda_1 < 0$ ✓, $\lambda_2 < 0$ ✓ und $\lambda_3 = a_1 < 0$.

ZS asymptotisch stabil für $a_1 < 0$.

2) $a_2 = 10$. $\Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_1 & 10 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

p(s): charakteristisches Polynom von A)

$p(s) = \det(s\,id - A)$

$\det(s\,id - A) = \det\left(\begin{bmatrix} s-a_1 & -10 & 0 \\ -5 & s+1 & -2 \\ 1 & 0 & s+4 \end{bmatrix}\right) =$

$= (s-a_1)(s+1)(s+4) + 20 - 50(s+4)$

$p(s) = (s-a_1)(s^2+5s+4) + 20 - 50s - 200$

$p(s) = s^3 + 5s^2 + 4s - a_1 s^2 - 5 \cdot a_1 \cdot s - 4a_1 + 20 - 50s - 200$

$p(s) = s^3 + s^2(5-a_1) + s(-46-5a_1) + (-4a_1 - 180)$

1. Bedingung: Alle Koeffizienten mit demselben VZ.

$c_0 = -4a_1 - 180$, $c_1 = -5a_1 - 46$, $c_2 = 5 - a_1$, $c_3 = 1$

$c_0 > 0: \quad -4a_1 - 180 > 0 \quad , \quad -4a_1 > 180 \iff a_1 < -45$

$c_1 > 0: \quad -5a_1 - 46 > 0 \quad , \quad -5a_1 > 46 \iff a_1 < -46/5$

$c_2 > 0: \quad 5 - a_1 > 0 \quad , \quad -a_1 > -5 \iff a_1 < 5$

* Stärkste Ungleichung: $a_1 < -45$ //
  (wenn $a_1 < -45$, dann sind $a_1 < 5$ und $a_1 < -46/5$ auch wahr)

2. Bedingung: Hauptabschnittsdeterminante von $H > 0$

$$H = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 & c_5 \\ c_0 & c_2 & c_6 \\ 0 & c_1 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{array}{ccc} D_1 & D_2 & D_3 \\ \end{array} \begin{bmatrix} -5a_1-46 & 1 & 0 \\ -180-4a_1 & 5-a_1 & 0 \\ 0 & (-5a_1-46) & 1 \end{bmatrix}$$

$D_1 > 0: \quad D_1 = -5a_1 - 46 \quad , \quad a_1 < -46/5 \quad (a < -45 \text{ stärker})$

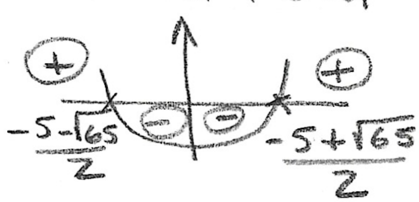
$D_2 > 0: \quad (-5a_1-46)(5-a_1) - (-180-4a_1) = D_2$

$$-25a_1 + 5a_1^2 - 46\cdot 5 + 46\cdot a_1 + 180 + 4a_1 = D_2$$

$$D_2 = 5a_1^2 + 25a_1 - 50 > 0$$

Wurzeln: $5a_1^2 + 25a_1 - 50 = 0 \implies a_1^2 + 5a_1 - 10 = 0$

$$a_{1_0} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+40}}{2} \longrightarrow$$



$D_2 > 0$ für $a_1 < \frac{-5-\sqrt{65}}{2}$ oder

$a_1 > \frac{-5+\sqrt{65}}{2}$ (nicht möglich, 1 Bedingung)

$a_1 < \frac{-5-\sqrt{65}}{2} \quad (a_1 < -45 \text{ stärker})$

* $p(s)$ ist Hurwitz für $a_1 < -45$. Das bedeutet, dass das ZS für $a_1 < -45$ asympt. stabil ist.

3) $a_1 = -2, \quad a_2 = 0, \quad u(t) = 3 - t^{-2} - e^{-3t}$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \varphi(\infty, x_0, u) = -A^{-1} B\, u(\infty)$$

- $u(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} (3 - t^{-2} - e^{-3t}) = \lim\limits_{t\to\infty} 3 - \cancel{\lim\limits_{t\to\infty} t^{-2}}^{\,0} - \cancel{\lim\limits_{t\to\infty} e^{-3t}}^{\,0} = 3$

- $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \dfrac{-1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 18 & 8 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \varphi(\infty, x_0, u) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 18 & 8 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 3$$

$$\varphi(\infty, x_0, u) = \frac{3}{8} \begin{bmatrix} -4 \\ -30 \\ 3 \end{bmatrix} \quad //$$