Victor Cheidde Chaim

⇒ Probeklausuraufgaben

6. Aufgabenblatt

6.4) $H(s) = \dfrac{(2s+1)(3s+2)}{(4s+3)(s-4)}$ Ja, weil $H(s)$ proper ist. 0,5 Punkt

$D = b_n \rightarrow H(s) = \dfrac{6s^2+\dots}{4s^2+\dots} = \dfrac{6/4 \cdot s^2+\dots}{s^2+\dots}$ $\therefore D = 6/4 = 3/2$ 0,5 Punkt

6.5) $u(t) = e^{\alpha t}\sin(e^{2t})$, $\sin(e^{2t})$ schon beschränkt, $\|\sin(x)\| \leq 1$

Bedingung: $e^{\alpha t}$ beschränkt → genau dann, wenn $\alpha \leq 0$. 1 Punkt

6.6) Für alle Pole p der Übertragungsfunktion gilt $Re(p) < 0$. 1 Punkt

6.7) Für keine Werte, da A unabhängig von den Parameterwerten den Eigenwert 1 hat. 1 Punkt

EW: $\det(A - \lambda\, id) = \det\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \rightarrow \boxed{\lambda_1 = 1} \rightarrow Re(\lambda_1) > 0$, nicht asympt. stabil; $\lambda_2 = -1$

6.8) $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $C = [\gamma \ \ 1]$, $D = \alpha$

ZS ist nicht asympt. stabil: EW: 1, -1.

BIBO-stabil: $Re(p) < 0$, p = Pole von $H(s) = C(s\,id - A)^{-1}B + D$

D spielt keine Rolle bei BIBO stabilität. Nehmen wir D=0 an.

$(s\,id - A) = \begin{bmatrix} s-1 & -\alpha \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \rightarrow (s\,id - A)^{-1} = \dfrac{1}{(s-1)(s+1)}\begin{bmatrix} s+1 & \alpha \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}$ 1 Punkt

1 Punkt

$H^*(s) = C(s\,id - A)^{-1}B = [\gamma \ \ 1]\begin{bmatrix} s+1 & \alpha \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\dfrac{1}{(s-1)(s+1)} = [\gamma \ \ 1]\begin{bmatrix} 2\alpha \\ 2(s-1) \end{bmatrix}\dfrac{1}{(s-1)(s+1)} = \dfrac{2((s-1)+\gamma\alpha)}{(s-1)(s+1)}$

BIBO-stabil → Zähler $= k(s-1)$, $k \in \mathbb{R}$ → $2((s-1)+\gamma\alpha) = k(s-1)$ (instabil Pol)

$\begin{cases} 2s = ks & \rightarrow k = 2 \\ -2 + 2\gamma\alpha = -k & \rightarrow 2\gamma\alpha = 0 \end{cases}$ → BIBO-stabil genau dann, wenn $\gamma\alpha = 0$. 2 Punkte

Überprüfung: $\gamma\alpha = 0 \rightarrow H^*(s) = \dfrac{2\cancel{(s-1)}}{\cancel{(s-1)}(s+1)} = \dfrac{2}{(s+1)}$, $p = -1 < 0$ BIBO-stabil

6.9) $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $C = [1 \ \ 0]$, $D = 0$

i) $H(s) = C(s\,id - A)^{-1}B + D = [1 \ \ 0](s\,id - A)^{-1}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0$

$(s\,id - A) = \begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \rightarrow (s\,id - A)^{-1} = \dfrac{1}{(s+3)(s+1)}\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}$ 1 Punkt

$H(s) = [1 \ \ 0]\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\dfrac{1}{(s+3)(s+1)} = [s+1 \ \ 0]\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\dfrac{1}{(s+3)(s+1)} = \dfrac{\cancel{(s+1)}}{(s+3)\cancel{(s+1)}} = \dfrac{1}{s+3}$

ii) Ja, da $\sigma(\infty) = 1$ und ZS BIBO-stabil.

$$g(t) = \sigma(t)\, C\, e^{At} B = \sigma(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \sigma(t)\, e^{-3t}$$ 1 Punkt

$$\psi(\infty, 0, \sigma) = \lim_{t\to\infty} (g * \sigma)(t) = \lim_{t\to\infty} \sigma(t) \int_0^t e^{-3\tau}\, d\tau = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{e^{-3\tau}}{-3} \right)\Bigg|_0^t = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{3} - \frac{e^{-3t}}{3} = \frac{1}{3} \quad //$$

$$\left(\text{oder einfacher: } \psi(\infty, 0, \sigma) = H(0) \cdot \sigma(\infty) = \left(\frac{1}{0+3}\right) \cdot 1 = \frac{1}{3} \right)$$

iii) $u(t) = \sin(3t)$, $\tilde{u} = e^{3it}$ $\left(u(t) = \operatorname{Im}(e^{3it}) \right)$

1 Punkt

Bedingung (Satz 7.2): $EW(A) \neq \lambda$, wobei $u(t) = e^{\lambda t} u_0$: $EW(A) = -3, -1 \neq 3i \; (= \lambda)$ ✓ erfüllt

$y(t) = \operatorname{Im}(\tilde{y}(t))$ (Satz 7.3), $\tilde{y}(t) = H(\lambda) \cdot \tilde{u}(t) = H(3i)\, e^{3it}$

$e^{xi} = \cos x + i \sin x$

$\left(e^{\frac{\pi}{2} i} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i \right)$

$$H(3i) = \frac{1}{3i+3} = \frac{3i-3}{(3i+3)(3i-3)} = \frac{3i-3}{9i^2-9} = -\frac{3}{18}(i-1) = -\frac{1}{6}(i-1) = -\frac{1}{6}\left(e^{\frac{\pi}{2} i} - 1\right)$$

1 Punkt

$$\tilde{y}(t) = -\frac{1}{6}\left(e^{\frac{\pi}{2} i} - 1\right) e^{3it} = -\frac{1}{6}\left(e^{(\frac{\pi}{2} + 3t) i} - e^{3it} \right)$$

$\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta)$

$$y(t) = \operatorname{Im}(\tilde{y}(t)) = -\frac{1}{6}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + 3t\right) - \sin(3t) \right) = \frac{1}{6}\left(\sin(3t) - \cos(3t) \right)$$ 1 Punkt

---