Victor Cheidde Chaim

⇒ Probeklausuraufgaben

5. Aufgabenblatt

5.4) Alle Zustandssignale des Zustandssystem haben dasselbe Stabilitätsverhalten. (6.2 Satz, Seite 503, Vorlesung 5) 1 Punkt

5.5) $\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = 0$, $\Phi(t)$: Hauptfundamentalmatrix von Zustandssystem zur Anfangszeit 0. 1 Punkt

(6.4 Satz (ii), Seite 505 Vorlesung 5)

5.6) Das Polynom $p(s)$ ist Hurwitz, wenn c_1 und c_2 größer als 0 sind, da $c_0 = 1$ positiv ist. Das ist eine hinreichende Bedingung, weil $p(s)$ von 2. Ordnung $(n=2)$ ist. 1 Punkt

5.7) $p(s) = s^4 + 2s^3 + s^2 + s + (k-1)$

1. Bedingung: $(k-1) > 0$, da $c_4, c_3, c_2, c_1 > 0$. (Alle Koeffizienten mit demselben Vorzeichen.)

$k-1 > 0 \iff \boxed{k > 1}$ 1 Punkt

2. Bedingung: Hauptabschnittsdeterminante von $H > 0$.

$c_0 = (k-1)$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$, $c_4 = 1$,

$$H = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 & c_5 & c_7 \\ c_0 & c_2 & c_4 & c_6 \\ 0 & c_1 & c_3 & c_5 \\ 0 & c_0 & c_2 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{array}{cccc} D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ k-1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1 Punkt

- $D_1 = 1 > 0$ ok ✓ 1 Punkt
- $D_2 = 1 - 2(k-1) = 1 - 2k + 2 = 3 - 2k > 0 \iff k < 3/2$ ✓
- $D_3 = 1.1.2 - 1.1.1 - 2.2.(k-1) = 2 - 1 - 4k + 4 = 5 - 4k > 0 \iff \boxed{k < 5/4}$ ✓ stärker
- $D_4 = 1.(-1)^{4+4}.D_3 = D_3$ ✓ 1 Punkt

$p(s)$ ist Hurwitz, wenn $\underbrace{1 < k}_{\text{1. Bedingung}}$, $\underbrace{k < 5/4}_{\text{2. Bedingung}}$. 1 Punkt

5.8) $u(t) = e^{\alpha t}.\sin(e^{2t})$: $\|u(t)\| = \|e^{\alpha t}\sin(e^{2t})\| \leq \|e^{\alpha t}\|.1$, weil $\|\sin(.)\| \leq 1$.

wenn $\alpha < 0$: $|\lim_{t\to\infty} e^{\alpha t}.\sin(e^{2t})| \leq |\lim_{t\to\infty} e^{\alpha t}| = 0$, $\boxed{u(\infty) = 0, \text{ wenn } \alpha < 0}$

1 Punkt

5.9) $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$, $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [1 \ 1 \ 0]$, $D = 0$

1 Punkt

i) Eigenwerte von A: $(\det(A - \lambda id) = 0)$ $\det \begin{pmatrix} -4-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & 1 \\ -3 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-4-\lambda)(-2-\lambda)(-1-\lambda) = 0$

$\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -1$ $\rightarrow$ Das Zustandssystem ist asymptotisch stabil, da für alle Eigenwerte λ von A $Re(\lambda) < 0$ gilt. (6.4 Satz (iii), Seite Vorlesung 505)

ii) Stationäre Endwerte: $\varphi(\infty, x_0, u) = -A^{-1} \cdot B \cdot u(\infty)$

1 Punkt

$u(\infty)$: $u(t) = 1 - \frac{1}{1+t^2}$, $u(\infty) = \lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{t\to\infty} 1 - \frac{1}{1+t^2} = \lim_{t\to\infty} 1 - \underbrace{\lim_{t\to\infty} \frac{1}{1+t^2}}_{0} = 1$ //

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}$, $C_{11}, C_{12}, \dots$ Kofaktoren: $C_{11} = 2$, $C_{12} = 0$, $C_{13} = -6$
$C_{21} = 0$, $C_{22} = 4$, $C_{23} = 0$
$C_{31} = 0$, $C_{32} = 4$, $C_{33} = 8$

$\det(A) = (-4)(-2)(-1) = -8$ $\therefore$ $A^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ -6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ 2 Punkte

$\varphi(\infty, x_0, u) = -A^{-1} B u(\infty) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ -6 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ // 2 Punkte