2. Repetitorium zur Teilklausur „Steuer- und Regelungstechnik“

Laplace-Transformation, Stabilität, Polkompensation

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Aufgabe 1: Laplace-Transformation

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 8 \cdot \dot{y}(t) + 25 \cdot y(t) = 5 \cdot \dot{u}(t) + 25 \cdot u(t)$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$y(t = 0) = y_0 = 5; \ \dot{y}(t = 0) = \dot{y}_0 = -20 \text{ und } u(t = 0) = u_0 = 0.$$

Aufgabe 1: Laplace-Transformation

Aufgabe: 1. Überführen Sie die Differentialgleichung in den Laplace-Bereich und geben Sie die vollständige Laplace-Transformierte für das Signal Y(s) an.

$$\ddot{y}(t) + 8\dot{y}(t) + 25y(t) = 5\dot{u}(t) + 25u(t)$$

$$\underbrace{\left(s^2 Y(s) - s y_0 - \dot{y}_0\right)}_{\ddot{y}(t)} + 8\underbrace{\left(s Y(s) - y_0\right)}_{\dot{y}(t)} + 25 Y(s)$$

$$= 5\underbrace{\left(sU(s) - u_0\right)}_{\dot{u}(t)} + 25U(s)$$

Aufgabe 1: Laplace-Transformation

Aufgabe: 1. Überführen Sie die Differentialgleichung in den Laplace-Bereich und geben Sie die vollständige Laplace-Transformierte für das Signal Y(*s*) an.

$$s^2 Y(s) - s y_0 - \dot{y}_0 + 8 s Y(s) - 8 y_0 + 25 Y(s) = 5 s U(s) - 5 u_0 + 25 U(s)$$

$$Y(s)\left(s^2 + 8 s + 25\right) = U(s)\left(5 s + 25\right) - 5 u_0 + s y_0 + \dot{y}_0 + 8 y_0$$

$$Y(s) = \frac{5s + 25}{s^2 + 8s + 25} U(s) + \frac{y_0 s + \dot{y}_0 + 8 y_0 - 5 u_0}{s^2 + 8s + 25}$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{5s + 25}{s^2 + 8s + 25}}_{\text{partikulären Lsg.}} U(s) + \underbrace{\frac{5s + 20}{s^2 + 8s + 25}}_{\text{homogene Lsg.}}$$

vollst. Laplace-Tr. von y

$\rightarrow$ Übertragungsfkt. $G(s)$

Aufgabe 1: Laplace-Transformation

Aufgabe: 2. Berechnen Sie die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Bestimmen Sie die Bewegungen des Systems, allein aufgrund der Anfangsbedingungen im Zeitbereich.

$$C(s) = s^2 + 8s + 25$$

$$s = -\frac{8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - 25}$$

$$= -4 \pm \sqrt{16 - 25}$$

$$= -4 \pm \sqrt{-9}$$

$$s = -4 \pm j \cdot 3$$

↳ schwingungsfähig

Aufgabe 1: Laplace-Transformation

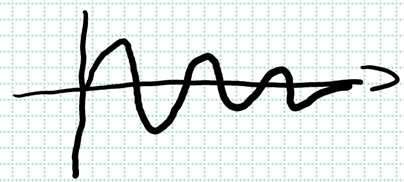
Aufgabe: 2. Berechnen Sie die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Bestimmen Sie die Bewegungen des Systems, allein aufgrund der Anfangsbedingungen im Zeitbereich.

$$Y_A(s) = \frac{5s+20}{s^2+8s+25} = \frac{5s+20}{(s+4)^2+3^2}$$

$$\frac{s+\delta}{(s+\delta)^2+\omega_e^2}$$ Nr. 31

↳ $e^{-\delta t}\cdot\cos(\omega_e t)$

$$= 5\cdot\frac{s+4}{(s+4)^2+3^2}$$



$$\boxed{y_A(t) = 5\cdot e^{-4t}\cdot\cos(3t)}$$

Aufgabe 1: Laplace-Transformation

Aufgabe: 3. Geben Sie die Streckenübertragungsfunktion $G_S(s) = Y(s)/U(s)$ an.

$$G_s(s) = \frac{5s+25}{s^2+8s+25}$$

Aufgabe 1: Laplace-Transformation

Aufgabe: 4. Geben Sie den Dämpfungsgrad D und die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems ω_0 an.

$$G_S(s) = \frac{5s+25}{s^2 + \underbrace{8s}_{2D\omega_0} + \underbrace{25}_{\omega_0^2}}$$

$$G(s) = s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2$$

$$\omega_0 = \sqrt{25} = \underline{\underline{5}}$$

$$2D\omega_0 = 8 \Leftrightarrow D = \frac{8}{2\omega_0} = \frac{4}{\omega_0}$$

$$D = \frac{4}{5} = \underline{\underline{0{,}8}}$$

Aufgabe 1: Laplace-Transformation

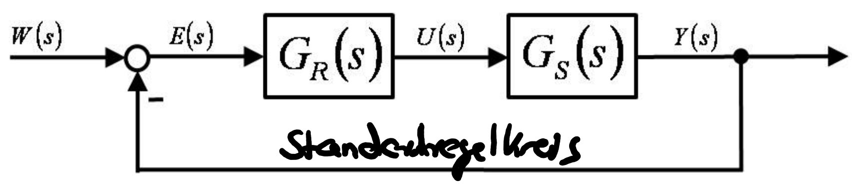
Das System wird mit einem PID-Regler und negativer Rückführung geschlossen.

PID-Regler: $G_R(s) = K_R \cdot \left(1 + \frac{1}{T_I \cdot s} + T_D \cdot s\right)$

mit $K_R = \frac{8}{5}$, $T_D = \frac{1}{8}$, $T_I = \frac{8}{25}$

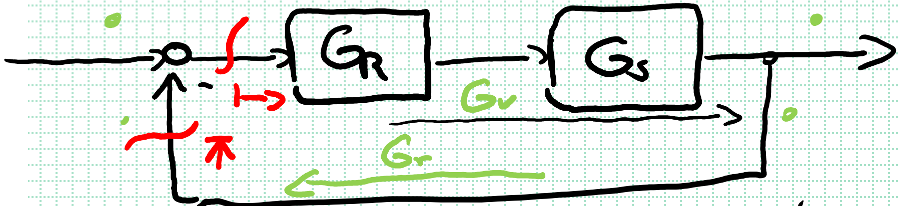
Regelstrecke $\widehat{=}$ System

$$G_S(s) = \frac{5s+25}{s^2+8s+25}$$



Aufgabe 1: Laplace-Transformation

Aufgabe: 5. Geben Sie die Übertragungsfunktion des offenen Systems $G_0(s) = G_R(s) \cdot G_S(s)$ und des geschlossenen Regelkreises $G_w(s) = Y(s)/W(s)$ an.



$$G_R(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right)$$

$$= K_R \frac{T_D T_I s^2 + T_I s + 1}{T_I s}$$

$$= \frac{s^2 + 8s + 25}{5s}$$

$$G_0(s) = G_R(s) \cdot G_S(s)$$

$$= \frac{\cancel{s^2 + 8s + 25}}{5s} \cdot \frac{5s + 25}{\cancel{s^2 + 8s + 25}}$$

$$\boxed{G_0(s) = \frac{5s + 25}{5s}}$$

Aufgabe 1: Laplace-Transformation

Aufgabe: 5. Geben Sie die Übertragungsfunktion des offenen Systems $G_0(s) = G_R(s) \cdot G_S(s)$ und des geschlossenen Regelkreises $G_w(s) = Y(s)/W(s)$ an.

$$G_w = \frac{G_v}{1 + \underbrace{G_v G_r}_{G_0}}$$

$\underline{\underline{G_r = 1}}$ (Standardregelkreis)

$$G_v = G_0 \rightarrow \boxed{G_w = \frac{G_0}{1 + G_0}}$$

Einheitsrückführ.

$$1 + G_0 = 1 + \frac{5s+25}{5s} = \frac{10s+25}{5s}.$$

$$G_w = \frac{G_0}{1+G_0} = \frac{5s+25}{\cancel{5s}} \cdot \frac{\cancel{5s}}{10s+25} = \frac{5s+25}{10s+25} = \underline{\underline{\frac{s+5}{2s+5}}}$$

Aufgabe 1: Laplace-Transformation

Aufgabe: 5. Ist der geschlossene Regelkreis $G_w(s)$ stabil?

$$G_w(s) = \underbrace{2}_{a_1}s + \underbrace{5}_{a_0}$$

$$2s+5=0$$

$$\Leftrightarrow \quad s+2{,}5=0$$

$$\boxed{s=-2{,}5}$$

$\rightarrow$ neg. Realteil

stabil

Aufgabe 2: Polkompensation

Gegeben ist das System

$$G(s) = \frac{4}{(s+2)(s+3)(s+5)}$$

Das System $G(s)$ soll im Folgenden mit einem PI-Regler

$$G_R(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)$$

geregelt werden.

Aufgabe 2: Polkompensation

Aufgabe: 1. Bestimmen Sie die Nachstellzeit T_I des Reglers so, dass die Polstelle $s = -2$ der Regelstrecke kompensiert wird.

$$G_R(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) = K_R\left(\frac{T_I s + 1}{T_I s}\right) = K_R\left(\frac{s + \frac{1}{T_I}}{s}\right)$$

$$T_I = 0{,}5$$

$$G_0(s) = \frac{4}{\cancel{(s+2)}(s+3)(s+5)} \cdot \frac{K_R \cancel{\left(s + \frac{1}{0{,}5}\right)}}{s} = \frac{4K_R}{s(s+3)(s+5)}$$

Aufgabe 2: Polkompensation

Aufgabe: 2. Bestimmen Sie den Bereich für K_R für den der geschlossene Regelkreis stabil ist

$$G(s) = \frac{G_0}{1 + G_0}$$

$$1 + G_0 = 1 + \frac{4K_R}{s(s+3)(s+5)} = \frac{s(s+3)(s+5) + 4K_R}{s(s+3)(s+5)}$$

$$G(s) = \frac{4K_R}{\cancel{s(s+3)(s+5)}} \cdot \frac{\cancel{s(s+3)(s+5)}}{s(s+3)(s+5) + 4K_R} = \frac{4K_R}{s(s+3)(s+5) + 4K_R}$$

$$= \frac{4K_R}{s^3 + 8s^2 + 15s + 4K_R}$$

Aufgabe 2: Polkompensation

Aufgabe: 2. Bestimmen Sie den Bereich für K_R für den der geschlossene Regelkreis stabil ist

Stabilität n. Hurwitz

Not. Bed.: $a_i > 0$ $\quad a_3 = 1 \quad a_2 = 8 \quad a_1 = 15 \quad a_0 = 4K_R$

$K_R \neq 0$ $\quad \boxed{K_R > 0}$

$\boxed{0 < K_R < 30}$

Hin. Bed.:

$H_1 = a_2 = 8 > 0$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 8 & 4K_R \\ 1 & 15 \end{vmatrix} = 8 \cdot 15 - 1 \cdot 4K_R = 120 - 4K_R > 0$$

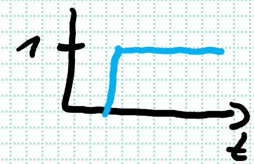
$\boxed{K_R < 30}$

Aufgabe 2: Polkompensation

Aufgabe: 3. Wie wirkt sich die Wahl der Reglerverstärkung K_R auf die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises aus?

$$H(s) = \underbrace{\frac{1}{s}}_{\text{Einheitssprung}} \cdot G(s)$$

$\mathbb{1}(t)$



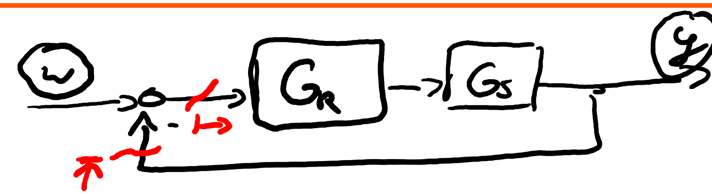
$$\frac{K_R}{1+K_R}$$

$$h_\infty = \lim_{t \to \infty} h(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot H(s) = \lim_{s \to 0} \frac{4K_R}{s^3 + 8s^2 + 15s + 4K_R} = \frac{4K_R}{4K_R} = \underbrace{1}_{\text{stationäre Genauigkeit}}$$

$\boxed{\text{Grenzwertsatz}}$

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{4K_R}{s^3 + 8s^2 + 15s + 4K_R}$$

Einschub stationäre Genauigkeit



$e = w - y = 0$

Definition:
Stationäre Genauigkeit eines Regelkreises ist gegeben, wenn die **Regelabweichung** nach der Vorgabe eines Sprungsignals als Sollwert (bzgl. Führungsverhalten) oder nach Einwirken einer sprungförmigen Störung (bzgl. Störverhalten) **für $t \rightarrow \infty$ zu Null** wird.

Voraussetzung: Stabilität des geschlossenen Kreises

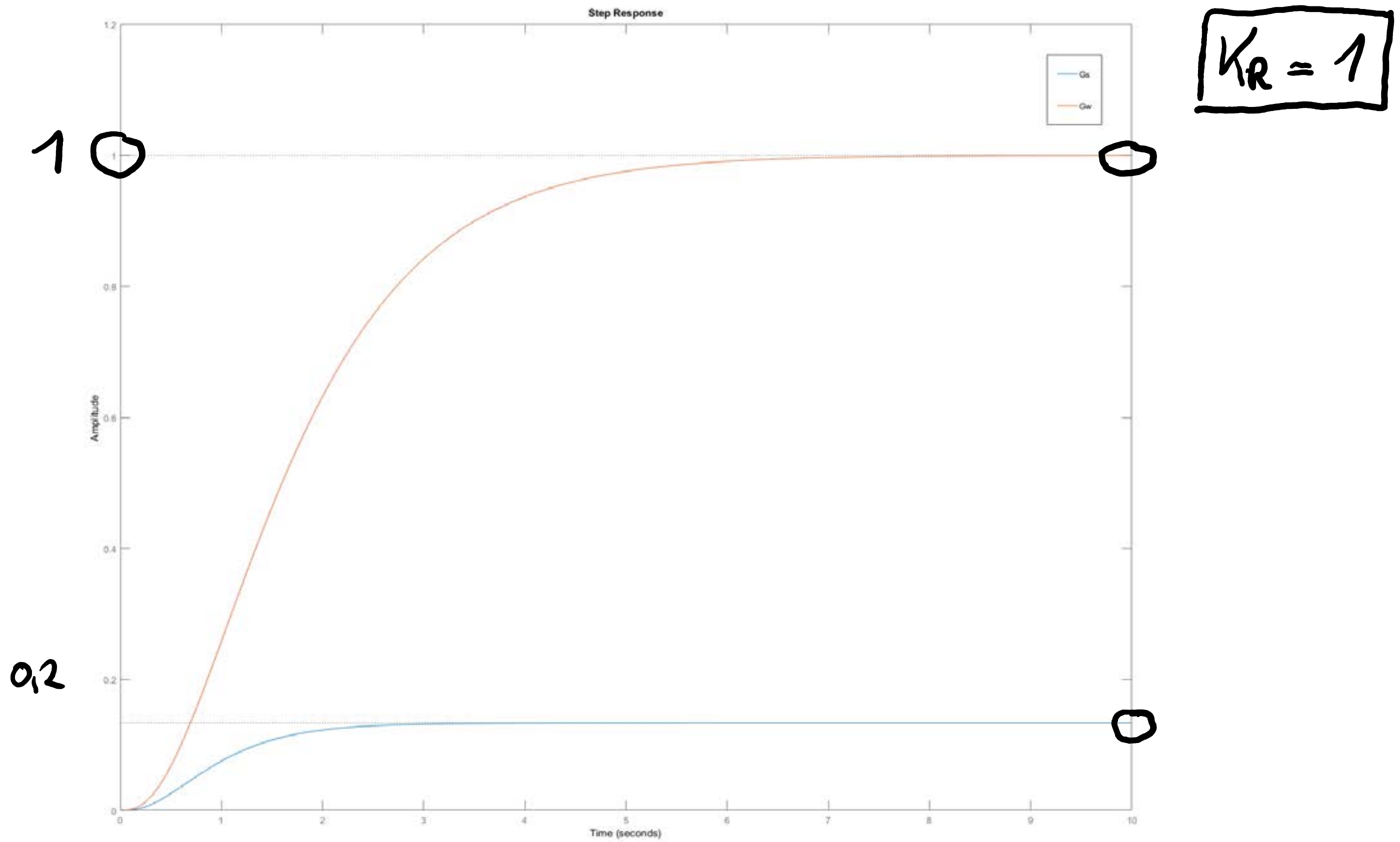
Stationäre Genauigkeit bzgl. Führungsverhalten:

- Freies I-Glied liegt im offenen Kreis (nur bei stationär genauer Messung)
- Mit einem freien I-Glied ist ein I-Glied gemeint, das **im offenen Kreis einen Pol im Ursprung** bewirkt.
- Frei sind deshalb alle I-Glieder, die nicht in eine unterlagerte Rückführung eingebunden sind
- I-Glieder innerhalb von PT1- oder PT2-Gliedern, etc. sind somit nicht frei.

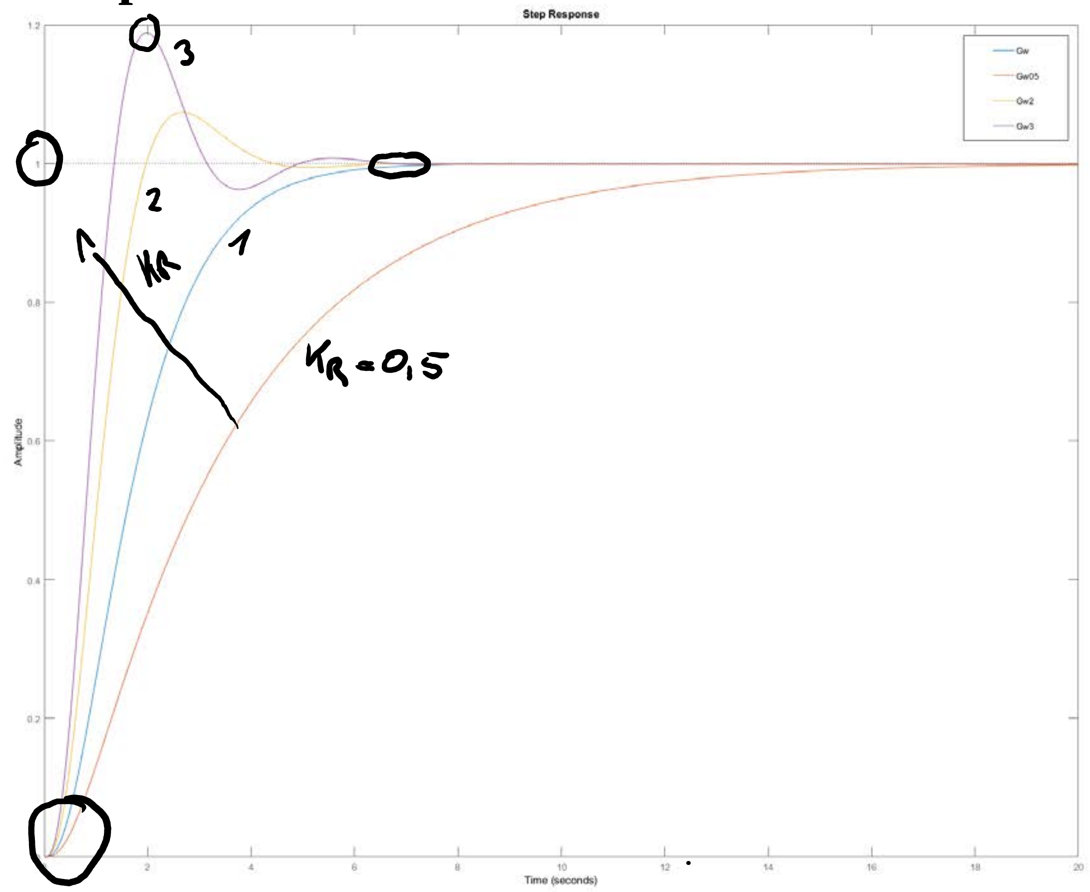
Im Falle stationärer Genauigkeit gilt:

- Offener Kreis hat Pol im Ursprung
- (Führungs-)Übertragungsfunktion hat stationäre Verstärkung 1

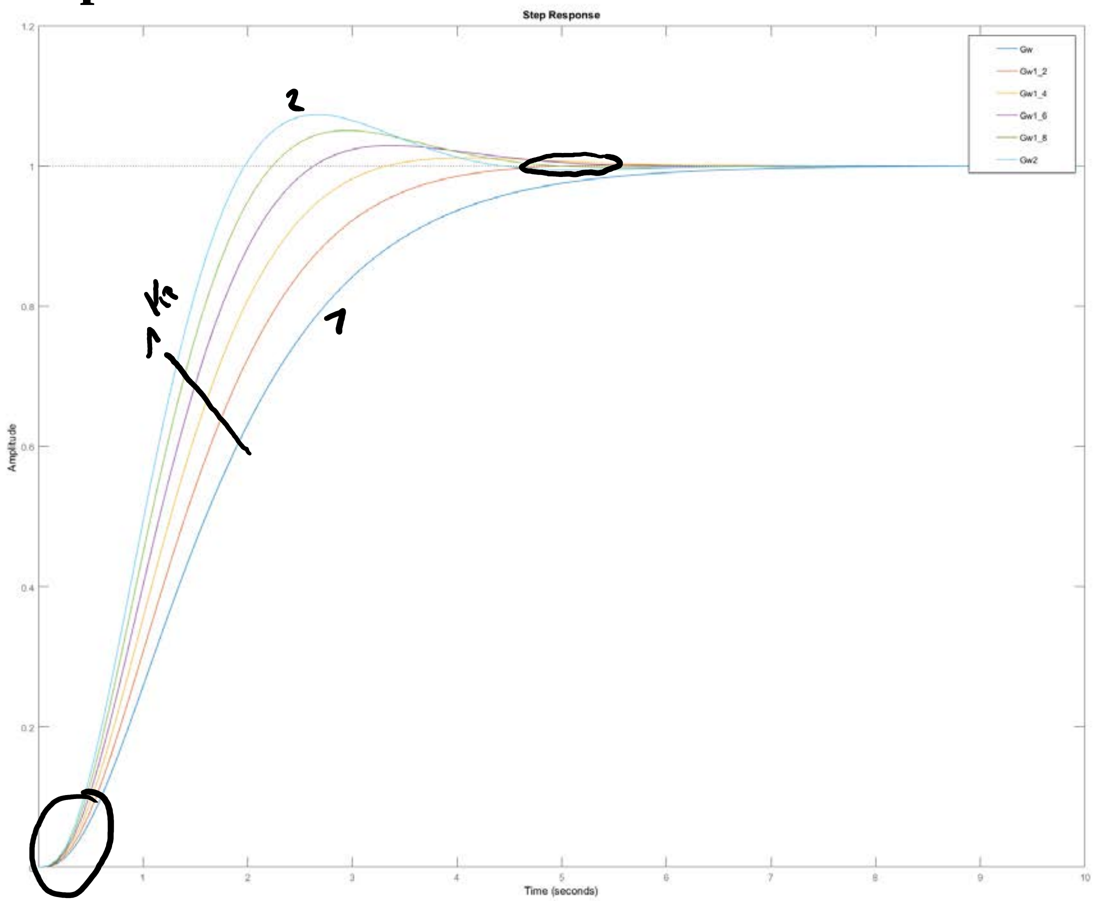
Aufgabe 2: Polkompensation



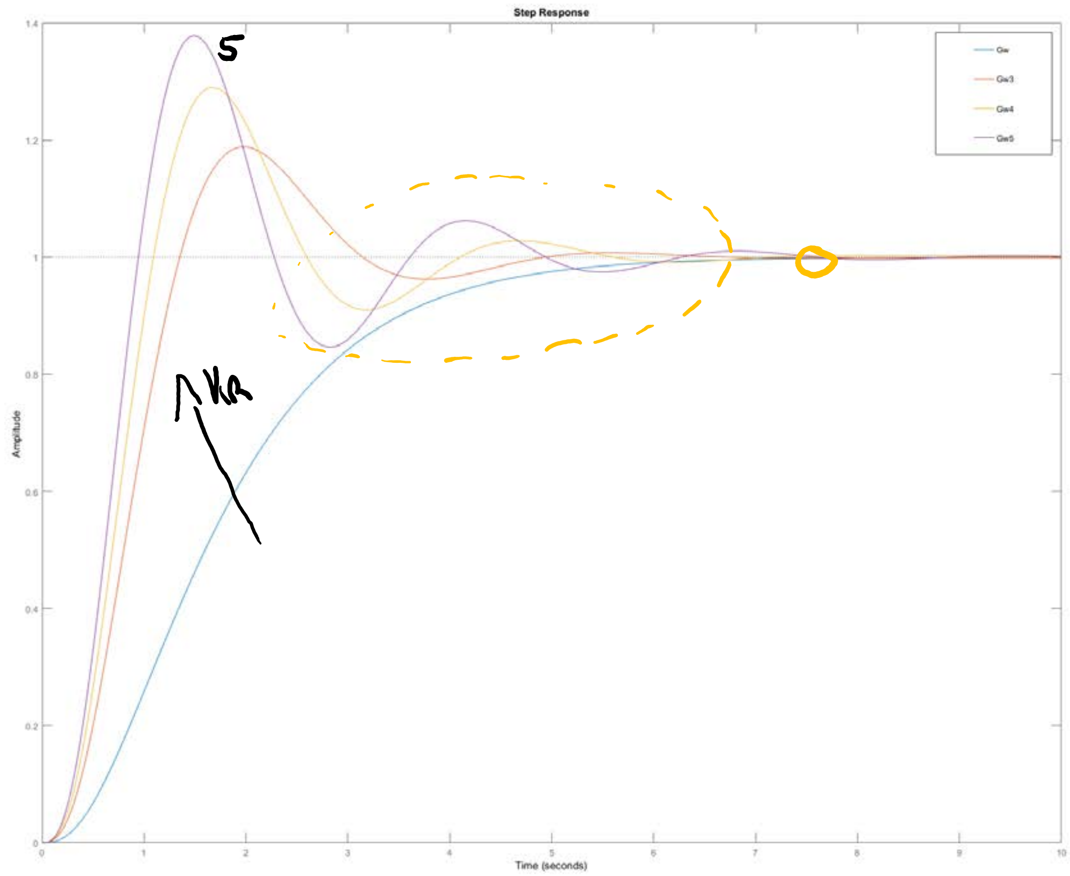
Aufgabe 2: Polkompensation



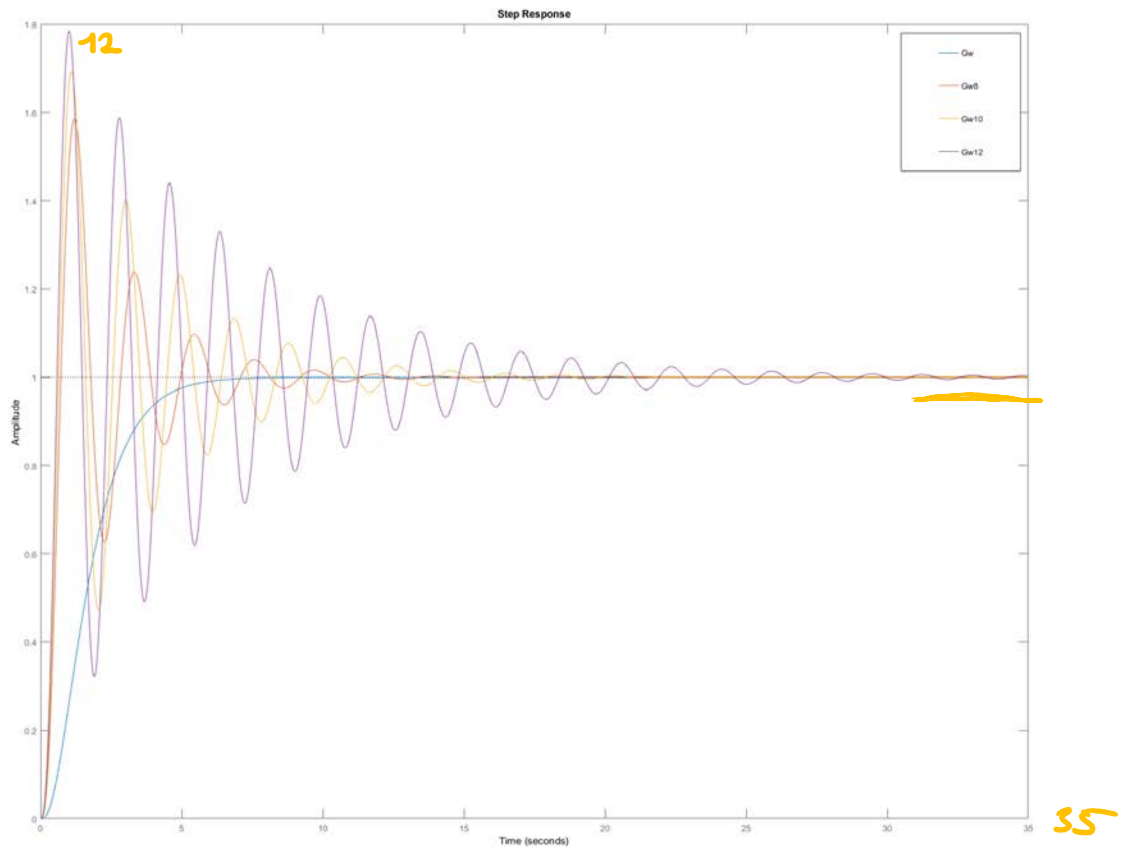
Aufgabe 2: Polkompensation



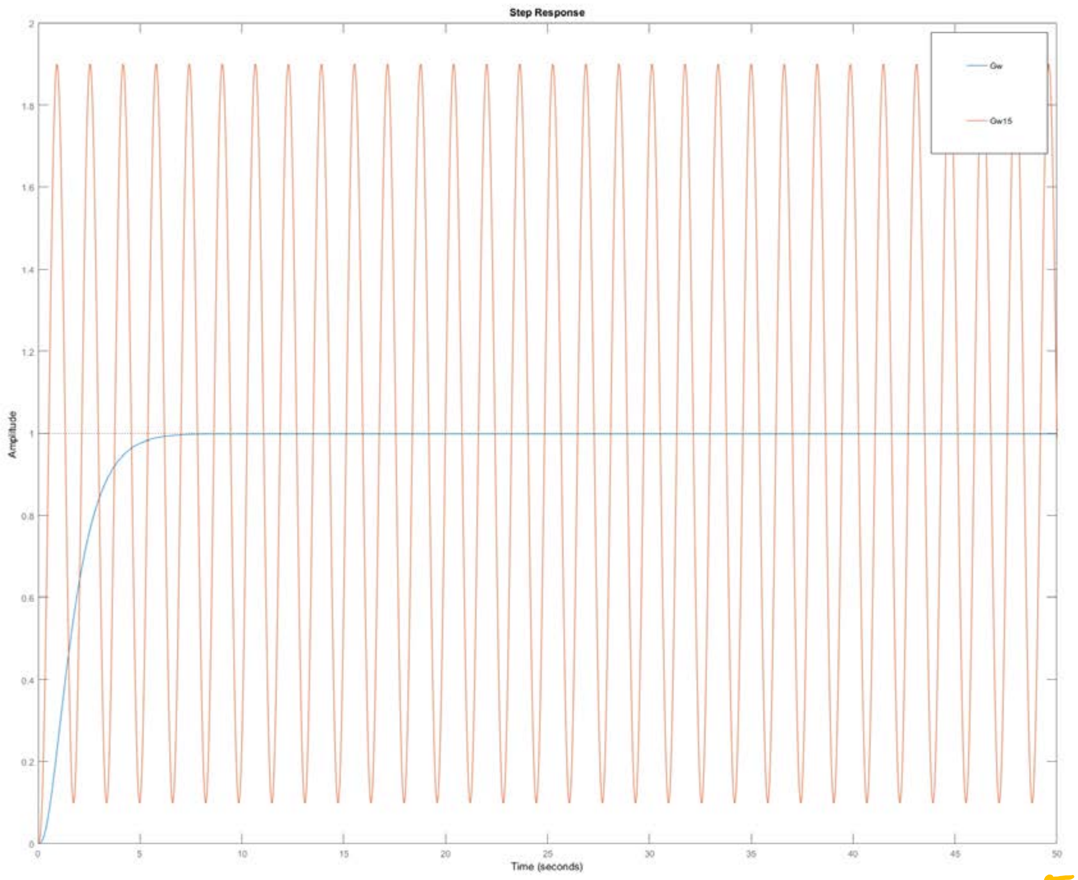
Aufgabe 2: Polkompensation



Aufgabe 2: Polkompensation



Aufgabe 2: Polkompensation



50