1. Repetitorium zur Teilklausur „Steuer- und Regelungstechnik“

Modellbildung, Linearisierung

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

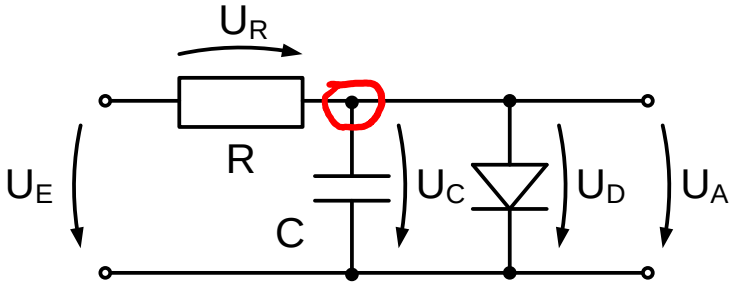
Aufgabe 1: Modellbildung/Linearisierung (10P)

- beide linear

$i_C(t) = C \cdot \frac{d}{dt} U_C$

$u_R = R \cdot i_R$

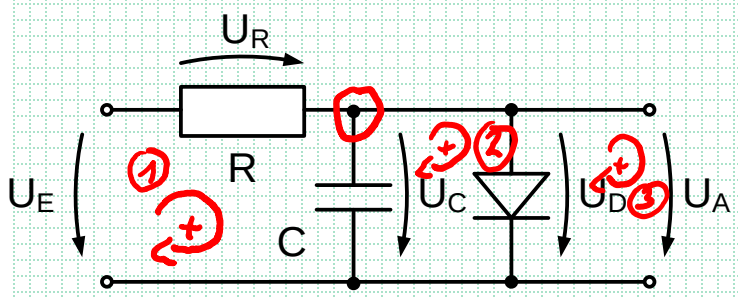
Gegen ist das folgende nichtlineare elektrische System,



mit dem Widerstand R, dem Kondensator C und einer Diode, welche durch die nichtlineare Strom-Spannungs-Beziehung $i_D(U_D) = I_S \cdot (e^{k \cdot U_D} - 1)$ beschrieben wird.

Aufgabe 1: Modellbildung/Linearisierung (10P)

Aufgabe: 1. Stellen Sie die Maschen- und Knotensätze des elektrischen Systems auf.



① $-u_E + u_R + u_C = 0$

② $-u_C + u_D = 0$

③ $-u_D + u_A = 0$

$\rightarrow u_C - u_D = u_A$

Knotensatz: $i_R = i_C + i_D$

Aufgabe 1: Modellbildung/Linearisierung (10P)

Aufgabe: 2. Geben Sie die nichtlineare Differentialgleichung zur Be-schreibung des Ein-Ausgangsverhaltens des Systems an und verwenden Sie dabei die Bezeichnung $y(t) = U_A(t)$ für den Systemausgang und $u(t) = U_E(t)$ für den Systemeingang.

$$U_E = \underbrace{U_R}_{i_R \cdot R} + U_C = \underbrace{i_R}_{} \cdot R + U_C = (i_C + i_D) R + U_C$$

$$U_C = U_D = U_A$$

$$U_E = R\left[\underbrace{C \cdot \frac{d}{dt} U_C}_{i_C} + \underbrace{I_S\left(e^{kU_D} - 1\right)}_{i_D}\right] + U_C$$

$$U_E = RC \frac{d}{dt} U_A + R I_S e^{kU_A} - R I_S + U_A$$

$$\boxed{u = R \cdot C \cdot \dot{y} + R I_S e^{ky} + y - R I_S}$$ konst.

Aufgabe 1: Modellbildung/Linearisierung (10P)

Aufgabe: 3. Linearisieren Sie die nichtlineare Differentialgleichung in dem Arbeitspunkt (u_0, y_0) und geben sie die linearisierte Differentialgleichung an.

$$0 = f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots)$$

$$0 = y - RI_s + RI_s e^{ky} + RC\dot{y} - u = f(y, \dot{y}, u)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= 1 + RI_s k e^{ky} \\ \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} &= RC \\ \frac{\partial f}{\partial u} &= -1 \end{aligned}}$$

$$f(\underbrace{x_0 + \Delta x}, \underbrace{\dot{x}_0 + \Delta \dot{x}}, \dots)$$

Aufgabe 1: Modellbildung/Linearisierung (10P)

Aufgabe: 3. Linearisieren Sie die nichtlineare Differentialgleichung in dem Arbeitspunkt (Ruhelage) (u_0, y_0) und geben sie die linearisierte Differentialgleichung an.

$$0 = \underbrace{f(\dot{y}_0, y_0, u_0)}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\Big|_{\dot{y}_0, y_0, u_0} \Delta\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{\dot{y}_0, y_0, u_0} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{\dot{y}_0, y_0, u_0} \Delta u$$

$$0 = RC\,\Delta\dot{y} + \left(1 + R I_s k e^{k y_0}\right)\Delta y - 1\,\Delta u$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta u = RC\,\Delta\dot{y} + \left(1 + R I_s k e^{k y_0}\right)\Delta y}$$

Aufgabe 1: Modellbildung/Linearisierung (10P)

Aufgabe: 4. Transformieren Sie die linearisierte Differentialgleichung in den Laplace-Bereich und geben Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)}$ an.

Führen Sie die Konstanten $\tau = R \cdot C$ *und* $k_0 = R \cdot I_S \cdot k \cdot e^{k \cdot y_0}$ *ein und* $\Delta y(0) = 0$.

$$\Delta u = \tau \cdot \Delta \dot{y} + (1 + k_0)\, \Delta y$$

$$\Delta U(s) = \tau\, s \cdot \Delta Y(s) + (1 + k_0)\, \Delta Y(s)$$

$$\Leftrightarrow \Delta U(s) = \Delta Y(s)\,(\tau \cdot s + 1 + k_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{G(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)} = \frac{1}{\tau \cdot s + 1 + k_0}}$$

$$G(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)}$$

Aufgabe 1: Modellbildung/Linearisierung (10P)

Aufgabe: 5. Um was für eine Art von Übertragungsglied handelt es sich dabei? Geben Sie die Parameter des Übertragungsgliedes an.

$$G(s) = \underbrace{\left(\frac{1}{1+K_0}\right)}_{K} \cdot \frac{1}{\underbrace{\left(\frac{\tau}{1+K_0}\right)}_{T} s + 1} = \underbrace{K \cdot \frac{1}{Ts+1}}_{PT_1\text{-Verhalten}} \rightarrow 1$$

stat. Verstärkung $K = \frac{1}{1+K_0}$

Zeitkonstante $T = \frac{\tau}{1+K_0}$

1

Aufgabe 2: Modellbildung (10P)

Gegeben ist folgende nichtlineare Momentenbilanz eines „Inversen Pendels“:

$$m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta}(t) + d \cdot \dot{\theta}^2(t) + m \cdot l \cdot g \cdot cos\big(\theta(t)\big) = M_u(t)$$

mit der Masse m, der Pendellänge l, der Dämpfungskonstante d sowie der Erdbeschleunigung g.

Aufgabe 2: Modellbildung (10P)

Aufgabe: 1. Bestimmen Sie die Ruhelage für den Fall $M_u(t) = 0$ im Bereich von $\boxed{0 \text{ bis } \pi.}$

$$m l^2 \cancel{\ddot{\Theta}}^{\to 0} + d \cancel{\dot{\Theta}}^{2 \to 0} + mlg \cos(\Theta) = \underbrace{M_u}_{=0}$$

Ruhelage

$$\ddot{\Theta} = \dot{\Theta} = 0$$

$$\Rightarrow \quad mlg \cos(\Theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(\Theta) = 0 \quad \rightarrow \boxed{\Theta_0 = \frac{\pi}{2}} \text{ Ruhelage}$$

Aufgabe 2: Modellbildung (10P)

Aufgabe: 2. Linearisieren Sie die nichtlineare Differentialgleichung

$$0 = ml^2\ddot{\Theta} + d\dot{\Theta}^2 + mlg\cos\Theta - M_u = f(\ddot{\Theta}, \dot{\Theta}, \Theta, M_u)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \ddot{\Theta}} = ml^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{\Theta}} = 2d\dot{\Theta}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \Theta} = -mlg\sin(\Theta)$$

$$\frac{\partial f}{\partial M_u} = -1$$

$$0 = f(\ddot{\Theta}_0, \dot{\Theta}_0, \Theta_0, M_u) + ml^2\Delta\ddot{\Theta} + \underbrace{2d\dot{\Theta}_0}_{=0}\Delta\dot{\Theta} - mlg\sin(\Theta_0)\Delta\Theta - \Delta M_u$$

Aufgabe 2: Modellbildung (10P)

Aufgabe: 2. Linearisieren Sie die nichtlineare Differentialgleichung

$$\Delta M_u = ml^2 \Delta\ddot{\Theta} - mlg \sin(\underbrace{\Theta_0}_{=\frac{\pi}{2}}) \Delta\Theta$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta M_u = ml^2 \Delta\ddot{\Theta} - mlg \Delta\Theta}$$

Aufgabe 2: Modellbildung (10P)

Aufgabe: 4. Transformieren Sie die linearisierte Differentialgleichung in den Laplace-Bereich und geben die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{\Delta\theta(s)}{\Delta M_u(s)}$ an.

$$\Delta M_u = ml^2 \Delta\ddot{\Theta} - mlg\,\Delta\Theta$$

$$\Delta M_u(s) = ml^2\left(s^2\Delta\Theta - s\Theta_0 - \cancel{\dot{\Theta}_0}^{\,0}\right) - mlg\,\Delta\Theta(s)$$

$$\Delta M_u(s) = \underbrace{\boxed{s^2 ml^2 \Delta\Theta(s) - mlg\,\Delta\Theta(s)}}_{\text{partikulärer Lsg.}} \underbrace{- s\,ml^2\Theta_0}_{\text{homogener Lsg.}}$$

$$G(s) = \frac{\Delta\Theta(s)}{\Delta M_u(s)}$$

Übertragungsfkt:

$$\Delta M_u(s) = \Delta\Theta(s)\left[s^2 \cdot ml^2 - mlg\right] \Rightarrow \boxed{G(s) = \frac{1}{s^2 \cdot l^2 m - mlg}}$$

Aufgabe 2: Modellbildung (10P)

Aufgabe: 5. Ist das erhaltene System stabil (Begründung)?

$$G(s) = \frac{1}{+\underbrace{ml^2}_{a_2} \cdot s^2 - \underbrace{mlg}_{a_0}}$$

$-a_1$

$-$ Vorzeichenwechsel $\rightarrow$ not Bed. nicht erfüllt

$\rightarrow$ instabil

alternativ

$$ml^2 s^2 - mlg = 0$$

$$s = \pm\sqrt{\frac{g}{l}} \rightarrow$$ Polstelle mit pos. Vorzeichen $\rightarrow$ instabil