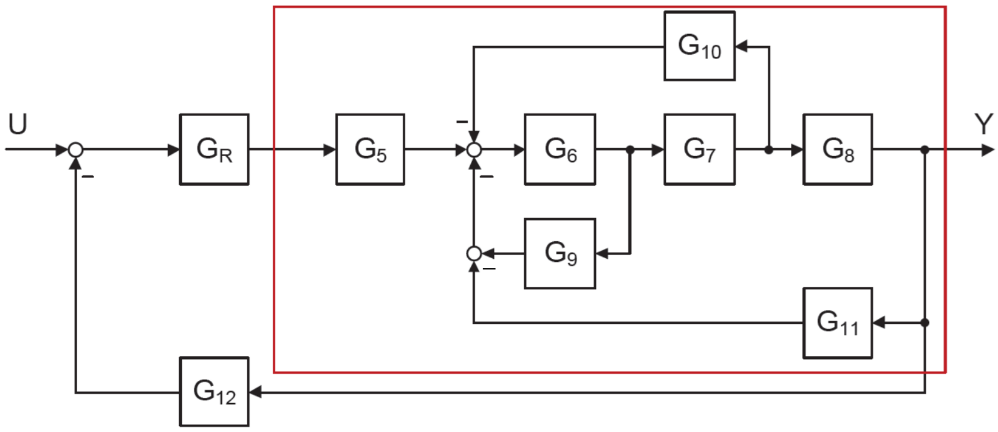
F. Goßmann M.Sc
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Steuer- und Regelungstechnik, WT 2020

Übung 9 - Lösung

Thema: Künstliche Stabilität, Reglerentwurf, Polkompensation

Aufgabe 1. Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols
Gegeben ist das folgende System in Blockschaltbild-Form



mit den allgemeinen Übertragungsfunktionen $G_5(s)$ - $G_{12}(s)$ sowie $G_R(s)$. Für die Übertragungsfunktionen gilt:

$$G_5 = K\,, G_6 = \frac{2}{s+1}\,, G_7 = G_8 = \frac{1}{s}\,, G_9 = 2\,, G_{10} = 3\,, G_{11} = G_{12} = \frac{1}{s+2}$$

Aufgaben

a) Fassen Sie das in dem roten Kasten dargestellte Übertragungssystem zu einer doppelbruchfreien Übertragungsfunktion $G_S(s)$ zusammen.

b) Prüfen Sie mit ob die Übertragungsfunktion $G_S(s)$ stabil ist.

Das System $G_0(s)$ wird nun mit einem Regler $G_R(s)$ geregelt. Zusätzlich ist zur Betrachtung des Sensorverhaltens die Übertragungsfunktion $G_{12}(s)$ in der Rückführung enthalten.

c) Stellen Sie die Gesamtübertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ in doppelbruchfreier Form in Abhängigkeit von $G_R(s)$ auf.

d) Ist das System mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ für ein $K > 0$ stabilisierbar? Falls ja, bestimmen sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums den Bereich für K_R in Abhängigkeit von K, für den der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil ist.

e) Das System $G(s)$ wird nun mit einem $K_R = 12$ geregelt und mit einem Einheitssprung $u(t) = 1(t)$ beaufschlagt. Es stellt sich ein stationärer Endwert von $y_\infty = 12$ ein. Bestimmen Sie K.

f) Der Regler $G_R(s)$ soll nun mit dem Verfahren nach Ziegler-Nichols ausgelegt werden. Hierbei sollen sowohl ein P-,PI- als auch ein PID-Regler betrachtet werden. Bei einem Schwingversuch wurde an der oberen Stabilitätsgrenze eine Periodendauer von $T_{krit} = 5s$ gemessen.

Lösung Aufgabe 1.

a) Zunächst wird der relevante Teil des Blockschaltbildes umgestellt, wie in Abbildung 1 dargestellt ist.

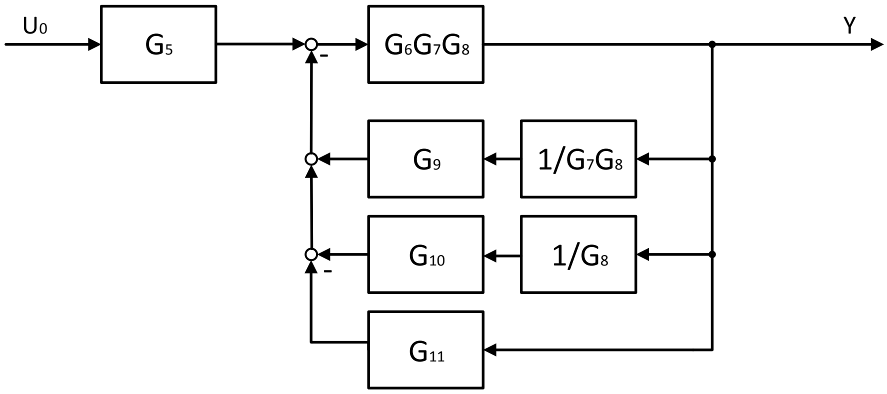


Abbildung 1: Umstellen den Blockschaltbildes

Nun lässt sich das System mit den in Übung 5. behandelten Regeln zusammenfassen. Die Übertragungsfunktion $G_6G_7G_8$ wird mit der oben dargestellten Parallelschaltung aus den drei Reihenschaltungen rückgekoppelt. Das dabei entstehende System liegt dann noch mit G_5 in Reihe geschaltet vor. Somit lässt sich die gesuchte Übertragungsfunktion sehr einfach aufstellen

$$G_S(s) = G_5 \cdot \frac{G_6G_7G_8}{1 + G_6G_7G_8\left(\frac{G_9}{G_7G_8} + \frac{G_{10}}{G_8} - G_{11}\right)}$$

$$G_S(s) = \frac{G_5G_6G_7G_8}{1 + G_6G_9 + G_6G_7G_{10} - G_6G_7G_8G_{11}}.$$

b) Durch Einsetzen der gegebenen Übertragungsfunktionen für $G_5 - G_{11}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
G_S(s) &= \frac{K \cdot \frac{2}{s+1} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s}}{1 + 2 \cdot \frac{2}{s+1} + 3 \cdot \frac{2}{s+1} \cdot \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} \cdot \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s}} \\
&= \frac{\frac{2K}{s^3+s^2}}{\frac{s^2(s+1)(s+2)+4s^2(s+2)+6s(s+2)-2}{s^2(s+1)(s+2)}} \\
&= \frac{2K}{s^2(s+1)} \cdot \frac{s^2(s+1)(s+2)}{s^4+7s^3+16s^2+12s-2} \\
&= \frac{2K(s+2)}{s^4+7s^3+16s^2+12s-2} \,.
\end{aligned}$$

Bei Betrachtung der Koeffizienten des Nennerpolynoms wird sofort klar, dass die notwendige Bedingung eines Hurwitz-Polynoms nicht erfüllt ist, da nicht alle Koeffizienten das gleiche Vorzeichen haben (a_0 ist negativ). Das System ist somit instabil.

c) Für die gesamte Übertragungsfunktion $G(s)$ gilt

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_v(s)}{1 + G_v(s) \cdot G_r(s)} \,, \tag{1}$$

wie es in Übung 5. definiert wurde. In diesem Fall ergibt sich

$$\begin{aligned}
G_v(s) &= G_S(s) \cdot G_R(s) \\
G_r(s) &= G_{12}(s)
\end{aligned}$$

Eingesetzt in (1) ergibt für den Nenner

$$\begin{aligned}
1 + G_v \cdot G_r &= 1 + G_R \cdot G_S \cdot G_{12} \\
&= 1 + \frac{2K \cdot G_R}{s^4+7s^3+16s^2+12s-2} \\
&= \frac{s^4+7s^3+16s^2+12s-2+2K \cdot G_R}{s^4+7s^3+16s^2+12s-2} \,.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die gesuchte Übertragungsfunktion zu

$$\begin{aligned}
G &= \frac{2K \cdot G_R(s+2)}{\cancel{s^4+7s^3+16s^2+12s-2}} \cdot \frac{\cancel{s^4+7s^3+16s^2+12s-2}}{s^4+7s^3+16s^2+12s-2+2K \cdot G_R} \\
&= \frac{(2K \cdot G_R(s+2)}{s^4+7s^3+16s^2+12s-2+2K \cdot G_R} \,.
\end{aligned}$$

d) Damit ein System stabilisierbar ist, muss durch den Regler und die Rückkopplung das Nennerpolynom der Gesamtübertragungsfunktion $G(s)$ so verändert werden können, dass dessen Nullstellen, also die Polstellen der Übertragungsfunktion, alle negative Realteile besitzen. Im Kontext der algebraischen Stabilitätskriterien bedeutet dies, durch die Regelung muss das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion in ein Hurwitz-Polynom überführt werden können.

Es gilt laut Aufgabenstellung $G_R(s) = K_R$. Zur Überprüfung der Stabilisierbarkeit wird nun das Hurwitz-Kriterium in Abhängigkeit von K_R auf das Nennerpolynom

$$N(s) = \underbrace{1}_{a_4} s^4 + \underbrace{7}_{a_3} s^3 + \underbrace{16}_{a_2} s^2 + \underbrace{12}_{a_1} s - \underbrace{2 + 2K \cdot K_R}_{a_0} \tag{2}$$

angewandt. Damit (2) ein Hurwitz-Polynom ist, müssen als notwendige Bedingung alle Koeffizienten a_i für $i = 0, \ldots, n$ vorhanden sein und das gleiche Vorzeichen besitzen. Die Koeffizienten $a_4 - a_1$ sind alle vorhanden und positiv, somit muss

$$\begin{aligned} a_0 &= -2 + 2K \cdot K_R > 0 \\ \Leftrightarrow K_R &> \frac{1}{K} \\ &\text{für } K > 0 \end{aligned}$$

gelten. Des Weiteren gilt es die hinreichende Bedingung, dass die Hurwitzdeterminante H_{n-1} sowie alle ihre Hauptdeterminanten müssen größer als Null sein müssen, zu überprüfen. Daraus folgt

$$\begin{aligned} H_1 &= a_3 = 7 > 0 \\ H_2 &= \begin{vmatrix} 7 & 12 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} \\ H_3 &= \begin{vmatrix} 7 & 12 & 0 \\ 1 & 16 & -2 + 2KK_R \\ 0 & 7 & 12 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Die beiden Hurwitz-Determinanten $\det H_2$ und $\det H_3$ ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \det H_2 &= \det \begin{vmatrix} 7 & 12 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} = 100 > 0 \\ \det H_2 &= \det \begin{vmatrix} 7 & 12 & 0 \\ 1 & 16 & -2 + 2KK_R \\ 0 & 7 & 12 \end{vmatrix} \\ &= 1344 - 144 + 98 - 98KK_R > 0 \\ &\Rightarrow K_R < \frac{13,25}{K} \,. \end{aligned}$$

Der geschlossene Regelkreis ist demnach für ein K_R für das

$$\frac{1}{K} < K_R < \frac{13,25}{K}$$

gilt, sowie für $K > 0$ asymptotisch stabil. Da das System durch einen P-Regler in ein Hurwitz-Polynom überführt werden kann, ist es mit einem P-Regler stabilisierbar.

e) Für die Aufgabe gilt $K_R = 12$. Damit ergibt sich für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{24K(s+2)}{s^4 + 7s^3 + 16s^2 + 12s - 2 + 24K} \,.$$

Die Sprungantwort des Systems berechnet sich zu $H(s) = \frac{1}{s} \cdot G(s)$ (siehe Ü.7). Somit lässt sich der stationäre Endwert berechnen

$$\begin{aligned} y_\infty &= \lim_{s\to 0} s \cdot H(s) \\ &= \lim_{s\to 0} G(s) \\ &= \frac{48K}{-2+24K} \\ &= 12 \text{ (laut A.S.)}\,. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} 48K &= -24 + 288K \\ \Leftrightarrow K &= \frac{1}{10}\,. \end{aligned}$$

Zwar gilt der Endwertsatz nur für stabile Systeme, jedoch kann bei der Existenz eines stationären Endwertes von der Stabiliät des Systems ausgegangen werden. Das Ergebniss kann allerdings trotzdem auf Plausibilität geprüft werden. Dies kann durch Einsetzen des erhaltenen Wertes für K in das vorher berechnete Intervall für mögliche Werte von K_R erfolgen. Das resultiert in

$$10 < K_R < 132.5\,.$$

Der für K_R verwendete Wert liegt in diesem Intervall, somit ist der Grenzwertsatz anwendbar und das Ergebnis plausibel.

f) Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

- empirische Einstellregeln, basierend auf einem Schwingversuch
- Regelkreis wird mit einem P-Regler geschlossen und die Regelverstärkung so lange erhöht, bis die Stabilitätsgrenze erreicht ist
- Dafür notwendige Regelverstärkung wird mit K_{krit} bezeichnet, die Periodendauer der an der Stabilitätsgrenze auftretenden Dauerschwingung mit wird T_{krit} bezeichnet
- Mit Hilfe dieser beiden Kennwerte lassen sich dann die Reglerparameter nach der in Abbildung 2 dargestellten Tabelle bestimmen

Reglertypen	Regelparameter		
	K_R	T_N	T_V
P	$0.5 \cdot K_{krit}$	–	–
PI	$0.45 \cdot K_{krit}$	$0.85 \cdot T_{krit}$	–
PID	$0.6 \cdot K_{krit}$	$0.5 \cdot T_{krit}$	$0.12 \cdot T_{krit}$

Abbildung 2: Einstellregeln nach Ziegler-Nicols

Der Stabilitätsrand wurde in Aufgabe d) bereits rechnerisch ermittelt. Das K_{krit} ergibt sich also zu

$$K_{krit} = \frac{13,25}{K} = 132,5\,.$$

Das T_{krit} ergibt sich laut Aufgabenstellung zu $T_{krit} = 5$.

Für den P-Regler ergibt sich ach der oben dargestellten Tabelle für dessen die Übertragungsfunktion

$$G_{R,P}(s) = 0,5 \cdot K_{krit} = 66,25\,.$$

Für den PI-Regler mit der Übertragungsfunktion

$$G_{R,PI}(s) = K_R \cdot \left(1 + \frac{1}{s \cdot T_N}\right)$$

muss Reglerverstärkung K_R zusätzlich noch die Zeitkonstante T_N (auch Nachstellzeit genannt, in vorherigen Übungen als T_I bezeichnet) des Integrators bestimmt werden. Aus der Tabelle ergibt sich

$$\begin{aligned} K_R &= 0,45 \cdot K_{krit} = 59,625 \\ T_N &= 0,85 \cdot T_{krit} = 4,25\,. \end{aligned}$$

Die Übertragungsfunktion des PI-Reglers ergibt sich also zu

$$G_{R,PI}(s) = 59,625 \cdot \left(1 + \frac{1}{4,25 \cdot s}\right)$$

Schlussendlich ergibt sich für den PID-Regler mit der Übertragungsfunktion

$$G_{R,PID}(s) = K_R \cdot \left(1 + \frac{1}{T_N \cdot s} + T_V \cdot s\right)$$

und dem zusätzlichen Parameter T_V (auch Vorhaltezeit genannt, in vorherigen Übungen als T_D bezeichnet) nach der Tabelle

$$\begin{aligned} K_R &= 0,6 \cdot K_{krit} = 79,5 \\ T_N &= 0,5 \cdot T_{krit} = 2,5 \\ T_V &= 0,12 \cdot T_{krit} = 0,6\,. \end{aligned}$$

Die Übertragungsfunktion ergibt sich damit zu

$$G_{R,PID}(s) = 79,5 \cdot \left(1 + \frac{1}{2,5 \cdot s} + 0,6 \cdot s\right)\,.$$

Aufgabe 2. Polstellen-Kompensation
Gegeben ist die folgende Regelstrecke

$$G_S(s) = \frac{2}{(s+1)\cdot((s+\delta)+\omega_e^2)}$$

mit $\delta = \frac{1}{2}$ und $\omega_e^2 = \frac{15}{4}$.

Aufgaben

a) Kompensieren Sie das konjugiert komplexe Polpaar mit einem realisierbaren PID-Regler mit der parasitären Zeitkonstante $T = \frac{1}{8}$ und geben Sie die Übertragungsfunktion $G_0(s)$ des resultierenden offenen Regelkreises an

b) Berechnen Sie den stationären Endwert der Sprungantwort des geregelten Systems $G(s)$ mit Einheitsrückführung. Beschreiben Sie, wie sich das Systemverhalten durch die Polstellen-Kompensation verändert. Was würde sich ändern, wenn anstatt des PID- und ein P-Regler verwendet werden würde.

Lösung Aufgabe 2.

a) Um die Polstellen zu kompensieren. wird zunächst die Übertragungsfunktion des Reglers umgestellt

$$\begin{aligned} G_R(s) &= K_R \cdot \frac{(sT_I(1+sT) + (1+sT) + s^2 T_I T_D}{sT_I(1+sT)} \\ &= K_R \cdot \frac{s^2 T_I(T_D+T) + s(T_I+T) + 1}{sT_I(1+sT)} \\ &= K \cdot \frac{(s-s_{R1})(s-s_{R2})}{s\cdot\left(s+\frac{1}{T}\right)}\,. \end{aligned}$$

wobei für K

$$K = K_R \cdot \frac{1}{T_I T}$$

gilt. Für die beiden Nullstellen der Reglerübertragungsfunktion s_{R1} und s_{R2} gilt

$$s_{R1/2} = -\frac{T_I+T}{2T_I(T_D+T)} \pm \sqrt{\frac{(T_I-T)^2 - 4T_I T_D}{2T_I(T_D+T)}}\,.$$

Um die beiden Polstellen zu kompensieren, müssen die Nullstellen $s_{R1/2}$ des Reglers folgende Form besitzen

$$(s-s_{R1})(s-s_{R2}) = (s+\delta_R)^2 + \omega_R^2\,,$$

also ein komplexes Nullstellenpaar darstellen. Damit ergibt sich für δ_R und ω_R

$$\begin{aligned} \delta_R &= \frac{T_I+T}{2T_I(T_D+T)} \\ \omega_R^2 &= \frac{4T_I T_D - (T_I-T)^2}{4T_I^2(T_D+T)^2}\,, \end{aligned}$$

und damit die Übertragungsfunktion des Reglers zu

$$G_R(s) = K \cdot \frac{(s+\delta_R)^2 + \omega_R^2}{s\left(s+\frac{1}{T}\right)}\,.$$

Aus den Ausdrücken für δ_R und ω_R können nun durch Umformen Ausdrücke für T_I und T_D gewonnen werden

$$\begin{aligned} T_I &= \frac{2\delta_R}{\delta_R^2 + \omega_R^2} - T \\ T_D &= \frac{1}{2\delta_R - T(\delta_R^2 + \omega_R^2)} - T\,. \end{aligned}$$

Damit durch den Regler das komplexe Polpaar kompensiert wird, muss $\delta_R = \delta$ und $\omega_R = \omega_e$ gelten. Damit ergeben sich T_I und T_D zu

$$\begin{aligned} T_I &= \frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{15}{4}} - \frac{1}{8} = \frac{4}{16} - \frac{2}{16} = 0,125 \\ T_D &= \frac{1}{1-\frac{1}{8}\cdot\frac{16}{4}} - \frac{1}{8} = 2 - \frac{1}{8} = 1,875\,. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für $G_0(s)$

$$\begin{aligned} G_0(s) &= K \cdot \frac{(s+\delta_R)^2 + \omega_R^2}{s\left(s+\frac{1}{T}\right)} \cdot \frac{2}{(s+1)\cdot((s+\delta)^2+\omega_e^2)} \\ &= \frac{2K}{s(s+1)(s+8)}\,. \end{aligned}$$

b) Der offene Regelkreis bestehend aus Regler und Strecke wird mit einer Einheitsrückführung negativ geschlossen (Rückkopplung), wie es in Abbildung 3 dargestellt ist.

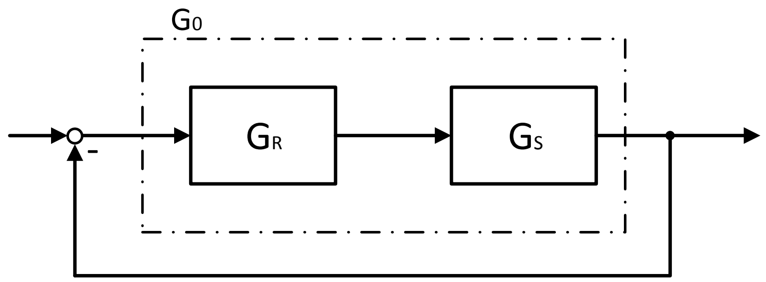


Abbildung 3: Regelkreis

Die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises lautet deswegen

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}\,.$$

Für den Nenner der Übertragungsfunktion ergibt sich

$$\begin{aligned} 1 + G_0(s) &= 1 + \frac{2K}{s(s+1)(s+8)} \\ &= \frac{s(s+1)(s+8) + 2K}{s(s+1)(s+8)}\,, \end{aligned}$$

und damit die gesamte Übertragungsfunktion zu

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{2K}{\cancel{s(s+1)(s+8)}} \cdot \frac{\cancel{s(s+1)(s+8)}}{s(s+1)(s+8) + 2K} \\ &= \frac{2K}{s(s+1)(s+8) + 2K} \\ &= \frac{2K}{s^3 + 9s^2 + 8s + 2K}\,. \end{aligned}$$

Das K_R kann jetzt zum einen dazu benutzt werden um das Verhalten des Regelkreis noch anzupassen (Verkleinerung der Anregelzeit, etc.). Die Veränderung des Systemverhaltens durch die Polkompensation (für ein $K_R = 1$) wird im Folgenden dargestellt.

Zunächst wird der stationäre Endwert der Sprungantwort betrachtet

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0} s \cdot G(s) \cdot \frac{1}{s} &= \lim_{s\to 0} \frac{2K}{s^3 + 9s^2 + 8s + 2K} \\ &= \frac{2K}{2K} \\ &= 1\,. \end{aligned}$$

Der Regelkreis ist stationär genau, da der Eingang und Ausgang im eingeschwungenen Zustand identisch sind. Zum Vergleich der stat. Endwert der Strecke ohne die Regelung

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0} s \cdot G(s) \cdot \frac{1}{s} &= \lim_{s\to 0} \frac{2}{(s+1)\left(\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}\right)} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{2}{s^3 + 2s^2 + 5s + 4} \\ &= 0{,}5\,. \end{aligned}$$

Ungeregelt besitzt das System also keine stationäre Genauigkeit, da der Ausgang stationär nicht dem Eingang entspricht. Neben der durch den Regler erreichten stationären Genauigkeit zeigt sich zusätzlich noch sehr deutlich der Effekt der Polkompensation (siehe Übungsfolien). Da genau die beiden komplexen Pole kompensiert wurden, welche für das Schwingungsverhalten des ungeregelten Systems verantwortlich waren, zeigt das System nach der Kompensation durch die Regelung nun aperiodisches Verhalten.