F. Goßmann M.Sc
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Steuer- und Regelungstechnik, WT 2020

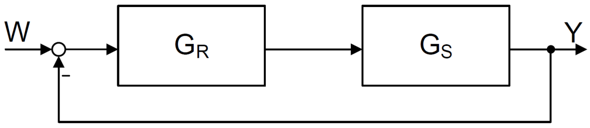
# Übung 8 - Lösung

Thema: Stationäre Genauigkeit, Reglerstrukturen, Polkompensation

**Aufgabe 1. Stationäre Genauigkeit**
Gegeben ist ein $IT_1$-System mit der Übertragungsfunktion

$$G_S(s) = \frac{1}{s(s+1)}\,.$$

Es wird ein Standardregelkreis der Form




betrachtet, wobei als Regler ein P-Regler $G_R(s) = K_R$ eingesetzt wird.

**Aufgabe** Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises und den stationären Endwert der Sprungantwort. Welche Aussage lässt sich aufgrund des Ergebnisses im Hinblick auf die stationäre Genauigkeit treffen?

**Lösung Aufgabe 1.**
Zunächst muss die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises bestimmt werden. Da es sich um einen Standardregelkreis handelt, gilt

$$\begin{aligned} G_v(s) &= G_R(s) \cdot G_S(s) \\ G_r(s) &= 1\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $G_0(s) = G_v(s)$ gilt und somit

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}\,.$$

Als erstes wird der Nenner der Gesamtübertragungsfunktion berechnet

$$\begin{aligned} 1 + G_0(s) &= 1 + \frac{K_R}{s(s+1)} \\ &= \frac{s(s+1) + K_R}{s(s+1)} \,. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich dann die gesamte Übertragungsfunktion zu

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{K_R}{\cancel{s(s+1)}} \cdot \frac{\cancel{s(s+1)}}{s(s+1) + K_R} \\ &= \frac{K_R}{s(s+1) + K_R} \,. \end{aligned}$$

Anschließend wird noch der stationäre Endwert der Sprungantwort berechnet. Für die Sprungantwort gilt

$$H(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} \,.$$

Für den stationären Endwert der Sprungantwort ergibt sich dann

$$\begin{aligned} h_\infty &= \lim_{s \to 0} s \cdot H(s) \\ &= \lim_{s \to 0} s \cdot G(s) \cdot \frac{1}{s} \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{K_R}{s(s+1) + K_R} = 1 \,. \end{aligned}$$

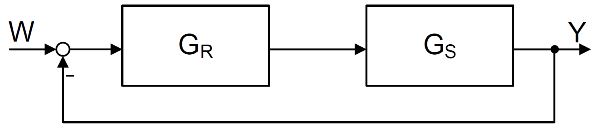
Es zeigt sich, dass dieser Regelkreis trotz der Verwendung eines P-Reglers stationär genau ist. Dies ist mit der Stuktur der Regelstrecke begründet, da in dieser bereits ein freies I-Glied vorhanden ist.

**Aufgabe 2. Reglerstrukturen**

Gegeben ist das System aus der vorherigen Übung 7.) mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \,.$$

Es wird ebenfalls ein Standardregelkreis der Form




betrachtet.

Als Regler werden in diesem Fall zwei verschiedene Regler-Strukturen verwendet

- PI-Regler: $G_{R,PI}(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I \cdot s}\right)$
- PID-Regler: $G_{R,PID}(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I \cdot s} + T_D \cdot s\right)$

**Aufgaben**

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises mit einem PI-Regler. Untersuchen Sie den Einfluss der Reglerparameter $K_R$ und $T_I$ auf das Verhalten der Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises.

b) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises mit einem PID-Regler. Wie äußert sich der Einfluss des zusätzlichen Reglerparameters $T_D$ auf das Verhalten der Regelstrecke?

**Lösung Aufgabe 2.**

a) Zunächst wird die Übertragungsfunktion des PI-Reglers umgeformt

$$\begin{aligned} G_{R,PI}(s) &= K_R\left(1 + \frac{1}{T_I \cdot s}\right) \\ &= \frac{K_R(T_I s + 1)}{T_I s}\,. \end{aligned}$$

Aufgrund der Betrachtung eines Standardregelkreises ergibt sich die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises zu

$$\begin{aligned} G_0(s) &= \frac{K_R(T_I s + 1)}{T_I s} \cdot \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \\ &= \frac{2K_R(T_I s + 1)}{T_I s(s^3 + 6s^2 + 11s + 6)}\,. \end{aligned}$$

Durch den I-Anteil des Reglers wurde der Regelkreis um ein freies I-Glied ergänzt. Somit arbeitet der geschlossene Regelkreis im Gegensatz zur reinen P-Regelung (siehe Übung 7) stationär genau. Der Nenner der Gesamtübertragungsfunktion ergibt sich daraus zu

$$1 + G_0(s) = \frac{T_I s(s^3 + 6s^2 + 11s + 6) + 2K_R(T_I s + 1)}{T_I s(s^3 + 6s^2 + 11s + 6)}\,.$$

Somit ergibt sich die Gesamtübertragungsfunktion zu

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} \\
&= \frac{2K_R(T_I s+1)}{\cancel{T_I s(s^3+6s^2+11s+6)}} \cdot \frac{\cancel{T_I s(s^3+6s^2+11s+6)}}{T_I s(s^3+6s^2+11s+6)+2K_R(T_I s+1)} \\
&= \frac{2K_R(T_I s+1)}{T_I s(s^3+6s^2+11s+6)+2K_R(T_I s+1)} \\
&= \frac{2K_R T_I s+2K_R}{T_I s^4+6T_I s^3 11T_I s^2+(6T_I+2K_R T_I)s+2K_R}\,.
\end{aligned}
$$

Es zeigt sich, dass durch den PI-Regler der geschlossene Regelkreis um eine Nulstelle und eine Polstelle ergänzt wurde. Abschließend wird noch der stationäre Endwert der Sprungantwort $H(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$ berechnet

$$
\begin{aligned}
h_\infty &= \lim_{s\to 0} s \cdot G(s) \cdot \frac{1}{s} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{2K_R T_I s+2K_R}{T_I s^4+6T_I s^3 11T_I s^2+(6T_I+2K_R T_I)s+2K_R} \\
&= \frac{2K_R}{2K_R} = 1\,.
\end{aligned}
$$

Wie schon erwähnt, ist die erzielte Regelung in diesem Fall aufgrund des I-Anteils in dem Regler in jedem Fall stationär genau, unabhängig von der Wahl der Reglerparameter $K_R$ und $T_I$. Für den Einfluss der Reglerparameter auf das dynamische Verhalten des Regelkreises siehe Übungsfolien.

b) Nun wird der PID-Regler betrachtet. Zunächst wird die Übertragungsfunktion des Reglers ebenfalls umgeformt

$$
\begin{aligned}
G_{R,PID}(s) &= K_R\left(1+\frac{1}{T_I \cdot s}+T_D \cdot s\right) \\
&= K_R + \frac{K_R}{T_I s} + K_R T_D s \\
&= \frac{K_R T_I s + K_R + K_R T_D T_I s^2}{T_I s} \\
&= \frac{K_R T_D T_I s^2 + T_I K_R s + K_R}{T_I s}\,.
\end{aligned}
$$

Da die Struktur des Regelkreises identisch zur Aufgabe a) ist, ergibt sich der offene Regelkreis zu

$$
\begin{aligned}
G_0(s) &= \frac{K_R T_D T_I s^2 + T_I K_R s + K_R}{T_I s} \cdot \frac{2}{s^3+6s^2+11s+6} \\
&= \frac{2K_R T_D T_I s^2 + 2T_I K_R s + 2K_R}{T_I s(s^3+6s^2+11s+6)}\,.
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich der Nenner der Gesamtübertragungsfunktion zu

$$
1+G_0(s) = \frac{T_I s(s^3+6s^2+11s+6)+2K_R(T_D T_I s^2+2T_I s+1)}{T_I s(s^3+6s^2+11s+6)}\,,
$$

womit sich die Gesamtübertragungsfunktion zu

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} \\
&= \frac{2K_RT_DT_Is^2+2T_IK_Rs+2K_R}{\cancel{T_Is(s^3+6s^2+11s+6)}} \cdot \frac{\cancel{T_Is(s^3+6s^2+11s+6)}}{T_Is(s^3+6s^2+11s+6)+2K_R(T_DT_Is^2+2T_Is+1)} \\
&= \frac{2K_RT_DT_Is^2+2T_IK_Rs+2K_R}{T_Is(s^3+6s^2+11s+6)+2K_R(T_DT_Is^2+2T_Is+1)} \\
&= \frac{2K_RT_DT_Is^2+2T_IK_Rs+2K_R}{T_Is^4+6T_Is^3+(11T_I+2K_RT_DT_I)s^2+(6T_I+2T_IK_R)s+2K_R}
\end{aligned}
$$

ergibt. Es zeigt sich, dass der PID-Regler im Gegensatz zum PI-Regler dem geschlossenen Regelkreis noch eine weitere Nullstelle hinzufügt. Für den Einfluss des zusätzlichen Parameters $T_D$ siehe Übungsfolien.

**Aufgabe 3. Polkompensation**
Gegeben ist das System

$$G(s) = \frac{4}{(s+2)(s+7)(s+8)}\,.$$

Das System $G(s)$ soll im Folgenden mit einem PI-Regler

$$G_R(s) = K_R\left(1+\frac{1}{T_I}\right)$$

in einem Standardregelkreis geregelt werden.

**Aufgaben**

a) Bestimmen Sie die Nachstellzeit $T_I$ des Reglers so, dass die Polstelle bei $s=-8$ der Regelstrecke kompensiert wird.

b) Bestimmen Sie den Bereich für $K_R$ für den der geschlossene Regelkreis stabil ist.

c) Wie wirken sich die Polkompensation und die Wahl der Reglerverstärkung $K_R$ auf die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises aus?

**Lösung Aufgabe 3.**

a) Zunächst wird die Reglerübertragungsfunktion passend umgeformt

$$
\begin{aligned}
G_R(s) &= K_R\left(1+\frac{1}{T_Is}\right) \\
&= K_R\left(\frac{T_Is+1}{T_Is}\right) \\
&= K_R\left(\frac{s+\frac{1}{T_I}}{s}\right)\,.
\end{aligned}
$$

Jetzt kann die Nachstellstellzeit $T_I$ des Integrators so gewählt werden, dass sich die Polstelle $s=-2$ im offenen Regelkreis (Standardregelkreis) raus kürzt. Aus diesem Grund wird die

Nachstellzeit zu $T_I = \frac{1}{8} = 0,125$ gewählt, womit sich für den offenen Regelkreis ergibt

$$\begin{aligned} G_0(s) &= \underbrace{\frac{4}{(s+2)(s+7)(s+8)}}_{G_S(s)} \cdot \underbrace{\frac{K_R\left(s+\frac{1}{0{,}125}\right)}{s}}_{G_R(s)} \\ &= \frac{4K_R(s+8)}{s(s+2)(s+7)(s+8)} \\ &= \frac{4K_R}{s(s+2)(s+7)}\,. \end{aligned}$$

b) Es wird ein Standardregelkreis betrachtet, daher gilt für die Gesamtübertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}\,.$$

Der Nenner der Übertragungsfunktion ergibt sich zu

$$1 + G_0(s) = \frac{s(s+2)(s+7) + 4K_R}{s(s+2)(s+7)}\,.$$

Damit ergibt sich als Gesamtübertragungsfunktion

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{4K_R}{s(s+2)(s+7) + 4K_R} \\ &= \frac{4K_R}{s^3 + 9s^2 + 14s^2 + 4K_R} \end{aligned}$$

Für die Stabilitätsbetrachtung wird das Hurwitz-Kriterium verwendet. Die notwendige Bedingung ($a_i > 0$) ergibt

$$\begin{aligned} a_3 &= 1 > 0 \\ a_2 &= 8 > 0 \\ a_1 &= 15 > 0 \\ a_0 &= 4K_R \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass für Stabilität $K_R > 0$ gelten muss. Weiterhin ergibt sich aus der hinreichenden Bedingung

$$\begin{aligned} H_1 &= a_2 = 9 \; > 0 \\ H_2 &= \begin{vmatrix} 9 & 4K_R \\ 1 & 14 \end{vmatrix} \\ &= 9 \cdot 14 - 1 \cdot 4K_R \\ &= 126 - 4K_R > 0\,. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich, dass zusätzlich $K_R < 31,5$ gelten muss. Somit folgt, dass der Reglerparameter $K_R$ im Intervall

$$0 \, < \, K_R \, < 31,5$$

liegen muss, damit der geschlossene Regelkreis stabil ist.

c) Der stationäre Endwert der Sprungantwort ergibt sich zu

$$\begin{aligned} h_\infty &= \lim_{s\to 0} s \cdot G(s) \frac{1}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{4K_R}{s^3 + 9s^2 + 14s^2 + 4K_R} \\ &= 1\,. \end{aligned}$$

Der geschlossener Regelkreis ist durch das zusätzlich eingebrachte freie I-Glied im offenen Regelkreis in jedem Fall stationär genau, unabhängig von der Reglerverstärkung. Durch Vergrößerung der Reglerverstärkung $K_R$ wird die Anregelzeit bzw. Ansprechzeit des Regelkreises kleiner, jedoch steigt auch das Überschwingen (siehe Übungsfolien).