F. Goßmann M.Sc
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Steuer- und Regelungstechnik, WT 2020

Übung 6 - Lösung

Thema: Stabilität von Systemen, Künstliche Stabilisierung

Aufgabe 1. Stabilität von Übertragungsfunktionen
Gegeben sind die beiden Übertragungsfunktionen

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6},$$
$$G_2(s) = \frac{1}{s^2 + s - 6}.$$

Aufgaben

a) Berechnen Sie die Polstellen der beiden Übertragungsfunktionen.

b) Betrachten Sie beide Übertragungsfunktionen jeweils in einem Standardregelkreis mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$. Bestimmen Sie jeweils die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises und deren Polstellen in Abhängigkeit von K_R.

c) Beschreiben Sie jeweils den Einfluss der Reglerverstärkung K_R auf die Lage der Polstellen und die Stabilität des geschlossenen Regelkreises.

Lösung Aufgabe 1.

a) Für die erste Übertragungsfunktion $G_1(s)$ ergeben sich die Polstellen zu

$$\begin{aligned} s &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\ \Leftrightarrow s &= -2 \vee s = -3\,. \end{aligned}$$

Die Übertragungsfunktion hat also zwei Polstellen mit negativen Realteilen und ist daher stabil.

Für die zweite Übertragungsfunktion $G_2(s)$ ergeben sich analog die Polstellen zu

$$
\begin{aligned}
s &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} \\
&= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} \\
&= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \\
&= -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \\
\Leftrightarrow & s = 2 \lor s = -3\,.
\end{aligned}
$$

In diesem Fall ergibt sich eine Polstelle mit einem positiven Realteil, somit ist diese Übertragungsfunktion instabil.

b) Es wird in beiden Fällen der Standardregelkreis mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ betrachtet. Daher ergibt sich für die Zusammenfassung der Rückkopplung

$$
\begin{aligned}
G_v &= K_R \cdot G(s)\,, \\
G_r &= 1\,,
\end{aligned}
$$

und somit gilt $G_0 = G_v$, da im Pfad der Rückkopplung keine Übertragungsfunktion vorliegt ($G_r = 1$). Somit gilt für die Gesamtübertragungsfunktion

$$
G = \frac{G_0}{1 + G_0}\,.
$$

Für die erste Übertragungsfunktion ergibt sich somit

$$
G_v = G_0 = \frac{K_R}{s^2 + 5s + 6}\,.
$$

Die Berechnung des Nenners ergibt dann

$$
1 + G_0 = 1 + \frac{K_R}{s^2 + 5s + 6} = \frac{s^2 + 5s + 6 + K_R}{s^2 + 5s + 6}\,.
$$

Für die Gesamtübertragungsfunktion ergibt sich somit

$$
\begin{aligned}
G &= \frac{\cancel{s^2 + 5s + 6}}{s^2 + 5s + 6 + K_R} \cdot \frac{K_R}{\cancel{s^2 + 5s + 6}} \\
&= \frac{K_R}{s^2 + 5s + 6 + K_R}\,.
\end{aligned}
$$

Für die Polstellen des geschlossenen Regelkreises gilt in diesem Fall

$$
\begin{aligned}
s &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6 - K_R} \\
&= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24 - 4K_R}{4}} \\
&= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1 - 4K_R}{4}} \\
&= \frac{-5 \pm \sqrt{1 - 4K_R}}{2} \, .
\end{aligned}
$$

Für die zweite Übertragungsfunktion gilt analog

$$
G_v = G_0 = \frac{K_R}{s^2 + s - 6} \, .
$$

Somit ergibt sich der Nenner der Gesamtübertragungsfunktion zu

$$
1 + G_0 = 1 + \frac{K_R}{s^2 + s - 6} = \frac{s^2 + s - 6 + K_R}{s^2 + s - 6} \, ,
$$

und die gesuchte Übertragungsfunktion zu

$$
\begin{aligned}
G &= \frac{\cancel{s^2 + s - 6}}{s^2 + s - 6 + K_R} \cdot \frac{K_R}{\cancel{s^2 + s - 6}} \\
&= \frac{K_R}{s^2 + s - 6 + K_R} \, .
\end{aligned}
$$

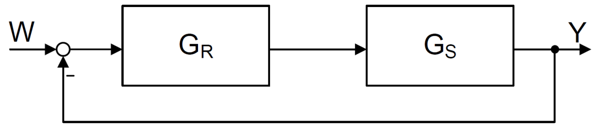
Die Polstellen des geschlossenen Regelkreises ergeben sich zu

$$
\begin{aligned}
s &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6 - K_R} \\
&= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24 - 4K_R}{4}} \\
&= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25 - 4K_R}{4}} \\
&= -\frac{1 \pm \sqrt{25 - 4K_R}}{2} \, .
\end{aligned}
$$

Durch das K_R kann in diesem Fall beispielsweise erreicht werden, dass die Polstelle mit dem positiven Realteil in den negativen Bereich verschoben und der geschlossene Regelkreis somit stabilisiert wird (künstliche Stabilisierung).

c) Siehe Übungsfolien

Aufgabe 2. Algebraische Stabilitätskriterien
Gegeben ist das folgende System in Blockschaltbild-Form



mit den beiden Übertragungsfunktionen $G_R(s)$ und $G_S(s)$. Für die Streckenübertragungsfunktion $G_S(s)$ sind die beiden Übertragungsfunktionen gegeben

$$G_S(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}\,,$$
$$G_S(s) = \frac{10\cdot(s+5)}{(s+1)(s+2)(s+3)}\,.$$

Aufgabe Schließen Sie den Regelkreis in beiden Fällen mit einen P-Regler $G_R(s) = K_R$ und überprüfen Sie für mit dem Hurwitz-Kriterium, für welche K_R der Regelkreis stabil ist.

Lösung Aufgabe 2.

(i) Zunächst wird die erste Übertragungsfunktion

$$G_S(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

betrachtet. Laut Aufgabenstellung wird ein Standardregelkreis mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ betrachtet. Somit ergibt sich für die beiden Teile der Rückkopplung

$$G_v(s) = \frac{10K_R}{(s+1)(s+2)(s+3)}\,,$$
$$G_r(s) = 1\,.$$

Da im Rückkopplungspfad keine Übertragungsfunktion vorhanden ist, gilt $G_v(s) = G_0(s)$ und somit für die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}\,.$$

Für den Nenner ergibt sich

$$1+G_0(s) = 1 + \frac{10K_R}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{(s+1)(s+2)(s+3)+10K_R}{(s+1)(s+2)(s+3)}\,.$$

Somit ergibt sich für $G(s)$

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{(s+1)\cancel{(s+2)(s+3)}}{(s+1)(s+2)(s+3)+10K_R} \cdot \frac{10K_R}{\cancel{(s+1)(s+2)(s+3)}} \\
&= \frac{10K_R}{(s+1)(s+2)(s+3)+10K_R} \\
&= \frac{10K_R}{s^3+6s^2+11s+(6+10K_R)}\,.
\end{aligned}
$$

Um einen Bereich für K_R zu bestimmen, in dem der geschlossene Regelkreis stabil ist, wird nun das Hurwitz-Kriterium verwendet. Dafür wird das Nennerpolynom $N(s)$

$$
N(s) = \underbrace{1}_{a_3} \cdot s^3 + \underbrace{6}_{a_2} \cdot s^2 + \underbrace{11}_{a_1} \cdot s + \underbrace{(6+10K_R)}_{a_0} \tag{1}
$$

betrachtet. Nach der notwendingen Bedingung für Stabilität müssen alle Koeffizienten a_i für $i = 0, \ldots, n$ in (1) vorhanden sein und das gleiche Vorzeichen besitzen. Die Koeffizenten $a_3 - a_1$ sind vorhanden und positiv, somit ergibt sich mit

$$
\begin{aligned}
6 + 10K_R &> 0 \\
\Leftrightarrow K_R &> -0.6
\end{aligned}
$$

eine erste Bedingung an K_R. Zusätzlich müssen für die hinreichende Bedingung für Stabilität nach Hurwitz noch die Determinanten der beiden Hurwitz-Matrizen

$$
\begin{aligned}
H_1 &= a_2 \\
H_2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

geprüft werden. Die Matrix H_1 ist unabhängig von K_R und deren Determinante beträgt $a_2 = 6$ und ist somit positiv. Betrachten von H_2 ergibt

$$
\begin{aligned}
\det H_2 &= \det \begin{vmatrix} 6 & 6+10K_R \\ 1 & 11 \end{vmatrix} \\
&= 60 - 10K_R\,.
\end{aligned}
$$

Für Stabilität muss die Determinante von H_2 positiv sein, somit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
60 - 10K_R &> 0 \\
\Leftrightarrow 6 &> K_R\,.
\end{aligned}
$$

Somit ist der geschlossene Regelkreis nur genau dann stabil, wenn für K_R ein Wert im Bereich

$$
-0.6 < K_R < 6
$$

gewählt wird.

(ii) Jetzt wird die Übertragungsfunktion

$$G_S(s) = \frac{10 \cdot (s+5)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

betrachtet. Analog zur vorherigen Aufgabe wird ein Standardregelkreis mit einem P-Regler betrachtet, somit gilt

$$\begin{aligned} G_v(s) &= \frac{10K_R(s+5)}{(s+1)(s+2)(s+3)}\,, \\ G_r(s) &= 1\,, \end{aligned}$$

und da $G_r = 1$ ist gilt hier ebenfalls $G_v = G_0$ und somit

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}\,.$$

Daraus folgt für den Nenner der Übertragungsfunktion

$$1 + G_0(s) = 1 + \frac{10K_R(s+5)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{(s+1)(s+2)(s+3) + 10K_R(s+5)}{(s+1)(s+2)(s+3)}\,.$$

Daraus folgt für die vollständige Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\cancel{(s+1)(s+2)(s+3)}}{(s+1)(s+2)(s+3) + 10K_R(s+5)} \cdot \frac{10K_R(s+5)}{\cancel{(s+1)(s+2)(s+3)}} \\ &= \frac{10K_R(s+5)}{(s+1)(s+2)(s+3) + 10K_R(s+5)} \\ &= \frac{10K_R(s+5)}{s^3 + 6s^2 + (11 + 10K_R)\,s + (6 + 50K_R)}\,. \end{aligned}$$

Durch die zusätzliche Nullstelle $s = -5$ in der Regelstrecke wirkt das K_R in diesem Fall auf zwei Koeffizienten im Nennerpolynom des geschlossenen Regelkreises.

Um den Bereich für K_4 festzulegen, für den der geschlossene Regelkreis stabil ist, wird wieder das Hurwitz-Kriterium verwendet. Für das Nennerpolynom $N(s)$ gilt

$$N(s) = \underbrace{1}_{a_3} \cdot s^3 + \underbrace{6}_{a_2} \cdot s^2 + \underbrace{(11 + 10K_R)}_{a_1} \cdot s + \underbrace{(6 + 50K_R)}_{a_0} \tag{2}$$

Damit der geschlossene Regelkreis stabil ist, müssen alle Koeffizienten a_i für $i = 0, \ldots, n$ in (2) vorhanden sein und das gleiche Vorzeichen besitzen. Die beiden Koeffizienten a_3 und a_2 sind vorhanden und positiv, somit muss für die verbleibenden Koeffzienten

$$\begin{aligned} a_1 &= 11 + 10K_R > 0\,, \\ a_0 &= 6 + 50K_R\,, \end{aligned}$$

gelten. Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
K_R &> -1.1\,, \\
K_R &> -0.12\,.
\end{aligned}
$$

Für Stabilität müssten beide Bedinungen erfüllt sein, somit ist der geschlossene Regelkreis nur für $K_R > -0.12$ stabil. Zusätzlich müssen noch die Determinanten der Hurwitz-Matrizen

$$
\begin{aligned}
H_1 &= a_2 \\
H_2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

geprüft werden. Für die Determinante von H_1 gilt $a_2 = 6$ und somit unabhängig von K_R positiv. Für H_2 ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\det H_2 &= \det \begin{vmatrix} 6 & 6 + 50K_R \\ 1 & 11 + 10K_R \end{vmatrix} \\
&= 60 + 10K_R\,.
\end{aligned}
$$

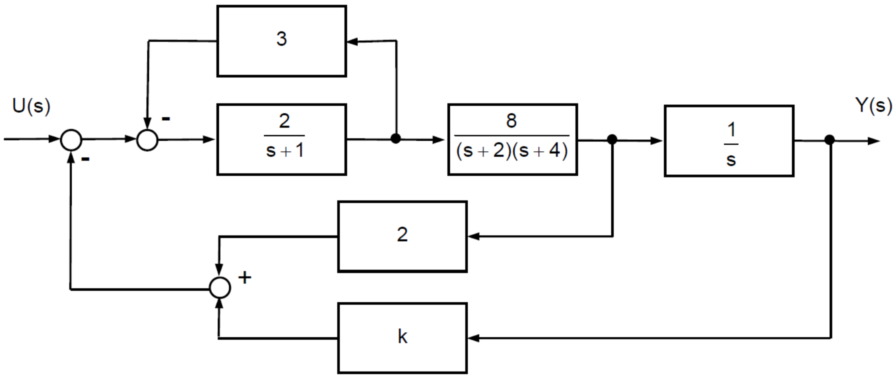
Für Stabilität muss die Determinante von H_2 positiv sein, somit gilt

$$
\begin{aligned}
60 + 10K_R &> 0 \\
\Leftrightarrow K_R &> -6\,.
\end{aligned}
$$

Da diese Bedingung bereits durch die vorher aufgestellte Bedingung $K_R > -0.12$ erfüllt ist, wird der stabile Bereich von K_R nicht weiter eingeschränkt. Es ist also ein beliebig großes postives K_R wählbar, ohne dabei die Stabilität zu verlieren.

Aufgabe 3. Stabilität

Gegeben ist folgendes Blockschaltbild:



Aufgaben

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G_{yu} = \frac{Y(s)}{U(s)}$ in Abhängigkeit des Parameters k

b) Ermitteln Sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums den Bereich $[k_{min}; k_{max}]$ von k, für den das System asymptotisch stabil ist.

c) Bestimmen Sie den stationären Endwert y_∞ für den Fall $u(t) = 1(t)$ und $k = \frac{k_{max}}{4}$. Was lässt sich für den Fall $k = 2k_{max}$ bezüglich y_∞ aussagen?

Lösung Aufgabe 3.

a) Durch geschicktes Verschieben eines Verzweigungspunktes sowie Zusammenfassen der Rückkopplung im Vorwärtszweig ergibt sich

$$Y(s) = \frac{\frac{2}{s+1}}{1+3\frac{2}{s+1}} \cdot \frac{8}{(s+2)(s+4)} \cdot \frac{1}{s} \cdot [U(s) - 2sY(s) - kY(s)] \; .$$

Durch Umformung ergibt sich dann die gesuchte Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{s} \cdot \frac{8}{(s+2)(s+4)} \cdot \frac{2}{s+1+6} \cdot \frac{1}{s} \cdot [U(s) - (2s+k)Y(s)] \\
\Leftrightarrow s(s+2)(s+4)(s+7)Y(s) &= 16 \cdot [U(s) - (2s+k)Y(s)] \\
\Leftrightarrow [s(s+2)(s+4)(s+7) + 16(2s+k)] \cdot Y(s) &= 16 \cdot Y(s) \\
\Leftrightarrow Y(s) &= \underbrace{\frac{16}{s(s+2)(s+4)(s+7)+16(2s+k)}}_{G(s)} \cdot U(s) \, .
\end{aligned}$$

b) Zur Bestimmung des Bereiches von k, für den das System stabil ist, wird das Nennerpolynom

$N(s)$

$$
\begin{aligned}
N(s) &= s(s+2)(s+4)(s+7) + 16(2s+k) \\
&= \underbrace{1}_{a_4} \cdot s^4 + \underbrace{13}_{a_3} \cdot s^3 + \underbrace{50}_{a_2} \cdot s^2 + \underbrace{88}_{a_1} \cdot s + \underbrace{16k}_{a_0}
\end{aligned}
$$

betrachtet. Nach Hurwitz ist die Übertragungsfunktion dann stabil, wenn alle Koeffizenten von $N(s)$ vorhanden sind und das gleiche Vorzeichen besitzen. Die Koeffizienten $a_4 - a_1$ sind alle vorhanden und positiv. Somit muss für Stabilität

$$
\begin{aligned}
16k &> 0 \\
k &> 0
\end{aligned}
$$

gelten. Zusätzlich müssen noch die Determinanten der drei Hurwitz-Matrizen

$$
\begin{aligned}
H_1 &= a_3 \\
H_2 &= \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} \\
H_2 &= \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

betrachtet werden. Für die Determinante von H_1 gilt $a_3 = 13$, somit ist diese unabhängig von k positiv. Für die Determinante von H_2 ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\det H_2 &= \det \begin{vmatrix} 13 & 88 \\ 1 & 50 \end{vmatrix} \\
&= 13 \cdot 88 - 1 \cdot 88 \\
&= 562\,.
\end{aligned}
$$

Diese Determiante ist auch unabhängig von k positiv, somit ergibt sich auch hieraus keine weitere Bedingungen. Abschließend wird noch die Determinante von H_3 geprüft

$$
\begin{aligned}
\det H_3 &= \det \begin{vmatrix} 13 & 88 & 0 \\ 1 & 50 & 16k \\ 0 & 13 & 88 \end{vmatrix} \\
&= 13 \cdot 50 \cdot 88 - 88^2 - 13^2 \cdot 16k \\
&= 49456 - 2704k\,.
\end{aligned}
$$

Durch diese Determinante ergibt sich eine zusätzliche Bedingung für k, da

$$
\begin{aligned}
& 49456 - 2704k > 0 \\
\Leftrightarrow\ & 49456 > 2704k \\
\Leftrightarrow\ & 18.2899 > k
\end{aligned}
$$

gelten muss. Somit ergibt sich für k der folgende Bereich

$$0 < k < 18.2899\,,$$

in dem die Übertragungsfunktion stabil ist.

c) Es gilt für $u(t) = 1(t)$, es wird also der stationäre Endwert der Sprunganwort betrachtet. Im Laplace-Bereich entspricht der Einheitssprung einem $U(s) = \frac{1}{s}$. Somit gilt für den stationären Endwert

$$\begin{aligned} y_\infty &= \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot Y(s) \\ &= \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot G(s) \cdot \frac{1}{\cancel{s}} \\ &= \lim_{s\to 0} G(s) \end{aligned}$$

Setzt man die Übertragungsfunktion $G(s)$ aus der Aufgabe a) ein ergibt sich

$$\begin{aligned} y_\infty &= \lim_{s\to 0} \frac{16}{s(s+2)(s+4)(s+7)+16(2s+k)} \\ &= \frac{16}{16k} \\ &= \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich der stationäre Endwert für den Fall $k = \frac{4}{k_{\max}}$ zu

$$y_\infty = \frac{4}{k_{\max}} = \frac{4}{18.2899} \approx 0.219\,.$$

Für den Fall $k = 2k_{\max}$ würde sich nach dem ermittelten Ausdruck in Abhängigkeit von k ebenfalls ein stationärer Endwert ergeben. Jedoch ist die Übertragungsfunktion in diesem Fall instabil, somit existiert in diesem Fall auch kein stationärer Endwert, da der Zusammenhang zwischen stationärem Endwert im Zeit und Laplace-Bereich nur für stabile Systeme gilt.