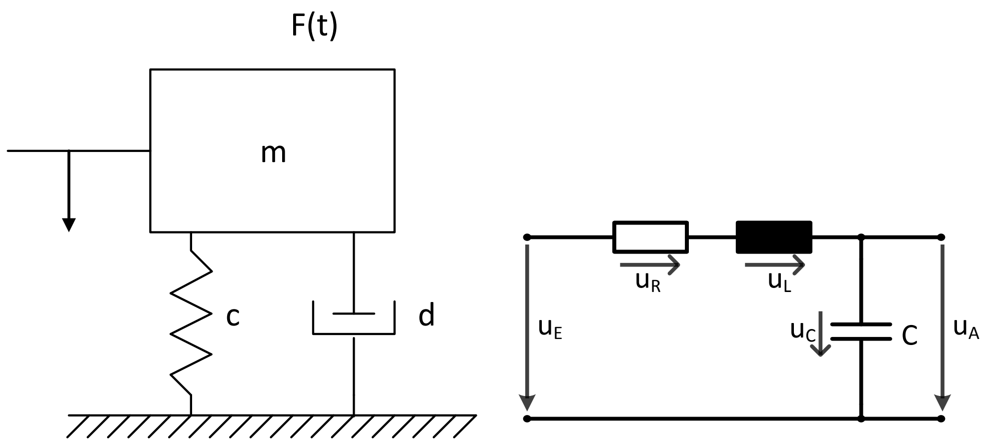
F. Goßmann M.Sc
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Steuer- und Regelungstechnik, WT 2019

Übung 5 - Lösung

Thema: Übertragungsfunktion, Blockschaltbild-Algebra

Aufgabe 1. Übertragungsfunktion linearer Systeme
Gegeben sind die beiden linearen Systeme aus der 2.) Übung,



(a) Feder-Masse-Dämpfer System

(b) Elektrisches Netzwerk

mit den Differentialgleichungen

a) $m \cdot \ddot{x}(t) + d \cdot \dot{x}(t) + c \cdot x(t) = F(t)$

b) $L \cdot C \cdot \ddot{u}_A(t) + R \cdot C \cdot \dot{u}_A(t) + u_A(t) = u_E(t)$

Aufgabe Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der beiden Systeme im eingeschwungenen Zustand.

Lösung Aufgabe 1.
Es ist nur die Übertragungsfunktion, als der Zusammenhang zwischen dem Eingangs- und Ausgangssignal gesucht. Um dies zu ermitteln kann von einer Differentialgleichung immer der eingeschwungene Zustand betrachtet werden, sprich die Anfangswerte aller zeitlichen Ableitungen

$$\dot{x}_0 = \dot{x}_0 = \cdots = x_0^{(n)} = 0$$

sowie der Anfangswert von x_0 sind allesamt gleich null.

Für System a) bedeutet das bei der Anwendung des Laplacschen Differentiationssatzes

- $\ddot{x}(t)$: $s^2 \cdot X(s) - s \cdot \underbrace{x_0}_{=0} - \underbrace{\dot{x}_0}_{=0} = s^2 \cdot X(s)$
- $\dot{x}(t)$: $s \cdot X(s) - \underbrace{x_0}_{=0} = s \cdot X(s)$
- $x(t)$: $X(s)$
- $F(t)$: $F(s)$

Eingesetzt in die Differentialgleichung von System a) und aufgelöst nach X(s) ergibt sich

$$\begin{aligned} m \cdot s^2 X(s) + d \cdot sX(s) + c \cdot X(s) &= F(s) \\ \Leftrightarrow X(s) &= \underbrace{\frac{1}{m \cdot s^2 + d \cdot s + c}}_{G(s)} \cdot F(s)\,. \end{aligned}$$

Gleiches lässt sich ebenso bei System b) durchführen

- $\ddot{u}_A(t)$: $s^2 \cdot U_A(s) - s \cdot \underbrace{u_{A,0}}_{=0} - \underbrace{\dot{u}_{A,0}}_{=0} = s^2 \cdot U_A(s)$
- $\dot{u}_A(t)$: $s \cdot U_A(s) - \underbrace{u_{A,0}}_{=0} = s \cdot U_A(s)$
- $u_A(t)$: $U_A(s)$
- $u_E(t)$: $U_E(s)$

Analog wie bei System a) ergibt einsetzen in die zugehörige Differentialgleichung und auflösen nach $U_E(s)$

$$\begin{aligned} LC \cdot s^2 U_A(s) + RC \cdot sU_A(s) + U_A(s) &= U_E(s) \\ \Leftrightarrow U_A(s) &= \underbrace{\frac{1}{LC \cdot s^2 + RC \cdot s + 1}}_{G(s)} \cdot U_E(s)\,. \end{aligned}$$

Beim Vergleich der beiden erhaltenen Übertragungsfunktionen wird die in Übung 3. angesprochene Analogie zwischen den beiden Systemen wieder deutlich. Es handelt sich in beiden Fällen um das gleiche Übertragungsverhalten, welches sich nur in den Koeffizenten der Übertragungsfunktion unterscheidet. Sind die jeweiligen Koeffizienten in den Übertragungsfunktionen gleich groß, besitzen beide Systeme somit ein identisches Übertragungsverhalten.

Aufgabe 2. Lineare Übertragungsglieder
Gegeben sind die folgenden Differentialgleichungen:

$$T_1 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot u(t)$$
$$\ddot{y}(t) + 2D\omega_0 \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) = K \cdot u(t)$$
$$T_1 \cdot \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = K \cdot u(t)$$
$$T_1 \cdot \ddot{y}(t) + T_2 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K\,(u(t) + T_D \cdot \dot{u}(t))$$

Aufgabe Stellen Sie die Übertragungsfunktionen der vier Differentialgleichungen im eingeschwungenen Zustand mit Hilfe der Laplace-Transformation auf. Klassifizieren Sie anschließend deren Übertragungsverhalten.

Lösung Aufgabe 2.

(i) Die Differentialgleichung $T_1 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot u(t)$ führt zu

$$\begin{aligned} & T_1 \cdot s \cdot Y(s) + Y(s) = K \cdot U(s) \\ \Leftrightarrow\, & Y(s) \cdot [T_1 \cdot s + 1] = K \cdot U(s) \\ \Leftrightarrow\, & Y(s) = \underbrace{\frac{1}{T_1 \cdot s + 1}}_{G(s)} \cdot U(s)\,. \end{aligned}$$

Dieses Übertragungsverhalten wird auch als PT_1-Verhalten bezeichnet. Die Übertragungsfunktion besitzt genau eine Polstelle bei $s = -1/T_1$.

(ii) Die Differentialgleichung $\ddot{y}(t) + 2D\omega_0 \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) = K \cdot u(t))$ führt zu

$$\begin{aligned} & s^2 \cdot Y(s) + 2D\omega_0 \cdot s \cdot Y(s) + \omega_0^2 \cdot Y(s) = K \cdot U(s) \\ \Leftrightarrow\, & Y(s) = \underbrace{\frac{K}{s^2 + 2D\omega_0 \cdot s + \omega_0^2}}_{G(s)} \cdot U(s)\,. \end{aligned}$$

Dieses Übertragungsverhalten wurde bereits in Übung 3. vorgestellt und wird als PT_2-Verhalten bezeichnet, in diesem Fall die schwingungsfähige Variante (zwei komplexe Polstellen – komplexes Polstellenpaar).

(iii) Die Differentialgleichung $T_1 \cdot \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = K \cdot u(t)$ führt zu

$$\begin{aligned} & T_1 \cdot s^2 \cdot Y(s) + s \cdot Y(s) = K \cdot U(s) \\ \Leftrightarrow\, & Y(s) = \underbrace{\frac{K}{s(1 + T_1 \cdot s)}}_{G(s)} \cdot U(s) \\ \Leftrightarrow\, & Y(s) = \underbrace{\frac{1}{s} \cdot \frac{K}{1 + T_1 \cdot s}}_{G(s)} \cdot U(s)\,. \end{aligned}$$

Dieses Übertragungsverhalten besteht aus einer Reihenschaltung eines Integrators (I) und eines PT_1-Verhaltens. Diese Kombination wird auch IT_1-Verhalten bezeichnet. Neben der Polstelle des PT_1 besitzt dieses System zusätzlich noch eine Polstelle im Ursprung ($s = 0$).

(iv) Die Differentialgleichung $T_1 \cdot \ddot{y}(t) + T_2 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K\,(u(t) + T_D \cdot \dot{u}(t))$ führt zu

$$
\begin{aligned}
&T_1 \cdot s^2 \cdot Y(s) + T_2 \cdot s \cdot Y(s) + Y(s) = K\,(U(s) + T_D \cdot s \cdot U(s)) \\
\Leftrightarrow\, &Y(s)\left[T_1 \cdot s^2 + T_2 \cdot s + 1\right] = U(s) \cdot K\,[1 + T_D \cdot s] \\
\Leftrightarrow\, &Y(s) = \underbrace{\frac{K\,[1 + T_D \cdot s]}{T_1 \cdot s^2 + T_2 \cdot s + 1}}_{G(s)} \cdot U(s) = K\,(1 + T_D \cdot s) \cdot \frac{1}{T_1 \cdot s^2 + T_2 \cdot s + 1} \cdot U(s)\,.
\end{aligned}
$$

Bei diesem System liegt ein PT_2-Verhalten (Nenner) in Kombination (Reihenschaltung) mit einem PD-Verhalten (Zähler) vor. Das PD-Verhalten beschreibt ein differenzierendes Verhalten (D) zusammen mit einer statischen Verstärkung (P). Es wird auch PDT_2-Verhalten genannt. Neben den beiden Nullstellen des PT_2 besitzt dieses System zusätzlich noch eine Nullstelle.

Aufgabe 3. Zusammenfassen von Blockschaltbildern

Gegeben ist das folgende System in Blockschaltbild-Form

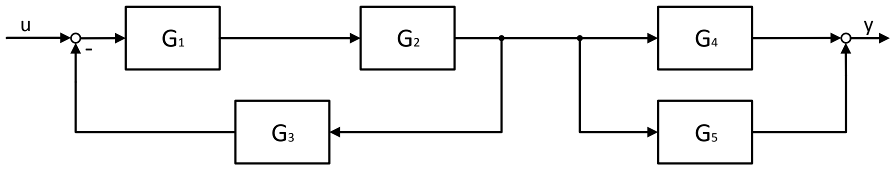


Abbildung 1: Blockschaltbild

mit den allgemeinen Übertragungsfunktionen $G_1(s) - G_5(s)$.

Aufgabe Fassen Sie das oben aufgeführte System zu einer Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ zusammen. Verwenden Sie hierzu die Gesetze zum Zusammenfassen von Reihen- und Parallelschaltungen sowie Rückkopplungen.

Lösung Aufgabe 3.

Das Problem soll mit der Anwendung der eingeführten Regeln zum Zusammenfassen von Reihen- und Parallelschaltungen gelöst werden. Im System befindet sich, wie in Abb. 2 dargestellt, jeweils eine Reihen- und eine Parallelschaltung.

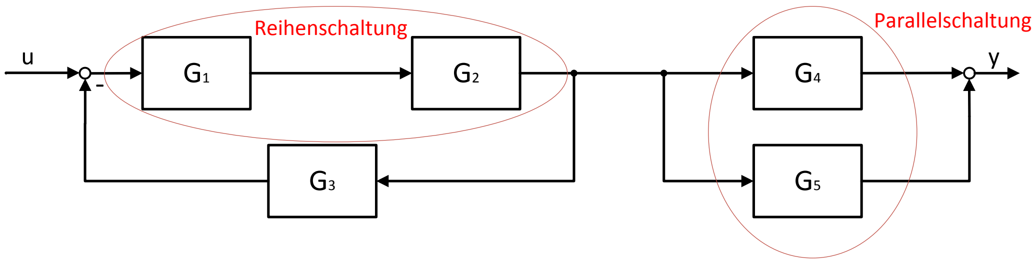


Abbildung 2: Zusammenfassung des Blockschaltbilds

Damit ergibt sich das in Abb. 3 dargestellte, neue Blockschaltbild.

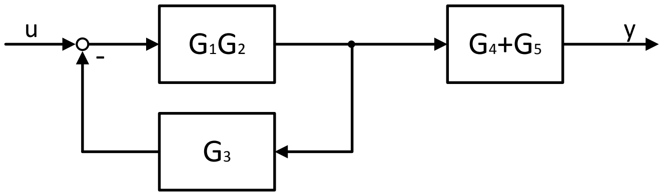


Abbildung 3: Zusammenfassung der Reihen- und Parallelschaltungen

Die Rückkopplung lässt sich nun noch mit der entsprechenden Gesetzmäßigkeit wie folgt zusammenfassen

$$G_R(s) = \frac{G_1(s) \cdot G_2(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s)} \,,$$

wodurch sich eine weitere Reihenschaltung aus $G_R(s)$ und der vorher zusammengefassten Parallelschaltung $G_4(s) + G_5(s)$ ergibt, wie in Abb. 4 dargestellt ist.

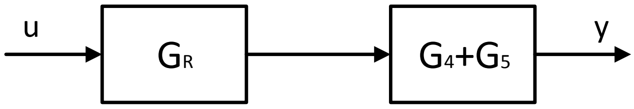
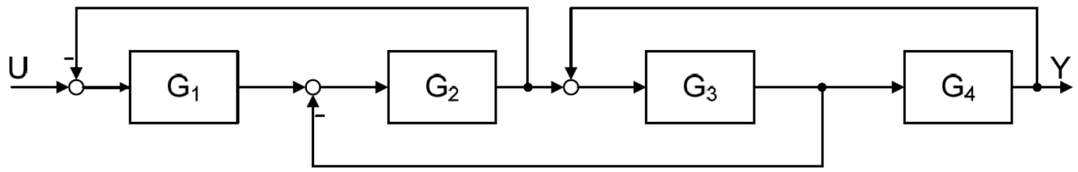


Abbildung 4: Finale Reihenschaltung

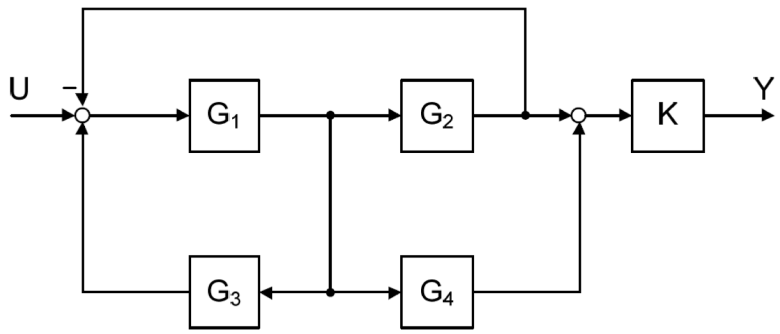
Daraus resultiert schlussendlich die gewünschte Zusammenfassung des Blockschaltbildes $G(s)$ zu

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot (G_4 + G_5)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s)} \,.$$

Aufgabe 4. Zusammenfassen von Blockschaltbildern
Gegeben sind die beiden folgenden Blockschaltbilder



(a) Blockschaltbild 1



(b) Blockschaltbild 2

mit den allgemeinen Übertragungsfunktionen $G_1(s) - G_1(s)$ sowie $K(s)$.

Aufgabe Fassen Sie beide angegebenen Blockschaltbilder zu einer Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ zusammen.

Lösung Aufgabe 4.
Zunächst wird die Lösung durch geeignetes Umformen des Blockschaltbildes gezeigt. Im ersten Schritt wird der Summationspunkt zwischen den Blöcken G_1 und G_2 nach vorne vor den Block G_1 gezogen und der Verzweigungspunkt zwischen den Blöcken G_3 und G_4 hinter den Block G_4 gezogen. Dies resultiert dann in dem in Abb. 5 dargestellten Blockschaltbild.

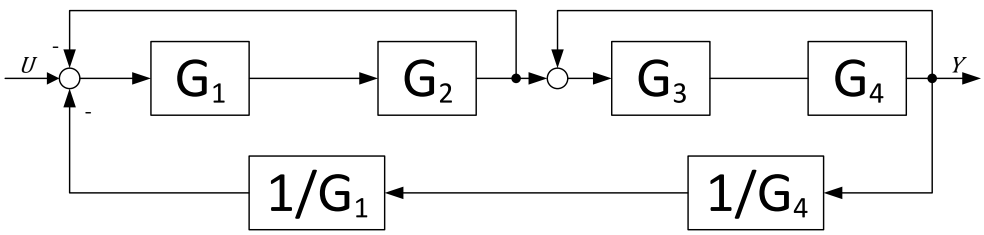


Abbildung 5: Umformen des Blockschaltbildes – Schritt 1

Nun können die beiden oberen Rückkopplungen zusammengefasst werden, sodass sich das in Abb. 6 dargestellte Blockschaltbild ergibt.

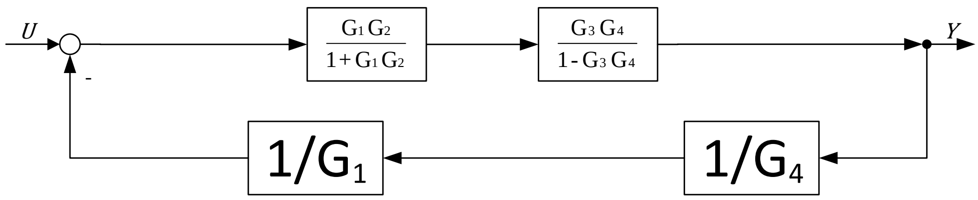


Abbildung 6: Umformen des Blockschaltbildes – Schritt 2

Das resultierende Blockschaltbild in Abb. 6 besteht nun nur noch aus einer einfachen negativen Rückkopplung und kann mit

$$G = \frac{G_v}{1 + G_0}$$

zusammengefasst werden, wobei für $G_0 = G_v \cdot G_r$ gilt. Die beiden Übertragungsfunktionen G_v und G_r ergeben sich zu

$$\begin{aligned} G_r &= \frac{1}{G_1 G_4}\,, \\ G_v &= \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2} \cdot \frac{G_3 G_4}{1 - G_3 G_4} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{(1 + G_1 G_2)(1 - G_3 G_4)}\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt für G_0

$$G_0 = G_v \cdot G_r = \frac{G_2 G_3}{(1 + G_1 G_2)(1 - G_3 G_4)}$$

Damit lässt sich nun der Nenner der Gesamtübertragungsfunktion zu

$$\begin{aligned} 1 + G_0 &= 1 + \frac{G_2 G_3}{(1 + G_1 G_2)(1 - G_3 G_4)} \\ &= \frac{(1 + G_1 G_2)(1 - G_3 G_4) + G_2 G_3}{(1 + G_1 G_2)(1 - G_3 G_4)} \end{aligned}$$

bestimmen. Die Übertragungsfunktion ergibt sich dann schlussendlich zu

$$\begin{aligned} G &= \frac{G_v}{1 + G_0} \\ &= \frac{\cancel{(1 + G_1 G_2)}\cancel{(1 - G_3 G_4)}}{(1 + G_1 G_2)(1 - G_3 G_4) + G_2 G_3} \cdot \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{\cancel{(1 + G_1 G_2)}\cancel{(1 - G_3 G_4)}} \\ &= \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{(1 + G_1 G_2)(1 - G_3 G_4) + G_2 G_3} \end{aligned}$$

Als zweites wird die algebraische Zusammenfassung des Blockschaltbildes mit Hilfssignalen gezeigt. Hierzu werden die in Abb. 7 definierten Hilfssignale A, B und C aufgestellt.

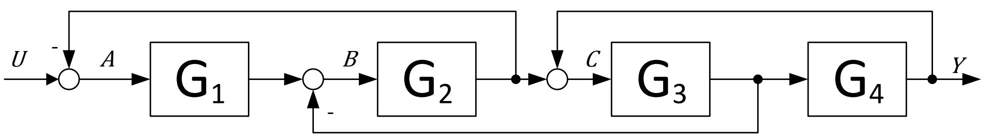


Abbildung 7: Definition der Hilfssignale

Daraus resultieren die folgenden Gleichungen

$$Y = G_4 G_3 C\,, \tag{1}$$
$$C = Y + G_2 B\,, \tag{2}$$
$$B = -G_3 C + G_1 A\,, \tag{3}$$
$$A = -G_2 B + U\,. \tag{4}$$

Gleichung (4) in (3) eingesetzt und aufgelöst nach B ergibt

$$B = -\frac{G_3}{1+G_1G_2} \cdot C + \frac{G_1}{1+G_1G_2} \cdot U\,. \tag{5}$$

Gleichung (5) in (2) eingesetzt und aufgelöst nach C ergibt

$$C = \frac{1+G_1G_2}{1+G_1G_2+G_2G_3} \cdot Y + \frac{G_1G_2}{1+G_1G_2+G_2G_3} \cdot U\,. \tag{6}$$

Schlussendlich (6) in (1) eingesetzt und nach Y aufgelöst führt auf die gesuchte Übertragungsfunktion

$$G = \frac{G_1G_2G_3G_4}{(1+G_1G_2)(1-G_3G_4)+G_2G_3}\,.$$

Das zweite Blockschaltbild lässt sich ebenfalls durch Umstellen lösen. Im ersten Schritt wird das System in die Form umgestellt, die in Abbildung 8 dargestellt ist.

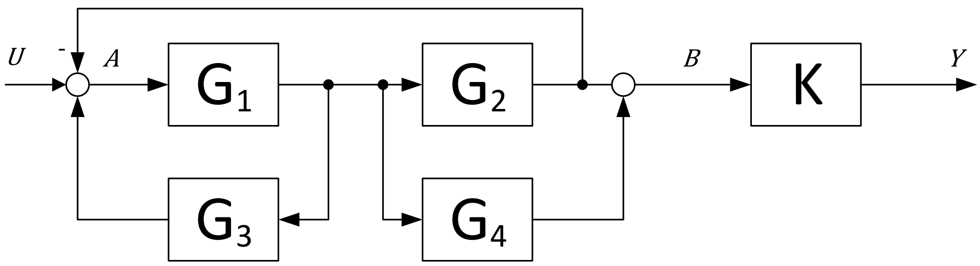


Abbildung 8: Umformen Schritt 1

In einem zweiten Schritt ergibt sich dann daraus die Form in Abbildung 8.

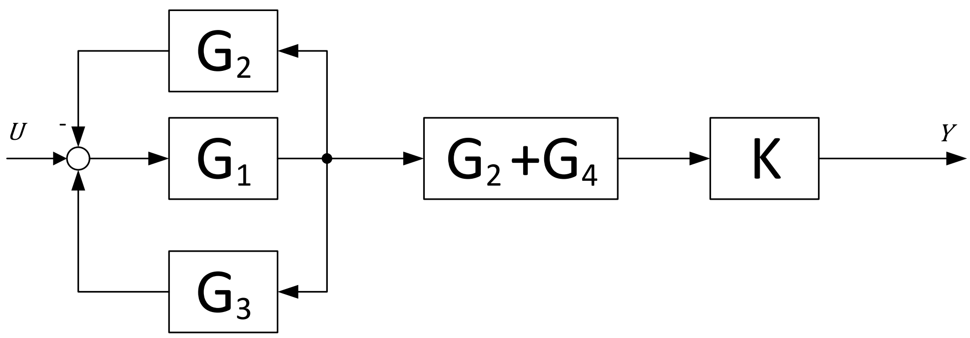


Abbildung 9: Umformen Schritt 2

Diese lässt sich dann schlussendlich zur in Abbildung 10 gezeigten Form zusammenfassen.

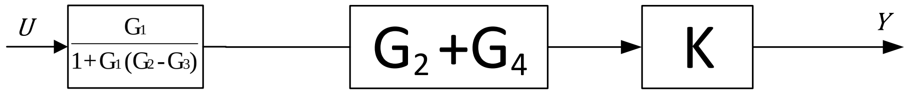


Abbildung 10: Umformen Schritt 3

Das in Abbildung 10 dargestellte Blockschaltbild besteht nur noch aus einer Reihenschaltung von drei Übertragungsblöcken und kann einfach zu

$$G = \frac{KG_1(G_2 + G_4)}{1 + G_1(G_2 - G_3)}$$

zusammengefasst werden.

Mit den in Abbildung 8 gekennzeichten Hilfssignalen lässt sich das System ebenso algebraisch zusammenfassen. Damit folgt

$$Y = KB\,, \tag{7}$$

$$B = G_1(G_2 + G_4)A\,, \tag{8}$$

$$A = G_1(-G_2 + G_3)A + U\,. \tag{9}$$

Zunächst wird (9) nach A aufgelöst

$$A = \frac{1}{1 + G_1(G_2 - G_3)}\,U\,, \tag{10}$$

und anschließend (8) und (10) in (7) eingesetzt, sodass sich

$$Y = \frac{KG_1(G_2 + G_4)}{1 + G_1(G_2 - G_3)}\,U$$

ergibt. Daraus folgt unmittelbar die gesuchte Übertragungsfunktion zu

$$G = \frac{Y}{U} = \frac{KG_1(G_2 + G_4)}{1 + G_1(G_2 - G_3)}\,.$$