F. Goßmann M.Sc
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Steuer- und Regelungstechnik, WT 2019

Übung 4 - Lösung

Thema: Laplace-Transformation

Aufgabe 1. Tankbehälter
Gegeben ist der in Abb. 1 dargestellte Tankbehälter aus Übung 3.) In der vorherigen Übung

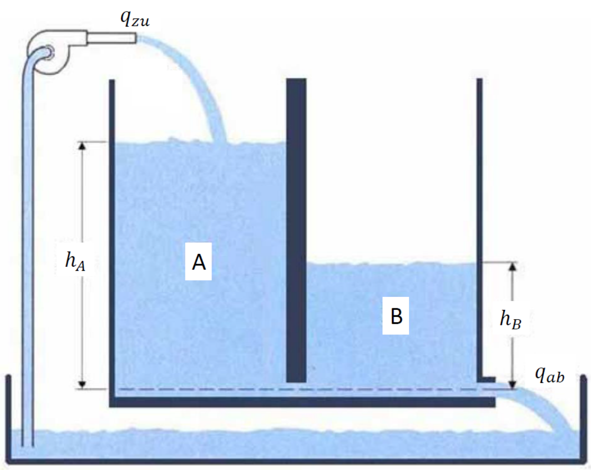

Abbildung 1: Zwei-Tank System

3 wurden die folgenden linearisierten Differentialgleichungen in der Ruhelage des Systems bei einem konstanten Zufluss $q_{zu,0} \geq 0$ bestimmt. Die Δ in der linearisierten Differentialgleichung wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen

$$\dot{h}_A = k_q \cdot q_{zu} + k_{A,1} \cdot h_A + k_{B,1} \cdot h_B$$
$$\dot{h}_B = k_{A,2} \cdot h_A + k_{B,2} \cdot h_B$$

Aufgaben

a) Geben Sie eine Differentialgleichung an, die den Füllstand h_B in Abhängigkeit vom Zufluss q_{zu} beschreibt.

b) Transformieren Sie beide gegebenen Differentialgleichungen in den Laplace-Bereich. Geben Sie einen Ausdruck für den Füllstand $H_B(s)$ in Abhängigkeit des Zuflusses an.

Hinweis Im folgenden gilt:

$$k_{A,1} = k_{B,1} = -2, k_{A,2} = k_{B,2} = 1, h_{A,0} = 2, h_{B,0} = 1$$

Aufgaben

c) Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf des Füllstandes $h_B(t)$ der aus den gegebenen Anfangswerten für $h_{A,0}$ und $h_{B,0}$ resultiert. Es wird angenommen, dass keine zusätzliche Flüssigkeit in den Tank A fließt ($q_{zu} = 0$).

Lösung Aufgabe 1.

a) Es gilt die beiden Differentialgleichungen zu kombinieren, sodass die direkte Wirkung des Eingangs auf den Füllstand des Tanks B beschrieben wird.

Anmerkung Es werden die linearisierten Differentialgleichungen des Problems betrachtet, sprich es wird ein System mit einem konstanten Zufluss und Abfluss betrachtet, welches eingeschwungen ist (keine Dynamik mehr vorhanden). Die betrachteten Gleichungen beschreiben nur die Abweichungen von diesem eingeschwungenen Zustand!

Für den Füllstand des Tanks B gilt laut Aufgabenstellung

$$\dot{h}_B = k_{A,2} \cdot h_A + k_{B,2} \cdot h_B$$

Einmal differenzieren führt zu

$$\ddot{h}_B = k_{A,2} \cdot \dot{h}_A + k_{B,2} \cdot \dot{h}_B$$

Ersetzen von $\dot{h}_A$ mit der Differentialgleichung des Tanks A

$$\ddot{h}_B = k_{A,2}k_q \cdot q_{zu} + k_{A,2}k_{A,1} \cdot h_A + k_{A,2}k_{B,1} \cdot h_B + k_{B,2} \cdot \dot{h}_B$$

Nun muss noch der h_A Term ersetzt werden. Umformen der Differentialgleichung des Tanks B ergibt

$$h_A = \frac{1}{k_{A,2}} \cdot \dot{h}_B - \frac{k_{B,2}}{k_{A,2}} \cdot h_B$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung von $\ddot{h}_B$ ergibt

$$\ddot{h}_B = (k_{A,1} + k_{B,2}) \cdot \dot{h}_B + (k_{A,2}k_{B,1} - k_{A,1}k_{B,2}) \cdot h_B + k_{A,2}k_q \cdot q_{zu}$$

b) Zunächst gilt es alle zeitlich veränderlichen Größen in den beiden Differentialgleichung in den Laplace-Bereich (Bildbereich) zu überführen. Mit Hilfe des Laplacschen Differentiationssatzes ergibt sich

- $\dot{h}_A(t)$: $s \cdot H_A(s) - h_{A,0}$
- $\dot{h}_B(t)$: $s \cdot H_B(s) - h_{B,0}$
- $h_A(t)$: $H_A(s)$
- $h_B(t)$: $H_B(s)$
- $q_{zu}(t)$: $Q_{zu}(s)$

Diese Terme werden in die beiden Differentialgleichungen eingesetzt

$$s \cdot H_A(s) - h_{A,0} = k_q \cdot Q_{zu}(s) + k_{A,1} \cdot H_A(s) + k_{B,1} \cdot H_B(s)\,, \tag{1}$$
$$s \cdot H_B(s) - h_{B,0} = k_{A,2} \cdot H_A(s) + k_{B,2} \cdot H_B(s)\,, \tag{2}$$

womit sich die beiden Laplace-Transformierten der betrachteten Differentialgleichungen ergeben. Um einen Ausdruck für den Füllstand $H_B(s)$ in Abhängigkeit von $Q_{zu}(s)$ zu erhalten. Hierzu wird zunächst (1) nach $H_A(s)$ aufgelöst

$$\begin{aligned} H_A(s)(s - k_{A,1}) &= k_q \cdot Q_{zu}(s) + k_{B,1} \cdot H_B(s) + h_{A,0} \\ \Leftrightarrow H_A(s) &= \frac{k_q}{s - k_{A,1}} \cdot Q_{zu}(s) + \frac{k_{B,1}}{s - k_{A,1}} \cdot H_B(s) + \frac{h_{A,0}}{s - k_{A,1}}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Gleichermaßen wird (2) nach $H_B(s)$ aufgelöst

$$H_B(s)(s - k_{B,2}) = k_{A,2} \cdot H_A(s) + h_{B,0}\,. \tag{4}$$

Nun wird (3) in (4) eingesetzt

$$\begin{aligned} H_B(s)(s - k_{B,2}) &= \frac{k_q k_{A,2}}{s - k_{A,1}} \cdot Q_{zu}(s) + \frac{k_{B,1} k_{A,2}}{s - k_{A,1}} \cdot H_B(s) + \frac{h_{A,0} k_{A,2}}{s - k_{A,1}} + h_{B,0} \\ \Leftrightarrow H_B(s)\left[(s - k_{B,2}) - \frac{k_{B,1} k_{A,2}}{s - k_{A,1}}\right] &= \frac{k_q k_{A,2}}{s - k_{A,1}} \cdot Q_{zu}(s) + \frac{h_{A,0} k_{A,2} + h_{B,0}(s - k_{A,1})}{s - k_{A,1}} \end{aligned}$$

Weiter auflösen führt dann auf

$$H_B(s)\left[\frac{(s - k_{B,2})(s - k_{A,1}) - k_{B,1} k_{A,2}}{s - k_{A,1}}\right] = \frac{k_q k_{A,2}}{s - k_{A,1}} \cdot Q_{zu}(s) + \frac{h_{A,0} k_{A,2} + h_{B,0}(s - k_{A,1})}{s - k_{A,1}}$$

$$H_B(s) = \frac{k_q k_{A,2}(s - k_{A,1})}{(s - k_{A,1})\left[(s - k_{B,2})(s - k_{A,1}) - k_{B,1} k_{A,2}\right]} \cdot Q_{zu}(s) + \frac{(s - k_{A,1})\left[h_{A,0} k_{A,2} + h_{B,0}(s - k_{A,1})\right]}{(s - k_{A,1})\left[(s - k_{B,2})(s - k_{A,1}) - k_{B,1} k_{A,2}\right]}$$

$$H_B(s) = \frac{k_q k_{A,2}}{(s - k_{B,2})(s - k_{A,1}) - k_{B,1} k_{A,2}} \cdot Q_{zu}(s) + \frac{h_{A,0} k_{A,2} + h_{B,0}(s - k_{A,1})}{(s - k_{B,2})(s - k_{A,1}) - k_{B,1} k_{A,2}} \tag{5}$$

Der Term (5) stellt dann nicht nur den Term dar der den Füllstand $H_B(s)$ beschreibt, sondern gleichzeitg auch die Lösung der Differentialgleichung im Laplace-Bereich.

c) Der in b) erhaltene Ausdruck für $H_B(s)$ in (5) soll nun in den Zeitbereich zurück transformiert werden. Es ist also die Lösung der Differentialgleichung im Zeitbereich gesucht. Es gilt laut Aufgabenstellung, dass keine weitere Flüssigkeit in den Tank A fließt. Somit gilt $Q_{zu}(s) = 0$ und (5) vereinfacht sich zu

$$H_B(s) = \frac{h_{A,0}k_{A,2} + h_{B,0}(s - k_{A,1})}{(s - k_{B,2})(s - k_{A,1}) - k_{B,1}k_{A,2}}\,. \tag{6}$$

Setzt man in (6) die Angaben aus der Aufgabenstellung ein ergibt sich

$$\begin{aligned} H_B(s) &= \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot (s - (-2))}{(s-1)\,(s-(-2)) - (-2) \cdot 1} \\ &= \frac{2 + s + 2}{(s-1)(s+2) + 2} \\ &= \frac{s+4}{s^2 + 2s - s - 2 + 2} \\ &= \frac{s+4}{s^2 + s} \\ &= \frac{s+4}{s(s+1)}\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Der in (7) erhaltene Term stellt damit die homogene Lösung der Differentialgleichung im Laplace-Bereich dar. Da dieser Term der Korrespondenz Nr. 11 in der Laplace Korrespondez-Tabelle entspricht, kann der zeitliche Verlauf des Füllstandes $h_B(t)$ in diesem Fall direkt aufgeschrieben werden

$$H_B(s) = \frac{s+4}{s(s+1)} \qquad \rightarrow h_B(t) = \frac{4}{1} - \frac{1-4}{1} \cdot \mathrm{e}^{-1 \cdot t} = 4 - 3 \cdot \mathrm{e}^{-t}$$

Aufgabe 2. Elektrischer Hubmagnet

Gegeben sei das System des elektrischen Hubmagneten aus Übung 2.) Es gelten die gleichen

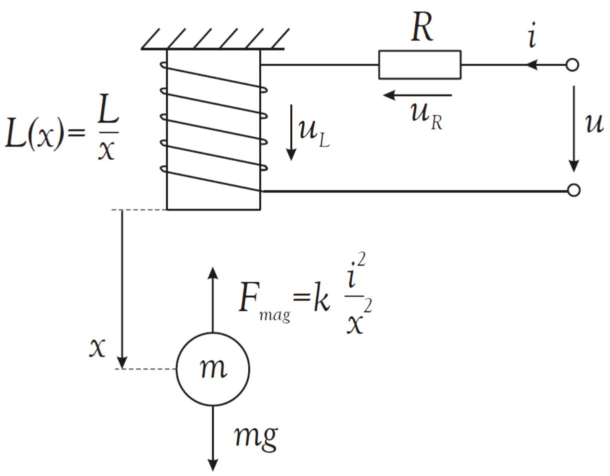

Abbildung 2: Elektischer Hubmagnet

Angaben wie in Übung 2.). Außerdem sind aus der Aufgabe die folgenden linearisierten Differentialgleichungen in einer Ruhelage mit der konstanten Spannung $u_0 \geq 0$ bekannt:

$$\frac{\partial i}{\partial t} = k_{i,1} \cdot i + k_u \cdot u$$
$$\ddot{x} = k_x \cdot x - k_{i,2} \cdot i$$

Hinweis Die Δ wurden in der Gleichung aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen

Aufgaben

a) Transformieren Sie die beiden Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation in den Bildbereich

b) Geben Sie die vollständige Laplace-Transformierte des Systems mit dem Eingang $U(s)$ und dem Ausgang $X(s)$ an

Lösung Aufgabe 2.

a) Beide Differentialgleichungen sollen mit Hilfe der Laplace-Transformation in den Bildbereich überführt werden. Zunächst wird das elektrische Teilsystem betrachtet. Mit Hilfe des Laplacschen Differentiationssatzes ergibt sich für diese Differentialgleichung

- $\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$: $s \cdot I(s) - i_0$
- $i(t)$: $I(s)$
- $u(t)$: $U(s)$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt

$$s \cdot I(s) - i_0 = k_{i,1} \cdot I(s) + k_u \cdot U(s)\,.$$

Nach I(s) auflösen führt dann zur gewünschten Laplace-Transformierten der Differentialgleichung

$$I(s)(s - k_{i,1}) = k_u \cdot U(s) + i_0$$
$$\Leftrightarrow I(s) = \frac{k_u}{s - k_{i,1}} \cdot U(s) + \frac{i_0}{s - k_{i,1}}\,.$$

Gleiches gilt es für die Differentialgleichung des mechanischen Teilsystems durchzuführen. Mit Hilfe des Laplacschen Differentiationssatzes ergibt sich hier

- $\ddot{x}(t)t$: $s^2 \cdot X(s) - s \cdot x_0 - \dot{x}_0$
- $x(t)$: $X(s)$
- $i(t)$: $I(s)$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$s^2 \cdot X(s) - s \cdot x_0 - \dot{x}_0 = k_x \cdot X(s) - k_{i,2} \cdot I(s)\,.$$

Anschließend gilt es, die Gleichung ebenfalls nach $X(s)$ umzustellen

$$\begin{aligned} X(s)(s^2 - k_x) &= s \cdot x_0 + \dot{x}_0 - k_{i,2} \cdot I(s) \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{s \cdot x_0 + \dot{x}_0}{s^2 - k_x} - \frac{k_{i,2}}{s^2 - k_x} \cdot I(s) \,. \end{aligned}$$

b) Da durch die Laplace-Transformation beide Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen überführt werden konnten, kann die vollständige Laplace-Transformierte des Systems durch simples in einander einsetzen bestimmt werden.

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s \cdot x_0 + \dot{x}_0}{s^2 - k_x} - \frac{k_{i,2}}{s^2 - k_x} \cdot \left(\underbrace{\frac{k_u}{s - k_{i,1}} \cdot U(s) + \frac{i_0}{s - k_{i,1}}}_{I(s)} \right) \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{s \cdot x_0 + \dot{x}_0}{s^2 - k_x} - \frac{k_{i,2} i_0}{(s^2 - k_x)(s - k_{i,1})} - \frac{k_{i,2} k_u}{(s^2 - k_x)(s - k_{i,1})} \cdot U(s) \\ \Leftrightarrow X(s) &= \underbrace{\frac{(s \cdot x_0 + \dot{x}_0)(s - k_{i,1}) - k_{i,2} i_0}{(s^2 - k_x)(s - k_{i,1})}}_{\text{Eigenverhalten infolge Anfangswerte}} + \underbrace{\frac{-k_{i,2} k_u}{(s^2 - k_x)(s - k_{i,1})}}_{\text{Übertragungsfunktion}} \cdot U(s) \,. \end{aligned}$$

Die vollständige Laplace-Transformierte setzt sich aus zwei Komponenten zusammen. Zum einen einem vom Eingangssignal unabhängigen Teil, welcher nur von den Anfangswerten des Systems abhängt. Dieser entspricht gewissermaßen der homogenen Lösung im Zeitbereich. Der zweite Teil ist die sogenannte Übertragungsfunktion (wird in der Regel mit G(s) bezeichnet) und beschreibt den Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangssignal. Er entspricht der partikulären Lösung im Zeitbereich. Die vollständige Laplace-Transformierte entspricht also der vollständigen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung im Bildbereich.

Aufgabe 3. Anwendung der Laplace-Transformation
Gegeben ist die folgende Differentialgleichung

$$\dddot{y}(t) + 6 \cdot \ddot{y}(t) + 11 \cdot \dot{y}(t) + 6 \cdot y(t) = 2 \cdot u(t)\,,$$

mit den Anfangswerten

$$\begin{aligned} y(t=0) &= y_0\,, \\ \dot{y}(t=0) &= \dot{y}_0\,, \\ \ddot{y}(t=0) &= \ddot{y}_0\,. \end{aligned}$$

Aufgaben

a) Berechnen Sie die vollständige Laplace-Transformierte $Y(s)$

b) Teilen Sie die Laplace-Transformierte in die Übertragungsfunktion $G(s)$ und dem Verhalten infolge der Anfangswerte auf

c) Berechnen sie die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Gegeben ist eine Lösung $s_1 = -2$

d) Ermitteln Sie die Eigenbewegungen infolge der Anfangsbedingungen im Zeitbereich für:

$$\ddot{y}_0 = \dot{y}_0 = 0\,;\; y_0 = 1$$

e) Berechnen sie den stationären Anfangs- und Endwert der in d) betrachteten Eigenbewegung

Lösung Aufgabe 3.

a) Anwendung des Laplaceschen Differentiationssatzes ergibt

$$\left(s^3Y(s) - s^2y_0 - s\dot{y}_0 - \ddot{y}_0\right) + 6\left(s^2Y(s) - sy_0 - \dot{y}_0\right) + 11\left(sY(s) - y_0\right) + 6Y(s) = 2U(s)\,.$$

Auflösen nach $Y(s)$ und umformen ergibt

$$\begin{aligned} Y(s)\left(s^3 + 6s^2 + 11s + 6\right) - y_0s^2 - \left(6y_0 + \dot{y}_0\right)s - \left(11y_0 + 6\dot{y}_0 + \ddot{y}_0\right) &= 2U(s) \\ \Leftrightarrow Y(s) &= \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \cdot U(s) + \frac{y_0s^2 + (6y_0 + \dot{y}_0)s + (11y_0 + 6\dot{y}_0 + \ddot{y}_0)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}\,. \end{aligned}$$

b)

$$Y(s) = \underbrace{\frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}}_{\text{Übertragungsfkt } G(s)} \cdot U(s) + \underbrace{\frac{y_0s^2 + (6y_0 + \dot{y}_0)s + (11y_0 + 6\dot{y}_0 + \ddot{y}_0)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}}_{\text{Eigenverhalten infolge Anfangswerte}}\,. \tag{8}$$

c) Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6 \tag{9}$$

entspricht dem Nennerpolynom der beiden Brüche in der vollständigen Laplace-Transformierten in (8). Gesucht sind daher die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = 0\,,$$

wobei eine der Lösungen wurde mit $s_1 = -2$ vorgegeben wurde. Reduktion der kubischen Gleichung auf quadratische Gleichung durch Anwendung der Polynomdivision führt zu

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = (s_1 + 2)(s^2 + 4s + 3)\,.$$

Die beiden fehlenden Lösungen erhält man nun durch Lösen mit beispielsweise der pq-Formel

$$\begin{aligned}
& s^2 + 4s + 3 = 0 \\
\Leftrightarrow & s = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{16}{4} - 3} \\
\Leftrightarrow & s = -2 \pm \sqrt{\frac{4}{4}} = -2 \pm 1 \\
\Leftrightarrow & s = -3 \wedge s = -1
\end{aligned}$$

Die Nullstellen des Nennerpolynoms (Polstellen) stellen gleichzeitig die Eigenwerte der Differentialgleichung dar. Das Polynom lässt sich auch nun in der Linearfaktor-Schreibweise darstellen

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = (s_1 + 2)(s_2 + 3)(s_3 + 1)\,.$$

d) Es wird nur der Teil der Laplace-Transformierten betrachtet, welcher von den Anfangswerten abhängig ist. Da nur die Bewegungen infolge dieser ermittelt werden sollen, wird $U(s)$ gleich null gesetzt. Daher ergibt sich in diesem Fall für die Laplace-Transformierte nach Aufgabenstellung

$$Y(s) = \frac{s^2 + (6+0)s + (11+0+0)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{s^2 + 6s + 11}{(s+1)(s+2)(s+3)} \tag{10}$$

Da für den in (10) entstandenen Fall keine Entsprechung in der Korrespondenz-Tafel vorhanden ist, muss der Term für die Rücktransformation mittels Partialbruchzerlegung in bekannte Terme zerlegt werden. Aufgrund der drei rellen Polstellen bietet es sich an, den Term in (10) wie folgt zu zerlegen

$$\frac{s^2 + 6s + 11}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \underbrace{\frac{A}{s+1}}_{\text{Nr.3}} + \underbrace{\frac{B}{s+2}}_{\text{Nr.3}} + \underbrace{\frac{C}{s+3}}_{\text{Nr.3}}\,, \tag{11}$$

wobei die drei entstehenden Terme der Korrespondenz Nr. 3

$$F(s) = \frac{1}{s+a} \quad \rightarrow \quad f(t) = \mathrm{e}^{-at}\,,$$

in der Korrespondenz-Tabelle entsprechen. Um die Variablen A, B und C zu bestimmen, wird im Folgenden ein Koeffizientenvergleich durchgeführt. Dafür wird zunächst der rechte Teil von (11) auf den gleichen Nenner gebracht

$$\frac{s^2+6s+11}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A(s^2+5s+6)+B(s^2+4s+3)+C(s^2+3s+2)}{(s+1)(s+2)(s+3)} \,.$$

Dadurch, dass der Nenner in beiden Fällen identisch ist, muss nun nur der Zähler miteinanander verglichen werden

$$s^2+6s+11 = A(s^2+5s+6)+B(s^2+4s+3)+C(s^2+3s+2)\,.$$

Der Koeffizienten-Vergleich zwischen beiden Seiten der Gleichung liefert

$$s^2 : 1 = A+B+C\,, \tag{12}$$
$$s^1 : 6 = 5A+4B+3C\,, \tag{13}$$
$$s^0 : 11 = 6A+3B+2C\,. \tag{14}$$

Aus (12) folgt unmittelbar

$$A = 1-B-C \tag{15}$$

und damit folgt aus (13)

$$\begin{aligned} & 6 = 5(1-B-C)+4B+3C \\ \Leftrightarrow\, & 6 = 5-B-2C \\ \Leftrightarrow\, & B == -1-2C\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Setzt man nun (15) und (16) in (14) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} & 11 = 6(1-B-C)+3(-1-2C)+2C \\ \Leftrightarrow\, & 11 = 6-6B-6C-3-6C+2C \\ \Leftrightarrow\, & 11 = 6+6+12C-6C-3-6C+2C \\ \Leftrightarrow\, & 11 = 9+2C \\ \Leftrightarrow\, & C = 1\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Mit (17) ergibt sich dann aus (15) und (16)

$$\begin{aligned} B &= -3\,, \\ A &= 3\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Laplace-Transformierte

$$\frac{s^2+6s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{3}{s+1} - \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s+3}\,.$$

Diese erhaltenen Summanden lassen sich nun einzeln mit Hilfe von Korrespondenz Nr. 3 in den Zeitbereich zurück transformieren, womit sich die gewünsche Funktion zu

$$y_A(t) = 3\mathrm{e}^{-t} - 3\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-3t}$$

ergibt.

e) Für den Anfangswertsatz gilt

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim s \to \infty s \cdot F(s)\,. \tag{18}$$

Wendet man (18) auf den in d) betrachteten Teil der Laplace-Transformierten an, ergibt sich

$$\begin{aligned}\lim_{s\to\infty} s \cdot \frac{s^2+6s+11}{s^3+6s^2+11s+6} &= \lim_{s\to\infty} \frac{s^3+6s^2+11s}{s^3+6s^2+11s+6} \\ = \lim_{s\to\infty} \frac{s^3}{s^3} \cdot \frac{1+6\cdot {}^1\!/_s + 11 \cdot {}^1\!/_{s^2}}{1+6\cdot {}^1\!/_s/{+}11 \cdot {}^1\!/_{s^2} + 6 \cdot {}^1\!/_{s^3}} &= 1\,.\end{aligned}$$

Des Weiteren gilt für den Endwertsatz

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim s \to 0 s \cdot F(s)\,. \tag{19}$$

Wendet man (19) ebenfalls auf den in d) betrachteten Teil der Laplace-Transformierten an, ergibt sich

$$\lim_{s\to 0} s \cdot \frac{s^2+6s+11}{s^3+6s^2+11s+6} = \lim_{s\to 0} \frac{s^3+6s^2+11s}{s^3+6s^2+11s+6} = 0\,.$$