F. Goßmann M.Sc
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Steuer- und Regelungstechnik, WT 2019

Übung 3 - Lösung

Thema: Modellierung, Linearisierung

Aufgabe 1. Tankbehälter

Gegeben ist der in Abb. 1 dargestellte Tankbehälter. Er besteht aus den beiden baugleichen

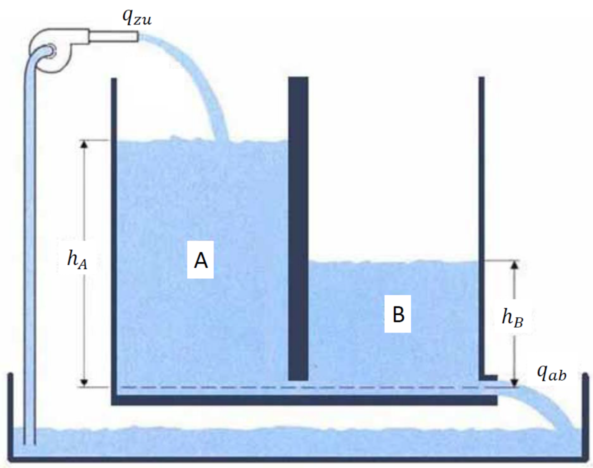


Abbildung 1: Zwei-Tank System

Zylindersäulen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ mit einem konstanten Querschnitt Q. Der Behälter $\boldsymbol{A}$ wird durch den Zufluss q_{zu} gespeist und der Tankinhalt aus Behälter $\boldsymbol{B}$ fließt mit dem Volumenstrom q_{ab} ab. Die beiden zeitabhängigen Füllstände der Wassersäulen werden mit $h_A(t)$ und $h_B(t)$ bezeichnet.

Aufgaben

a) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die die beiden Füllstände der Wassersäulen $h_A(t)$ und $h_B(t)$ beschreiben und linearisieren Sie diese um deren Ruhelage für einen konstanten Zufluss $q_{zu,0} \geq 0$.

b) Stellen Sie das linearisierte System in Form eines Blockschaltbildes dar.

Hinweis Für den Ausfluss gilt $q_{ab} = a \cdot \sqrt{2gh(t)}$ mit der Konstante a und der Gravitation g. Des Weiteren ist der Durchfluss zwischen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ identisch mit dem Abfluss hinter $\boldsymbol{B}$.

Lösung Aufgabe 1.

a) Zunächst gilt es, den Durchfluss zwischen den beiden Behältern A und B zu bestimmen. Aus der Massenerhaltung ergibt sich zunächst:

$$q_{ab,A} = q_{zu,B}$$

Da der Durchfluss identisch mit dem Ausfluss aus Tank B, lässt sich auch der Durchfluss mit der im Hinweis angegebenen Formel beschreiben. Als Füllhöhe ist dabei die Höhendifferenz zwischen den beiden Behältern zu berücksichtigen. Daher ergibt sich:

$$q_{ab,A} = q_{zu,B} = a \cdot \sqrt{2g(h_A(t) - h_B(t))}$$

Für das Volumen der Tanks gilt

$$V(t) = Q \cdot h(t) \tag{1}$$

Außerdem ergibt sich die Änderungsrate des Volumens zu

$$\dot{V}(t) = q_{zu}(t) - q_{ab}(t) \tag{2}$$

Durch Ableiten von (1) und Einsetzen in (2) ergibt sich dann die allgemeine Differentialgleichung für die Füllhöhe des Tanks

$$\dot{h}(t) = \frac{1}{Q}(q_{zu} - q_{ab}) \tag{3}$$

Setzt man nun die aufgestellte Beziehung in (3) für den Durchfluss zwischen den beiden Behältern sowie die Angabe aus dem Hinweis ein, ergeben sich die folgenden beiden nichtlinearen Differentialgleichungen

$$\dot{h}_A(t) = \frac{1}{Q}\underbrace{\left(q_{zu} - a \cdot \sqrt{2g(h_A(t) - h_B(t))}\right)}_{f_1(q_{zu},h_A,h_B)}, \tag{4}$$

$$\dot{h}_B(t) = \frac{1}{Q}\underbrace{\left(a \cdot \sqrt{2g(h_A(t) - h_B(t)} - a \cdot \sqrt{2g \cdot h_B(t)}\right)}_{f_2(h_A,h_B)}. \tag{5}$$

Im Folgenden gilt es die Ruhelage für die Linearisierung zu bestimmen. Es gelten die folgenden Beziehungen

$$0 = q_{zu,0} - a \cdot \sqrt{2g(h_{A,0} - h_{B,0})}, \tag{6}$$

$$0 = a \cdot \sqrt{2g(h_{A,0} - h_{B,0})} - a \cdot \sqrt{2gh_{B,0}}. \tag{7}$$

Aus Gleichung (7) folgt unmittelbar durch Umstellen

$$h_{A,0} - h_{B,0} = h_{B,0}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}h_{A,0} = h_{B,0}$$

Aus Gleichung (6) folgt

$$\begin{aligned} q_{zu,0}^2 &= 2a^2 g(h_{A,0} - h_{B,0}) \\ \Leftrightarrow h_{B,0} &= h_{A,0} - \frac{q_{zu,0}^2}{2a^2 g} \end{aligned}$$

Woraus sich dann für die beiden Ruhelagen ergibt:

$$h_{A,0} = \frac{q_{zu,0}^2}{a^2 g}\,, \tag{8}$$

$$h_{B,0} = \frac{q_{zu,0}^2}{2a^2 g}\,. \tag{9}$$

In diesen Ruhelagen werden die beiden Differentialgleichungen (4) und (5) nun linearisiert. Es reicht die Klammerausdrücke in den Gleichungen (4) und (5) zu linearisieren, da aufgrund der Wahl der Ruhelage als Arbeitspunkt die Abweichung in der Füllgeschwindigkeit identisch mit der Änderung gegenüber dem Arbeitspunkt ist (Füllgeschwindigkeit in der Ruhelage ist gleich Null). Desweiteren ist der Ausdruck $f(h_{A,0}, h_{B,0}, q_{zu,0})$ in beiden Fällen aufgrund der Linearisierung in der Ruhelage ebenfalls gleich Null und muss somit nicht weiter betrachtet werden. Für die erste Differentialgleichung ergeben sich die folgenden Koeffizienten:

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial q_{zu}}\right|_{q_{zu,0}, h_{A,0}, h_{B,0}} = 1\,, \tag{10a}$$

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial h_A}\right|_{q_{zu,0}, h_{A,0}, h_{B,0}} = -\frac{a \cdot g}{\sqrt{2g(h_{A,0} - h_{B,0})}} = k_{h_{A,1}}\,, \tag{10b}$$

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial h_B}\right|_{q_{zu,0}, h_{A,0}, h_{B,0}} = \frac{a \cdot g}{\sqrt{2g(h_{A,0} - h_{B,0})}} = k_{h_{B,1}}\,. \tag{10c}$$

Mit (10) ergibt sich die folgende linearisierte Differentialgleichung für den Tank A zu

$$\Delta \dot{h}_A = \underbrace{\frac{1}{Q}}_{k_q} \cdot \Delta q_{zu} + \underbrace{\frac{k_{h_{A,1}}}{Q}}_{k_{A,1}} \cdot \Delta h_A + \underbrace{\frac{k_{h_{B,1}}}{Q}}_{k_{B,1}} \cdot \Delta h_B\,.$$

In Differentialgleichung (5) muss aus den gleichen Gründen ebenfalls nur der Klammerausdruck linearisiert werden. Die Koeffizienten der linearisierten Differentialgleichungen ergeben sich zu:

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial h_A}\right|_{q_{zu,0}, h_{A,0}, h_{B,0}} = \frac{a \cdot g}{\sqrt{2g(h_{A,0} - h_{B,0})}} = k_{h_{A,2}}\,, \tag{11a}$$

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial h_B}\right|_{q_{zu,0}, h_{A,0}, h_{B,0}} = -\frac{a \cdot g}{\sqrt{2g(h_{A,0} - h_{B,0})}} - \frac{a \cdot g}{\sqrt{2gh_{B,0}}} = k_{h_{B,2}}\,. \tag{11b}$$

Daraus ergibt sich die linearisierte Differentialgleichung für Tank B zu

$$\Delta \dot{h}_B = \underbrace{\frac{k_{h_{A,2}}}{Q}}_{k_{A,2}} \cdot \Delta h_A + \underbrace{\frac{k_{h_{B,2}}}{Q}}_{k_{B,2}} \cdot \Delta h_B\,.$$

b) Das Blockschaltbild des linearisierten Systems ist in Abbildung 2 dargestellt.

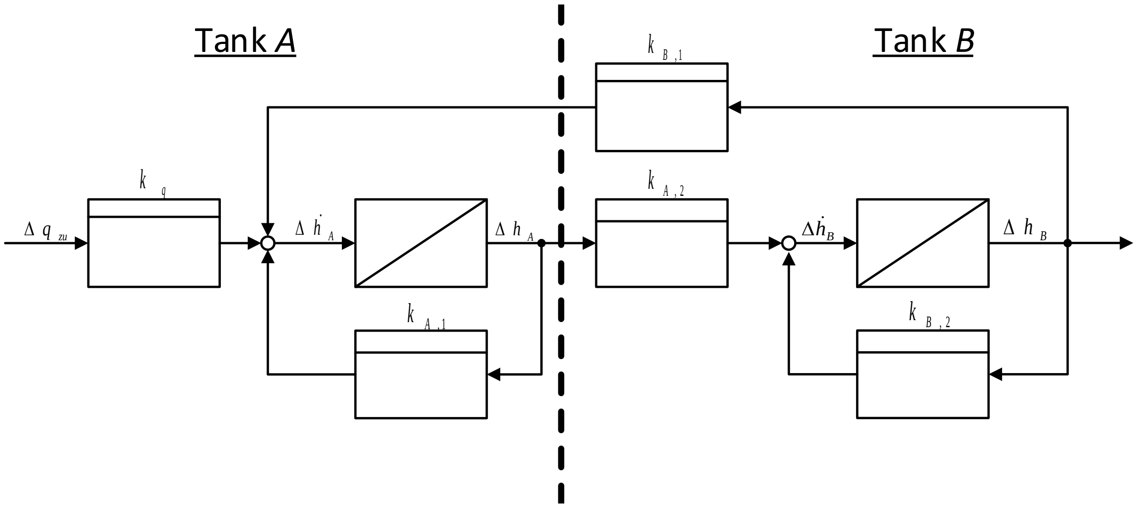


Abbildung 2: Blockschaltbild des linearisierten Systems

Aufgabe 2. Elektrischer Schaltkreis

Gegeben sei der elektrische Schaltkreis mit dem ohmschen Widerstand R, dem Kondensator mit

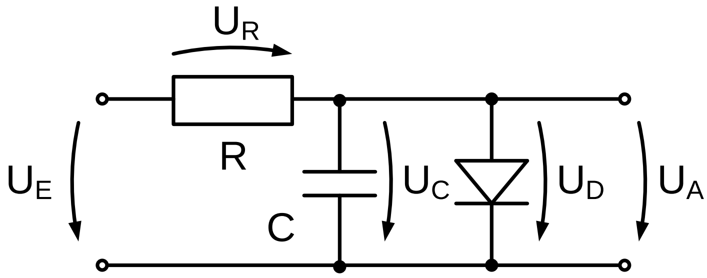


Abbildung 3: Elektischer Schaltkreis

der Kapazität C und einer Diode, welche durch die Strom-Spannungs-Beziehung

$$i_D(U_D) = I_S \cdot \left(\mathrm{e}^{k \cdot U_D} - 1\right)$$

beschrieben wird.

Aufgaben

a) Stellen Sie die Maschen- und Knotensätze des elektrischen Systems auf.

b) Geben Sie die nichtlineare Differentialgleichung zur Beschreibung des Ein-Ausgangsverhaltens des Systems an und verwenden Sie dabei die Bezeichnung $y(t) = U_A(t)$ für den Systemausgang und $u(t) = U_E(t)$ für den Systemeingang.

c) Linearisieren Sie die nichtlineare Differentialgleichung in dem Arbeitspunkt (u_0, y_0) und geben sie die linearisierte Differentialgleichung an.

Lösung Aufgabe 2.

a)
- Maschensatz: $U_E(t) = U_R(t) + U_C(t) = U_R(t) + U_D(t) = U_R(t) + U_A(t)$
- Knotensatz: $i_R(t) = i_C(t) + i_D\left(U_D(t)\right)$

b) Es gilt $U_R = R \cdot i_R$. Somit ergibt sich aus dem Maschensatz

$$\begin{aligned} U_E &= U_R + U_C = i_R \cdot R + U_C = (i_C + i_D) \cdot R + U_C \\ &= (i_C + i_D) \cdot R + U_A \,. \end{aligned}$$

Desweiteren gilt aufgrund der Bauteileigenschaften des Kondensators $i_C = C \cdot \dot{U}_C$ bzw. $i_C = C \cdot \dot{U}_A$. Zusammen mit der angegebenen Strom-Spannungsbeziehung der Diode ergibt sich dann

$$\begin{aligned} U_E &= \left(C \cdot \dot{U}_A + I_S \cdot (\mathrm{e}^{k \cdot U_D} - 1)\right) \cdot R + U_A \\ &= \left(C \cdot \dot{U}_A + I_S \cdot (\mathrm{e}^{k \cdot U_A} - 1)\right) \cdot R + U_A \,. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Bezeichnungen aus der Aufgabenstellung $y(t) = U_A(t)$ und $u(t) = U_E(t)$ und anschließendes Ausmultiplizieren ergibt sich mit

$$\begin{aligned} u(t) &= \Big(C \cdot \dot{y}(t) + I_S \cdot (\mathrm{e}^{k \cdot y(t)} - 1)\Big) \cdot R + y(t) \\ &= R \cdot C \cdot \dot{y}(t) + y(t) + R \cdot I_S \cdot \mathrm{e}^{k \cdot y(t)} - R \cdot I_S \,. \end{aligned}$$

die gesuchte Differentialgleichung.

c) Im Folgenden wird ein systematischer Ansatz der Linearisierung vorgestellt. Dazu wird die zu linearisierende Differentialgleichungen wie folgt umgeformt

$$0 = \underbrace{R \cdot C \cdot \dot{y}(t) + y(t) + R \cdot I_S \cdot \mathrm{e}^{k \cdot y(t)} - R \cdot I_S - u(t)}_{f(\dot{y}(t), y(t), u(t))}$$

Mit Hilfe des Taylor-Ansatzes ergibt sich daraus die linearisierte Differentialgleichung zu

$$0 = \underbrace{f(\dot{y}_0, y_0, u_0)}_{=0} + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right|_0 \cdot \Delta \dot{y} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_0 \cdot \Delta y + \left.\frac{\partial f}{\partial}\right|_0 \cdot \Delta u \,. \tag{12}$$

Somit müssen die drei partiellen Differentiale in (12) berechnet werden. Diese ergeben sich zu

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right|_0 = R \cdot C \,, \tag{13a}$$

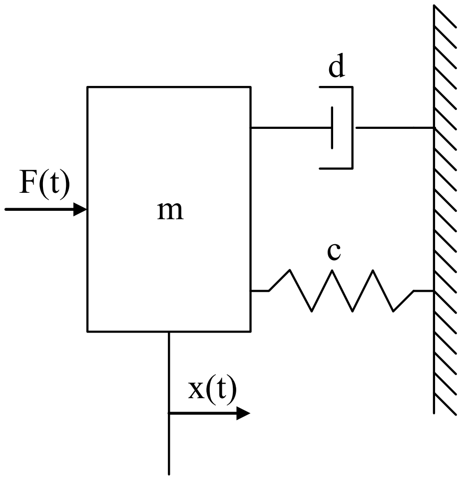
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_0 = 1 + R \cdot I_S \cdot k \cdot \mathrm{e}^{k \cdot y_0} \,, \tag{13b}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_0 = -1 \,. \tag{13c}$$

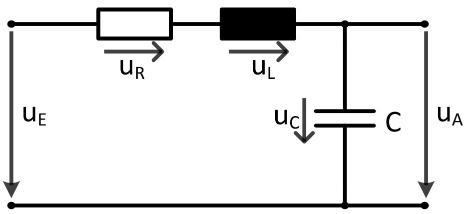
Setzt man die Koeffizienten in (13) in (12) ein, ergibt sich die gesuchte linearisierte Differentialgleichung zu

$$\begin{aligned} 0 &= R \cdot C \cdot \Delta \dot{y} + \Big(1 + R \cdot I_S \cdot k \cdot \mathrm{e}^{k \cdot y_0}\Big) \cdot \Delta y - \Delta u \\ \Leftrightarrow \Delta u &= R \cdot C \cdot \Delta \dot{y} + \Big(1 + R \cdot I_S \cdot k \cdot \mathrm{e}^{k \cdot y_0}\Big) \cdot \Delta y \,. \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Äquivalenz von elektrischen und mechanischen Systemen
Gegeben sind die beiden linearen Systeme



(a) Feder-Masse-Dämpfer System



(b) Elektrisches Netzwerk

Das System in Abbildung a) wurde bereits in der ersten Übung behandelt und wird mit der Differentialgleichung

$$m \cdot \ddot{x}(t) + d \cdot \dot{x}(t) + c \cdot x(t) = F(t) \tag{14}$$

beschrieben. Der in Abbildung b) dargestellte Schaltkreis besteht aus einem Widerstand R, einer Induktivität L und einer Kapazität C. Der Schaltkreis wird mit einer Eingangsspannung von $u_E(t)$ beaufschlagt und es fällt eine Spannung $u_A(t)$ am Ausgang an.

Aufgaben

a) Bestimmen Sie die Differentialgleichung die das Ausgangsverhalten $u_A(t)$ des in b) dargestellten Schaltkreises in Abhängigkeit von der Eingangsspannung $u_E(t)$ beschreibt.

b) Vergleichen Sie die erhaltene Differentialgleichung mit der in (14) beschriebenen Differentialgleichung des mechanischen Systems.

Lösung Aufgabe 3.

a)
- Es gilt $i_R = i_L = i_C = i$
- Bauteilgleichungen:
  - $u_R = R \cdot i$
  - $u_L = L \cdot \frac{\partial i}{\partial t}$
  - $i_C = i = C \cdot \frac{\partial u_C}{\partial t}$

Aufstellen der Maschengleichungen (2. Kirchhoffsches Gesetz) ergibt

$$u_E = u_R + u_L + u_C \,, \tag{15}$$

$$u_A = u_C \,. \tag{16}$$

Aufgrund von (16) und der Bauteilgleichung des Kondensators gilt

$$i = C \cdot \frac{\partial u_A}{\partial t} \tag{17}$$

Einsetzen der Bauteilgleichungen in (15) ergibt

$$u_E = R \cdot i + L \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + u_A\,. \tag{18}$$

Aus (17) folgt weiterhin

$$L \cdot \frac{\partial i}{\partial t} = L \cdot C \cdot \frac{\partial^2 u_A}{\partial t^2}\,. \tag{19}$$

Einsetzen von (16) und (19) in (18) ergibt

$$u_E = R \cdot C \cdot \frac{\partial u_A}{\partial t} + L \cdot C \cdot \frac{\partial^2 u_A}{\partial t^2} + u_A$$

Daraus folgt unmittelbar

$$L \cdot C \cdot \ddot{u}_A(t) + R \cdot C \cdot \dot{u}_A(t) + u_A(t) = u_E(t)$$

Umformen der Differentialgleichung des elektrischen Systems führt zu

$$L \cdot \ddot{u}_A(t) + R \cdot \dot{u}_A(t) + \frac{1}{C} \cdot u_A(t) = \frac{1}{C} \cdot u_E(t)\,.$$

Vergleich mit der Differentialgleichung aus der ersten Aufgabe

$$m \cdot \ddot{x}(t) + d \cdot \dot{x}(t) + c \cdot x(t) = F(t)$$

- Beide Differentialgleichungen vom selben Typ (linear, inhomogen, zweiter Ordnung)
- Identischer Aufbau
- Durch Koeffizientenvergleich des homogenen Teils der DGL lässt sich die Elektro-Mechanische-Analogie herleiten
  - Masse – Induktivität (m – L)
  - Dämpfungskoeff. – ohm. Widerstand (d – R)
  - Federnachgiebigkeit – Kapazität ($\frac{1}{c}$ – C)

Die beiden Differentialgleichungen lassen sich in eine allgemeine Form

$$a_2 \cdot \ddot{y}(t) + a_1 \cdot \dot{y}(t) + a_0 \cdot y(t) = b_0 \cdot u(t) \tag{20}$$

überführen.

- Form tritt in der Regelungstechnik sehr oft auf
- Viele technische Systeme besitzen (oder näherungsweise) dieses Verhalten
- Wird auch als PT_2-Verhalten bezeichnet

Zur Erarbeitung allgemeinener Kenngrößen dieser Art von Differentialgleichungen wird (20) in eine andere Schreibweise überführt

$$\ddot{y}(t) + 2D\omega_0 \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) = K\omega_0 \cdot u(t) \tag{21}$$

Aus dieser Form lassen sich die beiden elementaren Kenngrößen von Differentialgleichungen mit PT_2-Verhalten direkt ermitteln.

- Dämpfungsgrad D (dimensionslos)
- Eigenfrequenz ω_0

Es gilt zu beachten, dass der Dämpfungsgrad nicht mit dem linearen Dämpfungskoeff. bei einem mechanischen System gleichzusetzen ist, sondern eine allgemeine Systemeigenschaft darstellt. Diese lässt sich für alle technischen Systeme, welche PT_2-Verhalten aufweisen, bestimmen.

Zur Bestimmung der Kennwerte für die beiden vorher behandelten Differentialgleichungen werden beide in die in (21) dargestellte Form überführt

$$\ddot{x}(t) + \frac{d}{m} \cdot \dot{x}(t) + \frac{c}{m} \cdot x(t) = \frac{1}{m} \cdot F(t)\,, \tag{22}$$

$$\ddot{u}_A(t) + \frac{R}{L} \cdot \dot{u}_A(t) + \frac{1}{CL} \cdot u_A(t) = \frac{1}{CL} \cdot u_E(t)\,. \tag{23}$$

Für das mechanische System (22) ergibt durch sich Koeffizientenvergleich mit (21)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

$$D = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{\sqrt{c \cdot m}}$$

Analog ergibt sich für das elektrische System:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{CL}}$$

$$D = \frac{1}{2} \cdot R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Bei Vergleich der Kennwerte lässt sich ebenfalls die oben hergeleitete Analogie zwischen mechanischen und elektrischen Systemen erkennen, da durch das jeweilige Ersetzen der äquivalenten physikalischen Größen sich die Kenngrößen ineinander überführen lassen.

Mit Hilfe des Dämpfungsgrades lassen sich zusätzlich noch Aussagen über das Zeitverhalten des Ausgangs $y(t)$ treffen.

- Dämpfungsgrad $D > 1$: aperiodisches Verhalten
- Dämpfungsgrad $D = 1$: aperiodischer Grenzfall
- Dämpfungsgrad $1 > D > 0$: gedämpften Schwingung
- Dämpfungsgrad $D < 0$: ungedämpfte, instabile Schwingung

Diese Eigenschaften lassen sich auf die Eigenwerte des Systems zurückführen. Hierzu wird das charakteristische Polynom von (21)

$$\lambda^2 + 2D\omega_0 \cdot \lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{24}$$

gebildet, was die folgenden beiden Lösungen besitzt

$$\lambda_{1/2} = -\omega_0 \cdot \left(D \pm \sqrt{D^2 - 1} \right), . \tag{25}$$

Die beiden Lösungen in (25) entsprechen demnach den Eigenwerten von (21). Betrachtet man nun die vorher aufgeführten Fälle für den Dämpfungsgrad, ergeben sich folgende Aussagen über die Beschaffenheit der Eigenwerte

- $D > 1$: Aperiodisches Verhalten bei zwei reellen Eigenwerten
- $D = 1$: Aperiodischer Grenzfall, ein doppelter Eigenwert
- $1 > D > 0$: Gedämpfte Schwingung bei einem komplex konjugiertem Polpaar mit negativem Realteil
- $D < 0$: Ungedämpfte, instabile Schwingung bei einem komplex konjugiertem Polpaar mit positiven Realteil

Es zeigt sich also, dass man aufgrund der Beschaffenheit der Eigenwerte eine Differentialgleichung mit PT_2-Verhalten auf das Zeitverhalten der Ausgangsfunktion $y(t)$ schließen kann. Insbesondere der letzte Fall soll hier hervorgehoben werden, da Eigenwerte mit positivem Realteil (oder positive reelle Eigenwerte) immer ein instabiles Systemverhalten beschreiben.