# 9. Übung zur Vorlesung „Steuer- und Regelungstechnik“

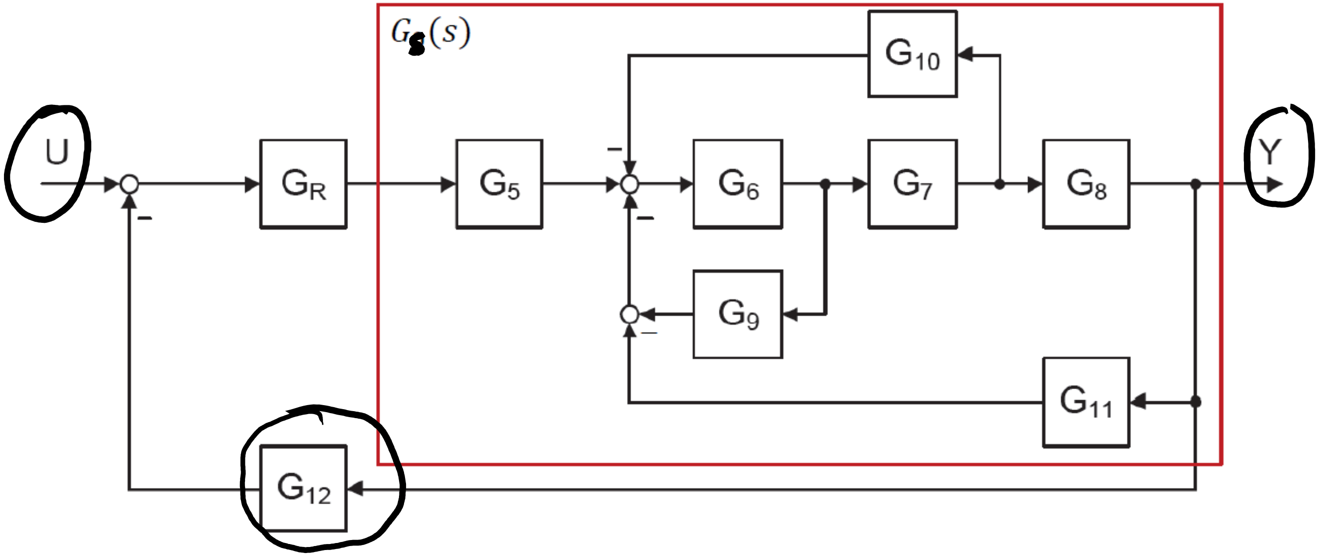
Künstliche Stabilität, Reglerentwurf, Polkompensation

**Felix Goßmann M.Sc.**

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

# Aufgabe 1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Gegeben ist das folgende System in Blockschaltbild-Form




mit den allgemeinen Übertragungsfunktionen $G_5(s) - G_{12}(s)$ sowie $G_R(s)$.

## Aufgabe 1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Für die Übertragungsfunktionen gilt:

$$G_5 = K \ ; \ G_6 = \frac{2}{s+1} \ ; \ G_7 = G_8 = \frac{1}{s} \ ; \ G_9 = 2 \ ; \ G_{10} = 3 \ ;$$

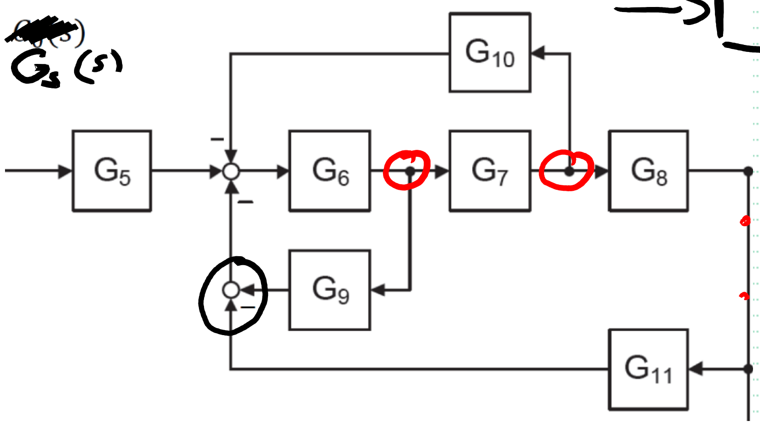
$$G_{11} = G_{12} = \frac{1}{s+2}$$

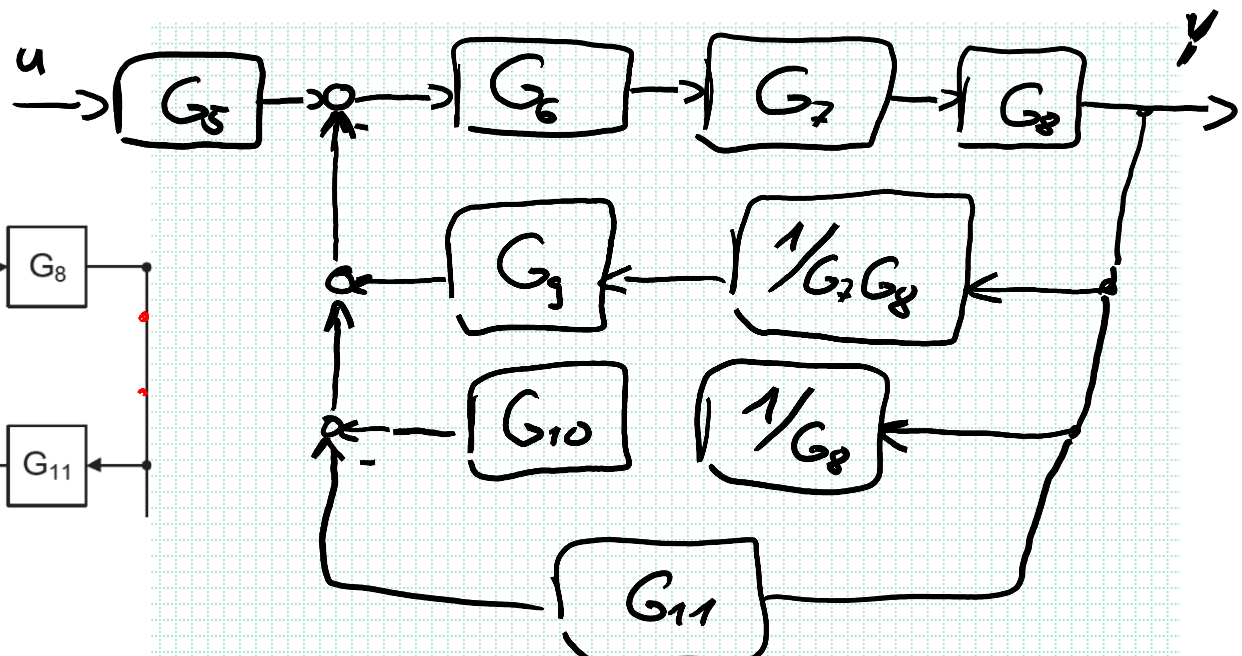
**Aufgaben:** a) Fassen Sie das in dem roten Kasten dargestellte Übertragungssystem zu einer doppelbruchfreien Übertragungsfunktion $G_S(s)$ zusammen.

b) Prüfen Sie mit ob die Übertragungsfunktion $G_S(s)$ stabil ist.

# Aufgabe 1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

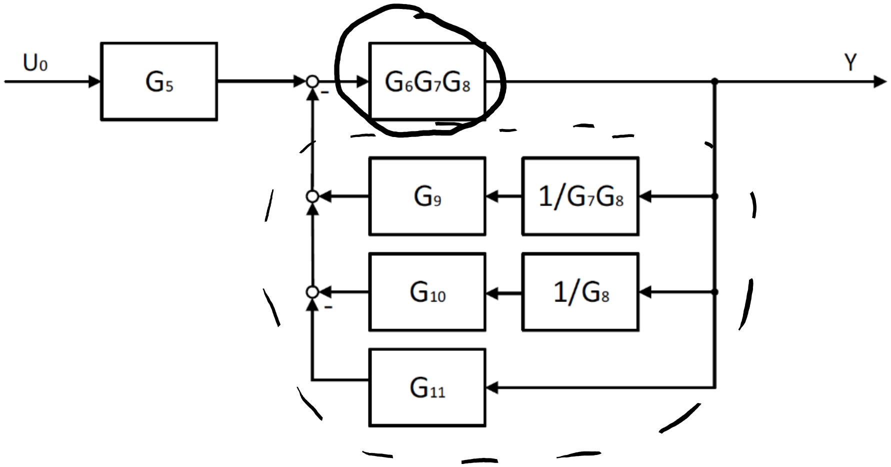
**Aufgaben:** a) Fassen Sie das in dem roten Kasten dargestellte Übertragungssystem zu einer doppelbruchfreien Übertragungsfunktion $G_0(s)$ zusammen.



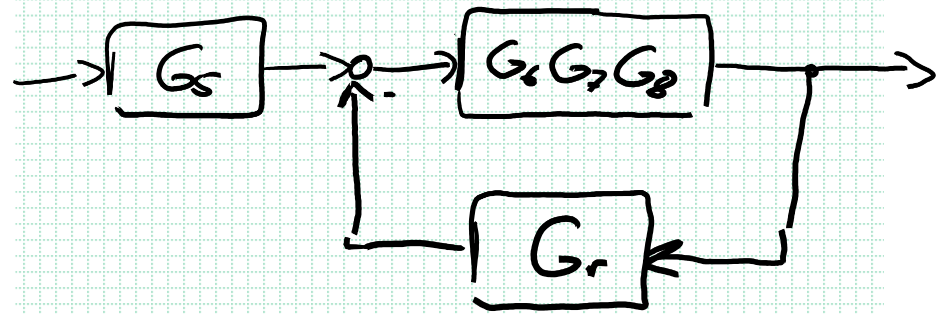



# Aufgabe 1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

**Aufgaben:** a) Fassen Sie das in dem roten Kasten dargestellte Übertragungssystem zu einer doppelbruchfreien Übertragungsfunktion $G_0(s)$ zusammen.



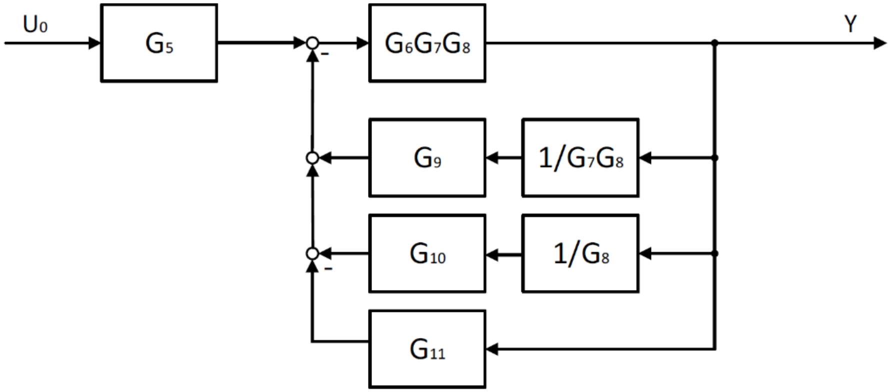

$$\frac{G_9}{G_7 G_8} + \frac{G_{10}}{G_8} - G_{11} = G_r$$




$$G_v = G_6 G_7 G_8$$

# Aufgabe 1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

**Aufgaben:** a) Fassen Sie das in dem roten Kasten dargestellte Übertragungssystem zu einer doppelbruchfreien Übertragungsfunktion $G_0(s)$ zusammen.




$$G_S(s) = G_5 \cdot \frac{G_v}{1 + G_v G_r}$$

$$= G_5 \cdot \frac{G_6 G_7 G_8}{1 + G_6 G_7 G_8 \left( \frac{G_9}{G_8 G_7} + \frac{G_{10}}{G_8} - G_{11} \right)}$$

$$= \frac{G_5 G_6 G_7 G_8}{1 + G_6 \cdot G_9 + G_6 G_7 \cdot G_{10} - G_6 G_7 G_8 G_{11}}$$

# Aufgabe 1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

**Aufgaben:** b) Prüfen Sie mit ob die Übertragungsfunktion $G_0(s)$ stabil ist.

$$G_s(s) = \frac{K \cdot \frac{2}{s+1} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s}}{1 + 2 \cdot \frac{2}{s+1} + 3 \cdot \frac{2}{s+1} \cdot \frac{1}{s} + \frac{2}{s+1} \cdot \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s}}$$

$$= \ldots$$

$$= \frac{2K(s+2)}{s^4 + 7s^3 + 16s^2 + 12s - 2}$$

verletzt notwendige Bed. eines Hurwitz-Polynoms

$\rightarrow$ instabil

# Aufgabe 1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

**Aufgaben:** b) Prüfen Sie mit ob die Übertragungsfunktion $G_0(s)$ stabil ist.

## Aufgabe 1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Das System $G_S(s)$ wird nun mit einem Regler $G_R(s)$ geregelt. Zusätzlich ist zur Betrachtung des Sensorverhaltens die Übertragungsfunktion $G_{12}(s)$ in der Rückführung enthalten.

$G_{12} = \frac{1}{s+2}$

**Aufgaben:** c) Stellen Sie die Gesamtübertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ in doppelbruchfreier Form in Abhängigkeit von $G_R(s)$ auf

d) Ist das System mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ für ein $K > 0$ stabilisierbar? Falls ja, bestimmen sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums den Bereich für $K_R$ in Abhängigkeit von $K$, für den der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil ist.

## Aufgabe 1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

**Aufgaben:** c) Stellen Sie die Gesamtübertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ in doppelbruchfreier Form in Abhängigkeit von $G_R(s)$ auf

$$G_v(s) = G_s(s) \cdot G_R(s)$$

$$G_r(s) = G_{12}(s) \longrightarrow G(s) = \frac{G_v(s)}{1 + G_v(s)\, G_r(s)}$$

$$1 + G_v G_r = 1 + G_R \cdot G_s \cdot G_{12} = 1 + \frac{2K\cancel{(s+2)}\, G_R(s)}{s^4 + 7s^3 + 16s^2 + 12s - 2} \cdot \frac{1}{\cancel{(s+2)}}$$

$$= \frac{s^4 + 7s^3 + 16s^2 + 12s - 2 + 2K\, G_R(s)}{s^4 + 7s^3 + 16s^2 + 12s - 2}$$

# Aufgabe 1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

**Aufgaben:** c) Stellen Sie die Gesamtübertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ in doppelbruchfreier Form in Abhängigkeit von $G_R(s)$ auf

$$G(s) = \frac{2K(s+2)\,G_R(s)}{\cancel{s^4+7s^3+16s^2+12s-2}} \cdot \frac{\cancel{s^4+7s^3+16s^2+12s-2}}{s^4+7s^3+16s^2+12s-2KG_R(s)}$$

$$= \frac{2K\,G_R(s)\,(s+2)}{s^4+7s^3+16s^2+12s-2+2K\,G_R(s)}$$

## Aufgabe 1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

**Aufgaben:** d) Ist das System mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ für ein $K > 0$ stabilisierbar? Falls ja, bestimmen sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums den Bereich für $K_R$ in Abhängigkeit von $K$, für den der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil ist.

$G_R(s) = K_R$

$$G(s) = \frac{2K K_R (s+2)}{s^4 + 7s^3 + 16s^2 + 12s \underbrace{- 2 + 2K K_R}_{a_0}}$$

notw. Bed.:

$a_0 > 0$

$a_0 = -2 + 2K K_R > 0$

$\boxed{K_R > \frac{1}{K}}$ für $K > 0$

## Aufgabe 1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

**Aufgaben:** d) Ist das System mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ für ein $K > 0$ stabilisierbar? Falls ja, bestimmen sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums den Bereich für $K_R$ in Abhängigkeit von $K$, für den der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil ist.

hin Bed $\quad n = 4$

$$\boxed{\frac{1}{K} < K_R < \frac{13{,}25}{K}}$$

$$H_1 = a_3 = 7 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 7 & 12 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} \longrightarrow \det H_2 = 100 > 0$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 7 & 12 & 0 \\ 1 & 16 & -2+2KK_R \\ 0 & 7 & 12 \end{vmatrix} \qquad \det H_3 = 1344 - 144 + 98 - 98KK_R > 0$$

$$\Longrightarrow K_R < \frac{13{,}25}{K}$$

# Aufgabe 1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

**Aufgaben:** e) Das System $G(s)$ wird nun mit einem $K_R = 12$ geregelt und mit einem Einheitssprung $u(t) = 1(t)$ beaufschlagt. Es stellt sich ein stationärer Endwert von $y_\infty = 12$ ein. Bestimmen Sie $K$.

$$y_\infty = \lim_{s \to 0} s \cdot \underbrace{G(s) \cdot \frac{1}{s}}_{\text{Sprungantwort}} = \lim_{s \to 0} G(s)$$

$$G(s) = \frac{24K(s+2)}{s^4 + 7s^3 + 16s^2 + 12s - 2 + 24K}$$

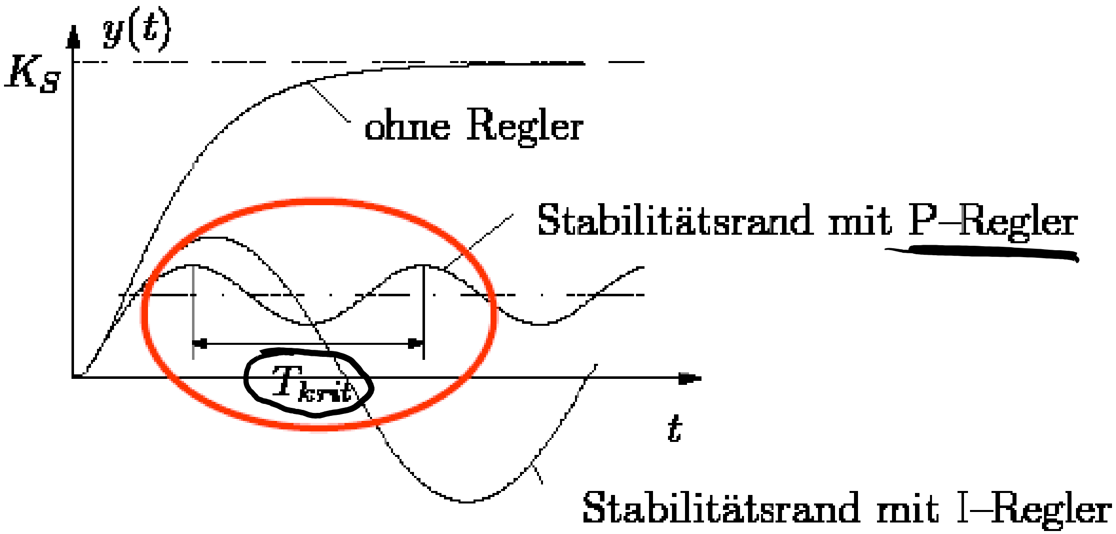
$$= \boxed{\frac{48K}{-2 + 24K} = 12} \quad (\text{laut A.S})$$

$$K = \frac{1}{10}$$

$$\rightarrow \boxed{10 < K_R < 132{,}5}$$

## Reglerentwurf nach Ziegler & Nichols

- Auch unter Methode des Stabilitätsrands bekannt
- System wird mit einem P-Regler geschlossen und die Reglerverstärkung so lange erhöht, bis das System Dauerschwingungen ausführt (Stabilitätsrand)



## Reglerentwurf nach Ziegler & Nichols

- Die dafür notwendige Reglerverstärkung wird $\boxed{K_{krit}}$ genannt
- Die Periodendauer der Dauerschwingung wird mit $T_{krit}$ bezeichnet

- Ermittlung der Reglerparameter aus folgender Tabelle:

| Reglertypen | Regelparameter | | |
|---|---|---|---|
| | $K_R$ | $T_N = T_I$ | $T_V = T_D$ |
| P | $0.5 \cdot K_{krit}$ | – | – |
| PI | $0.45 \cdot K_{krit}$ | $0.85 \cdot T_{krit}$ | – |
| PID | $0.6 \cdot K_{krit}$ | $0.5 \cdot T_{krit}$ | $0.12 \cdot T_{krit}$ |

## Aufgabe 1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

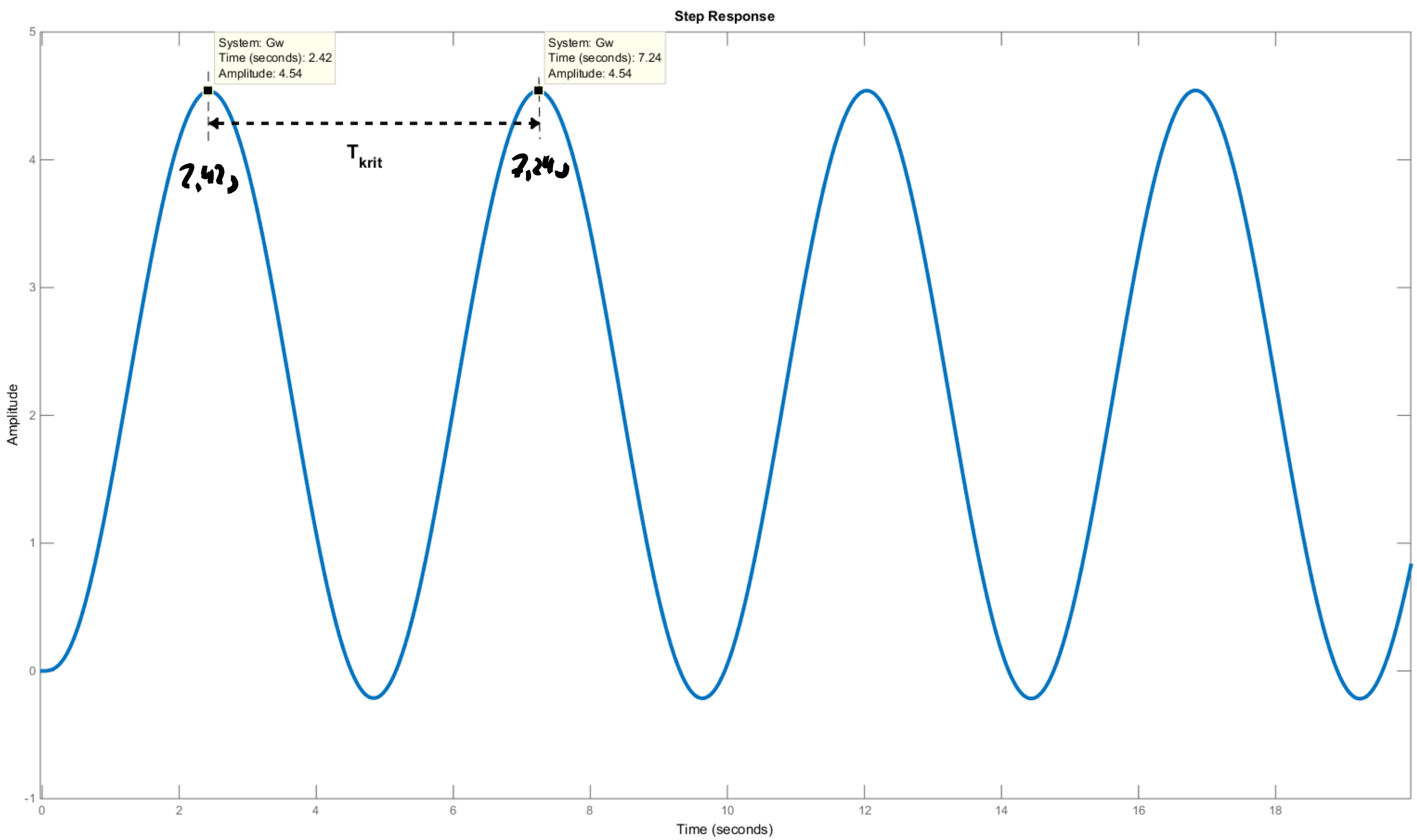
**Aufgaben:** f) Der Regler $G_R(s)$ soll nun mit dem Verfahren nach Ziegler-Nichols ausgelegt werden. Hierbei sollen sowohl ein P- als auch PI- Regler entworfen werden.

Bei einem Schwingversuch wurde an der oberen Stabilitätsgrenze eine Periodendauer von $\underline{T_{krit} = 5s}$ gemessen.

# Aufgabe 1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

$\boxed{K_{krit} = 132,5}$

Bestimmung der kritischen Zeitkonstante/Periodendauer:



# Aufgabe 1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

**Aufgaben:** f) Der Regler $G_R(s)$ soll nun mit dem Verfahren nach Ziegler-Nichols ausgelegt werden. Hierbei sollen sowohl ein P-,PI- und ein PID-Regler betrachtet werden.

| Reglertypen | Regelparameter | | |
|---|---|---|---|
| | $K_R$ | $T_N$ | $T_V$ |
| P | $0.5 \cdot K_{krit}$ | — | — |

$K_R = 0{,}5 \cdot K_{krit} = \underline{66{,}25}$

# Aufgabe 1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

**Aufgaben:** f) Der Regler $G_R(s)$ soll nun mit dem Verfahren nach Ziegler-Nichols ausgelegt werden. Hierbei sollen sowohl ein P-,PI- und ein PID-Regler betrachtet werden.

| Reglertypen | Regelparameter | | |
|---|---|---|---|
| | $K_R$ | $T_N$ | $T_V$ |
| P | $0.5 \cdot K_{krit}$ | — | — |
| PI | $0.45 \cdot K_{krit}$ | $0.85 \cdot T_{krit}$ | — |

$T_{krit} = 5$

$K_R = 0{,}45 \cdot 132{,}5 = 59{,}625$

$T_N = T_I = 0{,}85 \; 5 = 4{,}25$

$$G_R = 59{,}625 \left(1 + \frac{1}{4{,}25 \cdot s}\right)$$

## Aufgabe 1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

**Aufgaben:** f) Der Regler $G_R(s)$ soll nun mit dem Verfahren nach Ziegler-Nichols ausgelegt werden. Hierbei sollen sowohl ein P-,PI- und ein PID-Regler betrachtet werden.

| Reglertypen | Regelparameter | | |
|---|---|---|---|
| | $K_R$ | $T_N$ | $T_V$ |
| P | $0.5 \cdot K_{krit}$ | – | – |
| PI | $0.45 \cdot K_{krit}$ | $0.85 \cdot T_{krit}$ | – |
| PID | $0.6 \cdot K_{krit}$ | $0.5 \cdot T_{krit}$ | $0.12 \cdot T_{krit}$ |

$K_R = 0{,}6 \cdot 132{,}5 = 79{,}5$

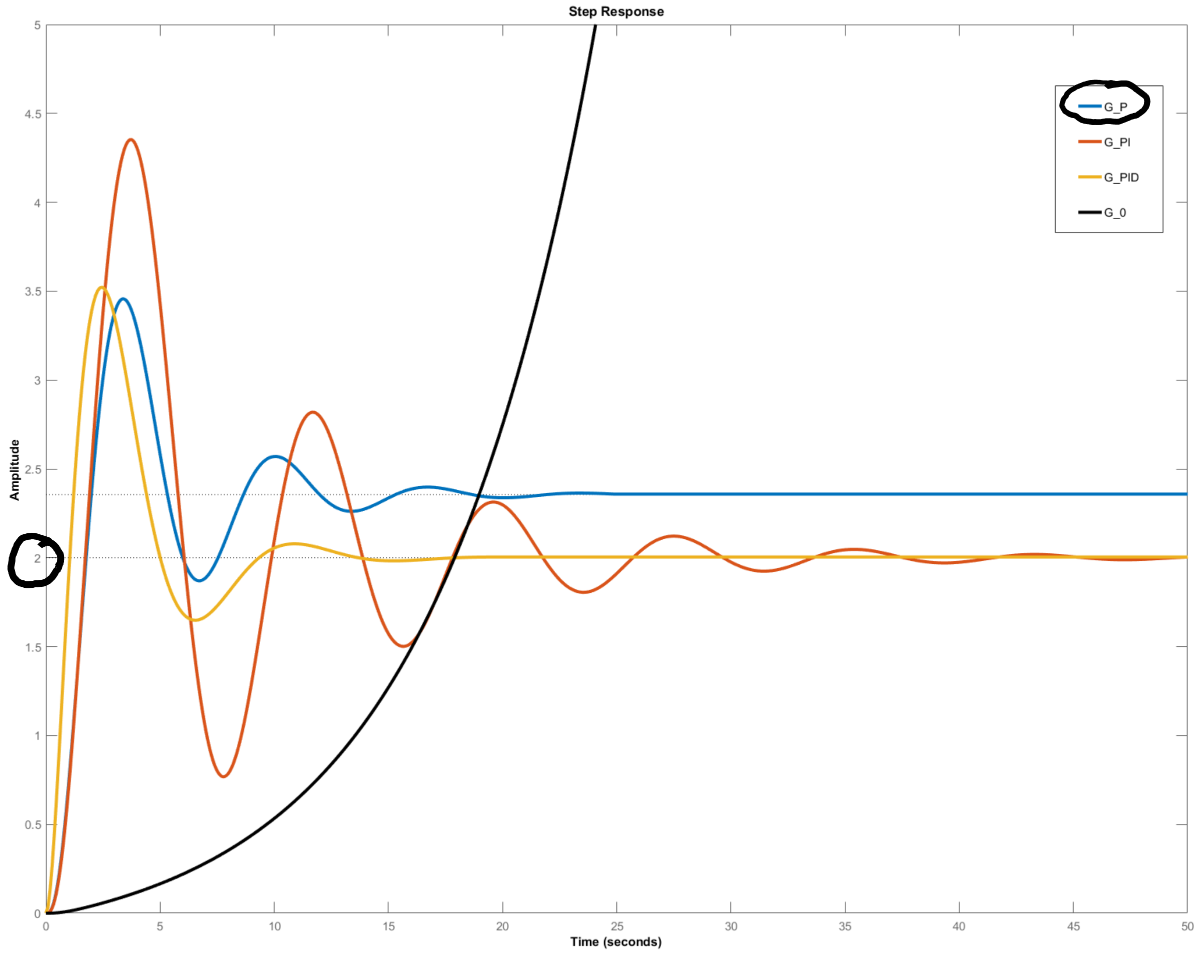
$T_I = 0{,}5 \cdot 5 = 2{,}5$

$T_D = 0{,}12 \cdot 5 = 0{,}6$

$$G_R = 79{,}5\left(1 + \frac{1}{2{,}5\, s} + 0{,}6 \cdot s\right)$$

# Aufgabe 1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

- Sprungantworten von $G_0(s)$ und $G(s)$ mit den drei bestimmten Reglern



## Aufgabe 1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Anmerkungen zur stationären Genauigkeit

- Wie in dargestellten Sprungantworten ersichtlich, liefert auch ein Regler mit I-Anteil in diesem Fall keine stationäre Genauigkeit
- Ursache?

$$G_0(s) = G_R \cdot G_S \cdot G_{12} = \frac{2K(\cancel{s+2})}{s^4+7s^3+16s^2+12s-2} \cdot \frac{1}{\cancel{(s+2)}} \cdot \overbrace{\frac{sT_I K_R + K_R}{sT_I}}^{G_{PI}}$$

$$= \frac{2K(sT_I K_R + K_R)}{s \cdot T_I(s^4+7s^3+16s^2+12s-2)}$$

$$\underset{\text{Messglied}}{G_r} = \frac{1}{s+2} \longrightarrow h_\infty = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{G_r = \frac{2}{s+2}}$$

# Aufgabe 1: Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

Anmerkungen zur stationären Genauigkeit

- freies I-Glied im offenen Kreis (✓)
- stationär genaue Messung (x)
- (Stabilität)

## Aufgabe 2: Polstellen-Kompensation

Gegeben ist die folgende Regelstrecke

$$G_S(s) = \frac{2}{\underbrace{(s+1)}\cdot\underbrace{\left((s+\delta)^2+\omega_e^2\right)}}$$

mit $\delta = 1/2$ und $\omega_e^2 = 15/4$.

$s = -\delta \pm j\,\omega_e$
$= -\delta \pm \sqrt{-\omega_e^2}$

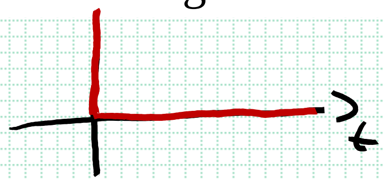
**Aufgaben:** a) Kompensieren Sie das konjugiert komplexe Polpaar mit einem realisierbaren PID-Regler mit der parasitären Zeitkonstante $T = 1/8$ und geben Sie die Übertragungsfunktion $G_0(s)$ des resultierenden offenen Regelkreises an

## Aufgabe 2: Polstellen-Kompensation

Anmerkung: Realisierbarer PID-Regler

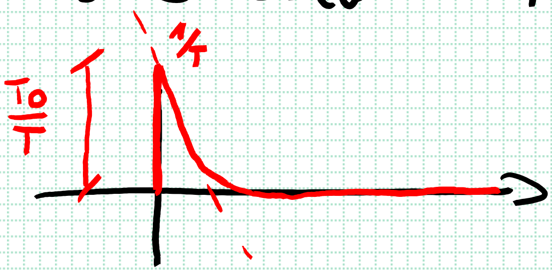
reines D-Glied

$$G(s) = T_D s$$




reales D-Glied: $DT_1$

$$G_{DT_1} = \frac{T_D s}{sT + 1}$$




$$G_R(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{sT_D}{1 + sT}\right)$$

# Aufgabe 2: Polstellen-Kompensation

**Aufgaben:** a) Kompensieren Sie das konjugiert komplexe Polpaar mit einem realisierbaren PID-Regler mit der parasitären Zeitkonstante $\boxed{T = 1/8}$ und geben Sie die Übertragungsfunktion $G_0(s)$ des resultierenden offenen Regelkreises an

$$G_R = K_R \frac{sT_I(1+sT) + (1+sT) + s^2 T_I T_D}{sT_I(1+sT)}$$

$$= K_R \frac{s^2 T_I (T_D + T) + s(T_I + T) + 1}{sT_I(1+sT)}$$

$$= \underbrace{K_R \cdot \frac{1}{T_I T}}_{K} \frac{(s - s_{R1})(s - s_{R2})}{s\left(s + \frac{1}{T}\right)}$$

$$s_{R1/2} = \overbrace{-\frac{T_I + T}{2T_I(T_D+T)}}^{-\delta_R} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{(T_I - T)^2 - 4T_I T_D}}{2T_I(T_D+T)}}_{-\omega_R}$$

## Aufgabe 2: Polstellen-Kompensation

**Aufgaben:** a) Kompensieren Sie das konjugiert komplexe Polpaar mit einem realisierbaren PID-Regler mit der parasitären Zeitkonstante $T = 1/8$ und geben Sie die Übertragungsfunktion $G_0(s)$ des resultierenden offenen Regelkreises an

$$\delta_R = \frac{T_I + T}{2T_I(T_D + T)} \quad , \quad \omega_R^2 = \frac{4T_IT_D - (T_I - T)^2}{4T_I^2(T_D + T)^2}$$

$$G_R(s) = K \cdot \frac{(s+\delta_R)^2 + \omega_R^2}{s(s+\frac{1}{T})}$$

$$T_I = \frac{2\delta_R}{\delta_R^2 + \omega_R^2} - T \quad , \quad T_D = \frac{1}{2\delta_R - T(\delta_R^2 + \omega_R^2)} - T$$

## Aufgabe 2: Polstellen-Kompensation

**Aufgaben:** a) Kompensieren Sie das konjugiert komplexe Polpaar mit einem realisierbaren PID-Regler mit der parasitären Zeitkonstante $T = 1/8$ und geben Sie die Übertragungsfunktion $G_0(s)$ des resultierenden offenen Regelkreises an

$\delta_R = \delta_e$ ; $\omega_R = \omega_e$

$\delta_R = 1/2$

$\omega_R = 15/4$

$$\boxed{\begin{aligned} T_I &= 0{,}125 \\ T_D &= 1{,}875 \end{aligned}}$$

## Aufgabe 2: Polstellen-Kompensation

**Aufgaben:** a) Kompensieren Sie das konjugiert komplexe Polpaar mit einem realisierbaren PID-Regler mit der parasitären Zeitkonstante $T = 1/8$ und geben Sie die Übertragungsfunktion $G_0(s)$ des resultierenden offenen Regelkreises an

$$G_0(s) = K \frac{\cancel{(s+\delta_R)^2 + \omega_R^2}}{s\left(s+\frac{1}{T}\right)} \cdot \frac{2}{(s+1)\left(\cancel{(s+\delta_e)^2 + \omega_e^2}\right)} = \frac{2K}{s(s+1)(s+8)}$$

für $\delta_R = \delta_e$, $\omega_R = \omega_e$

**Aufgabe 2: Polstellen-Kompensation**

Gegeben ist die folgende Regelstrecke (siehe 5. Übung)

$$G_S(s) = \frac{2}{(s+1)\cdot\left((s+\delta)^2 + \omega_e^2\right)}$$

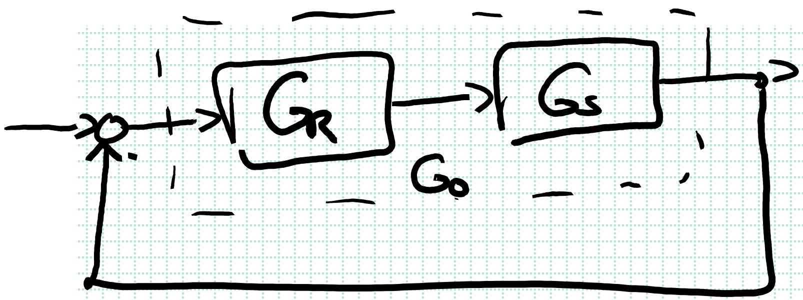
mit $\delta = 1/2$ und $\omega_e^2 = 15/4$.

**Aufgaben:** b) Berechnen Sie den stationären Endwert der Sprungantwort des geregelten Systems $G(s)$ mit Einheitsrückführung.

Beschreiben Sie, wie sich das Systemverhalten durch die Polstellen-Kompensation verändert. Was würde sich ändern, wenn anstatt des PID- nur ein P-Regler verwendet werden würde.

# Aufgabe 2: Polstellen-Kompensation

**Aufgaben:** b) Berechnen Sie den stationären Endwert der Sprungantwort des geregelten Systems $G(s)$ mit Einheitsrückführung.




$$G_v = G_0$$

$$G_r = 1$$

$$1 + G_0 = \frac{s(s+1)(s+8) + 2K}{s(s+1)(s+8)}$$

$$G(s) = \frac{2K}{\cancel{s(s+1)}(s+8)} \cdot \frac{\cancel{s(s+1)}(s+8)}{s(s+1)(s+8) + 2K} = \frac{2K}{s(s+1)(s+8) + 2K}$$

# Aufgabe 2: Polstellen-Kompensation

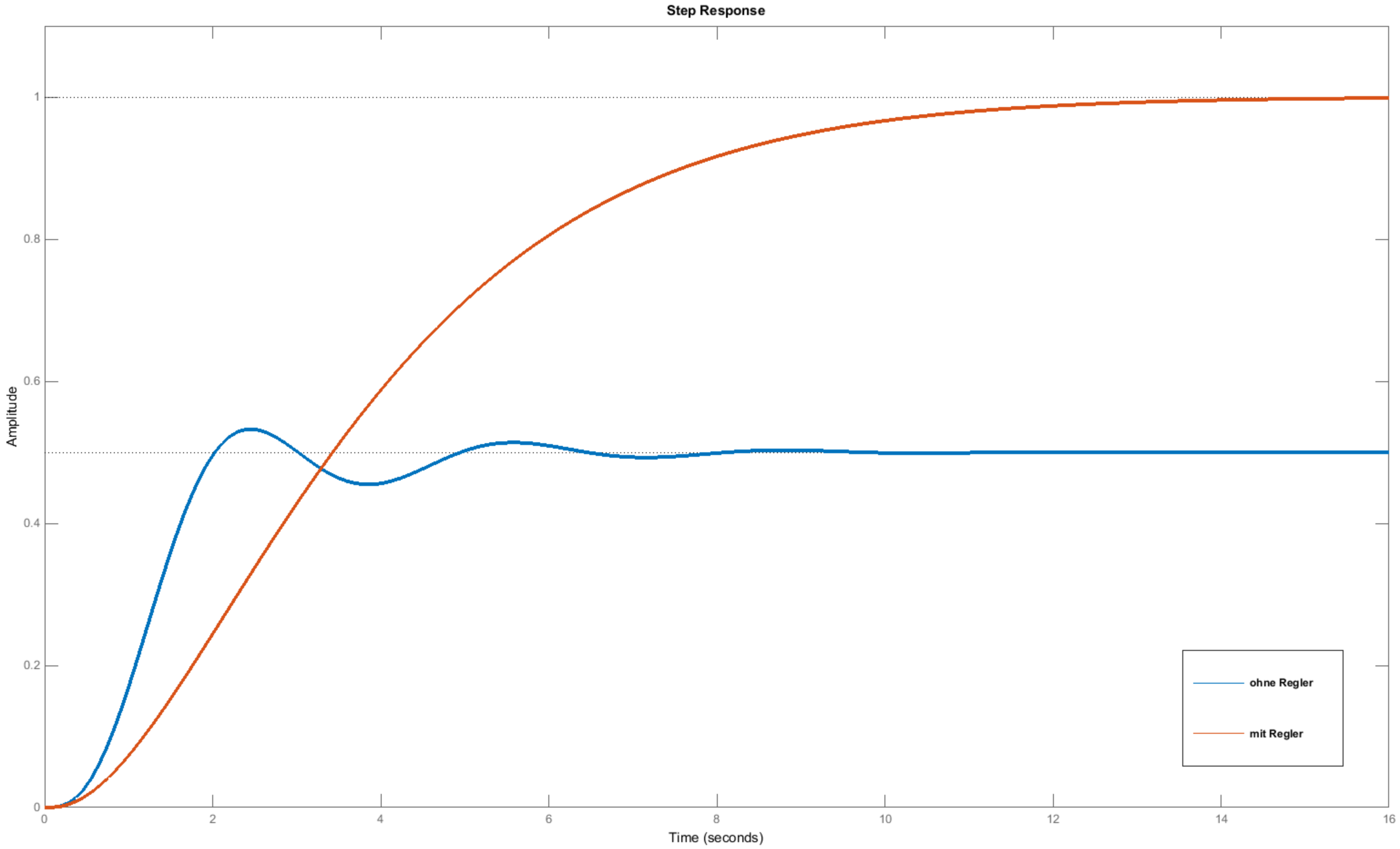
**Aufgaben:** b) Berechnen Sie den stationären Endwert der Sprungantwort des geregelten Systems $G(s)$ mit Einheitsrückführung.

$$G(s) = \frac{2K}{s^3 + 9s^2 + 8s + 2K}$$

$$\lim_{s \to 0} s \cdot G(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{2K}{s^3 + 9s^2 + 8s + 2K} = \frac{2K}{2K} = 1$$

$K_R = 1$

# Sprungantworten des geregelten und ungeregeltem Systems (PID)



# Sprungantworten des geregelten und ungeregeltem Systems (P)