8. Übung zur Vorlesung „Steuer- und Regelungstechnik“

Stationäre Genauigkeit, Reglerstrukturen, Polkompensation

Felix Goßmann M.Sc.

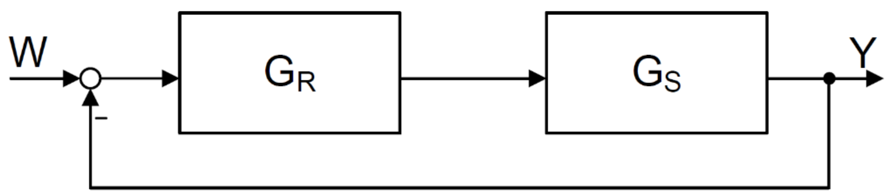
Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Aufgabe 1: Stationäre Genauigkeit

Gegeben ist ein IT_1-System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \underbrace{\frac{1}{s}}_{I} \cdot \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{PT_1}$$

Es wird ein Standardregelkreis der Form



betrachtet, wobei Regler ein P-Regler $G_R(s) = K_R$ eingesetzt wird.

Aufgabe: Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises und den stationären Endwert der Sprungantwort. Welche Aussage lässt sich aufgrund des Ergebnisses im Hinblick auf die stationäre Genauigkeit treffen?

Aufgabe 1: Stationäre Genauigkeit

Aufgabe: Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises und den stationären Endwert der Sprungantwort. Welche Aussage lässt sich aufgrund des Ergebnisses im Hinblick auf die stationäre Genauigkeit treffen?

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \qquad G_R = K_R$$

$$G_v(s) = G(s)\,G_R(s) = \frac{K_R}{s(s+1)} = G_0(s)$$

$$G_r(s) = 1$$

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}$$

Aufgabe 1: Stationäre Genauigkeit

Aufgabe: Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises und den stationären Endwert der Sprungantwort. Welche Aussage lässt sich aufgrund des Ergebnisses im Hinblick auf die stationäre Genauigkeit treffen?

$$1 + G_0(s) = \frac{s(s+1) + K_R}{s(s+1)}$$

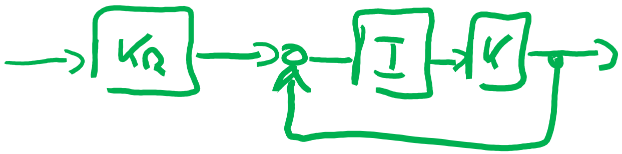
$$\underbrace{H(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}}_{\text{Sprungantwort}}$$

$$G(s) = \frac{K_R}{\cancel{s(s+1)}} \cdot \frac{\cancel{s(s+1)}}{s(s+1)+K_R} = \frac{K_R}{s^2+s+K_R}$$

$$\lim_{s \to 0} s \cdot G(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{K_R}{s^2+s+K_R} = \frac{K_R}{K_R} = 1$$

Definition der stationären Genauigkeit

Stationäre Genauigkeit eines Regelkreises ist gegeben, wenn die Regelabweichung nach der Vorgabe eines Sprungsignals als Sollwert (bzgl. Führungsverhalten) oder nach Einwirken einer sprungförmigen Störung (bzgl. Störverhalten) **für $t \to \infty$ zu Null** wird.



Bedingungen an offenen Regelkreis

Voraussetzung: Stabilität des geschlossenen Kreises

Stationäre Genauigkeit:

- Freies I-Glied liegt im offenen Kreis (nicht in unterlagerte Rückkopplungen eingebunden)
- nur bei stationär genauer Messung

$$G_0(s) = \frac{1}{s} \cdot G(s)$$

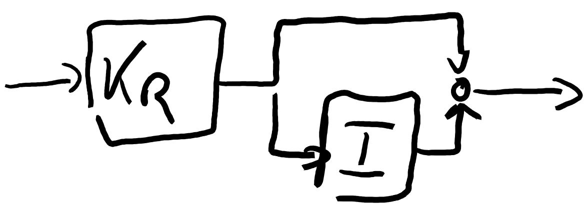
Aufgabe 2: Reglerstrukturen

Gegeben ist das System aus der vorherigen Übung mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Es wird ein Standardregelkreis mit den beiden folgenden Regler-Strukturen betrachtet

- PI-Regler: $G(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I \cdot s}\right)$
- PID-Regler: $G(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I \cdot s} + T_D \cdot s\right)$



PD-Regler $G(s) = K_R(1 + T_D s)$

Aufgabe 2: Reglerstrukturen

Gegeben ist das System aus der vorherigen Übung mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Es wird ein Standardregelkreis mit den beiden folgenden Regler-Strukturen betrachtet

- PI-Regler: $\boxed{G(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I \cdot s}\right)}$

Aufgaben: a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises mit einem PI-Regler. Untersuchen Sie den Einfluss der Reglerparameter K_R und T_I auf das Verhalten der Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises.

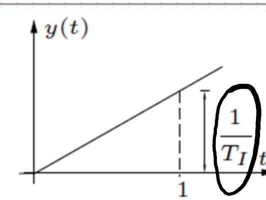
Aufgabe 2: Reglerstrukturen

Aufgaben: a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises mit einem PI-Regler. Untersuchen Sie den Einfluss der Reglerparameter K_R und T_I auf das Verhalten der Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises.

$$G(s) = \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$G_R(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I \cdot s}\right) = \frac{K_R(T_I s + 1)}{T_I s}$$

$$G_v(s) = G(s) \cdot G_R(s)$$

I	$y(t) = \frac{1}{T_I}\int u\,dt$ $\boxed{G(s) = \frac{1}{T_I s}}$	

Aufgabe 2: Reglerstrukturen

Aufgaben: a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises mit einem PI-Regler. Untersuchen Sie den Einfluss der Reglerparameter K_R und T_I auf das Verhalten der Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises.

$$G_v = \frac{2}{s^3+6s^2+11s+6} \cdot \frac{K_R(T_I s+1)}{T_I s} = \frac{2K_R(T_I s+1)}{T_I s(s^3+6s^2+11s+6)}$$

$$G_r = 1 \longrightarrow G_0 = G_v$$

$$1+G_0(s) = \frac{T_I s(s^3+6s^2+11s+6)+2K_R(T_I s+1)}{T_I s(s^3+6s^2+11s+6)}$$

$$G(s) = \frac{2K_R(T_I s+1)}{T_I s(s^3+6s^2+11s+6)+2K_R(T_I s+1)}$$

zusätzliche Nullstelle

zusätzliche Polstelle

Aufgabe 2: Reglerstrukturen

Aufgaben: a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises mit einem PI-Regler. Untersuchen Sie den Einfluss der Reglerparameter K_R und T_I auf das Verhalten der Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises.

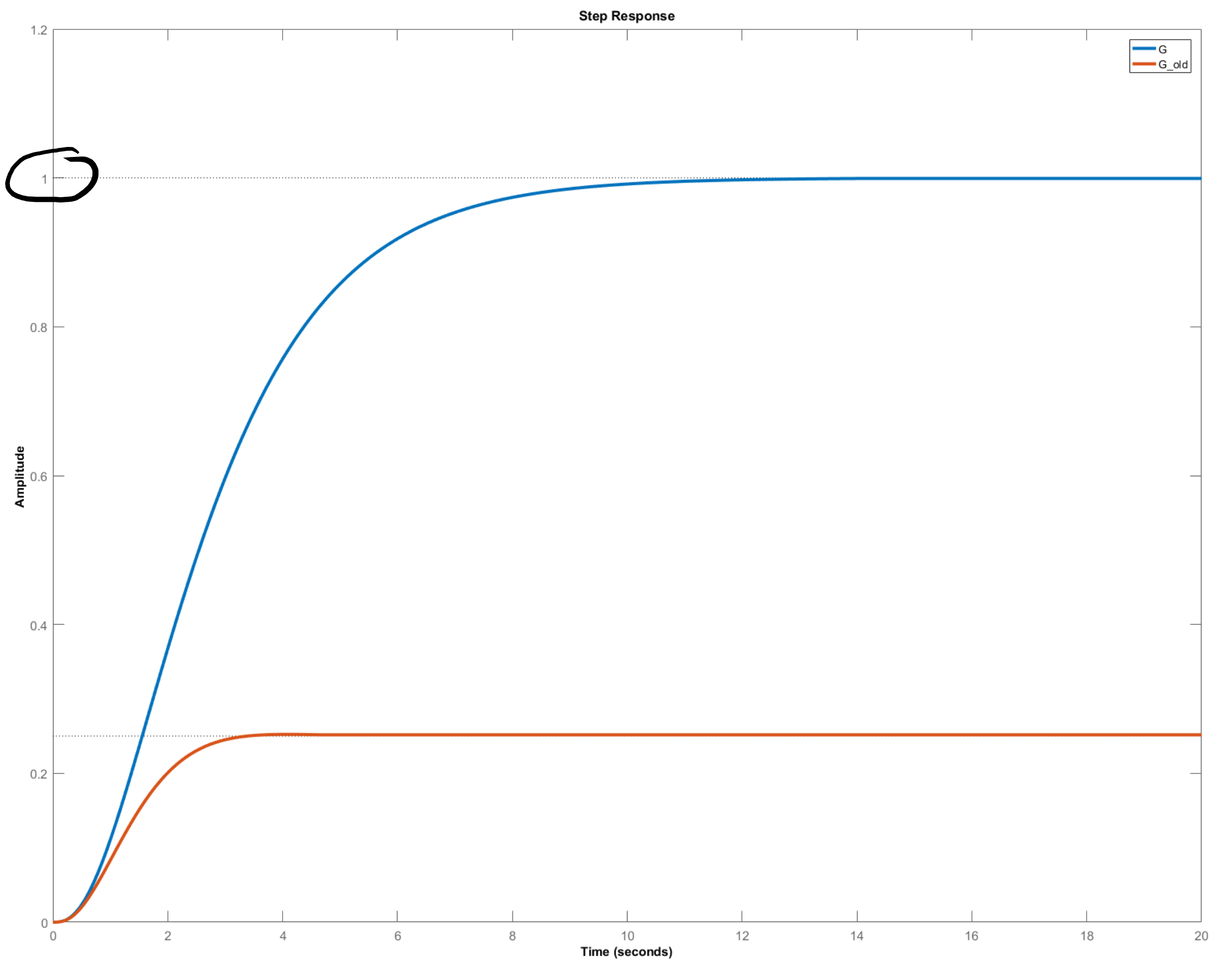
$$G = \frac{2K_R T_I s + 2K_R}{T_I s^4 + 6T_I s^3 + 11 T_I s^2 + (6T_I + 2K_R T_I) s + 2K_R}$$

$$\lim_{s \to 0} s \cdot G(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{\overset{\to 0}{2K_R T_I s} + 2K_R}{\underbrace{T_I s^4}_{\to 0} + \underbrace{6T_I s^3}_{\to 0} + \underbrace{11 T_I s^2}_{\to 0} + \underbrace{(6T_I + 2K_R T_I) s}_{\to 0} + 2K_R}$$

$$= \frac{2K_R}{2K_R} = 1$$

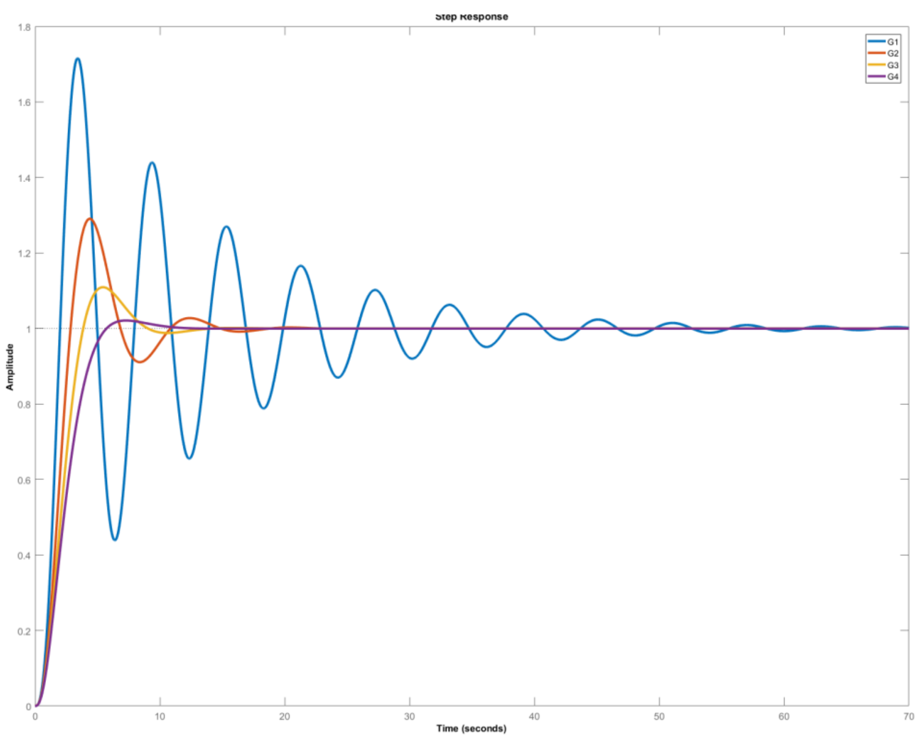
Aufgabe 2: Reglerstrukturen

- Vgl. mit P-Regler aus vorheriger Übung
- Durch I-Anteil wird stat. Genauigkeit erreicht
- $K_R = 1$

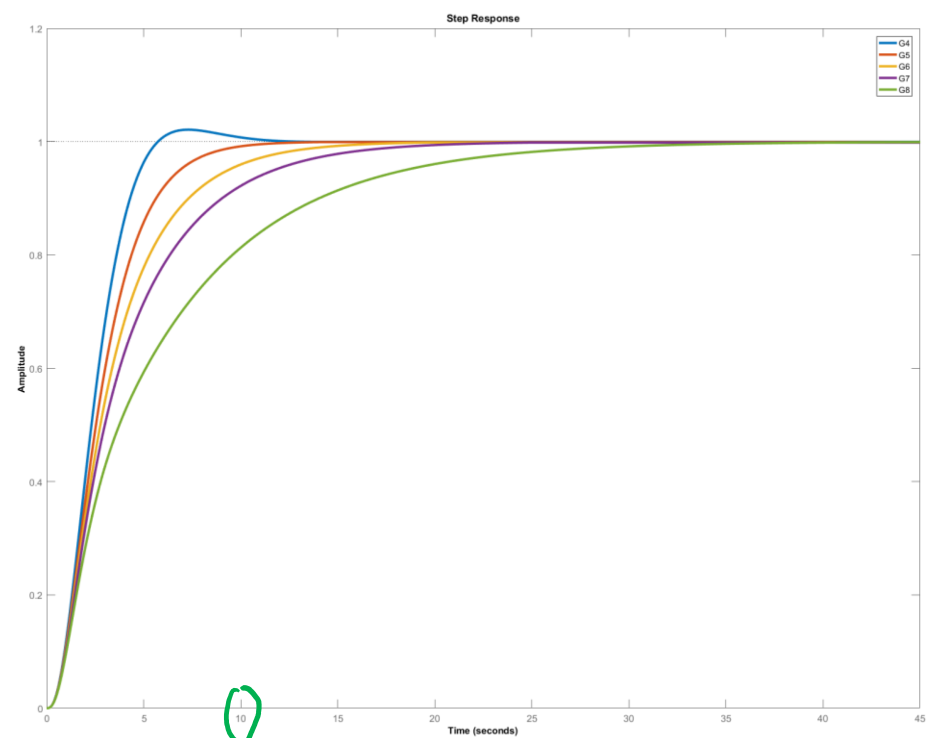


Aufgabe 2: Reglerstrukturen

Einfluss der Reglerparameter (hier T_I für $K_R = 1$)



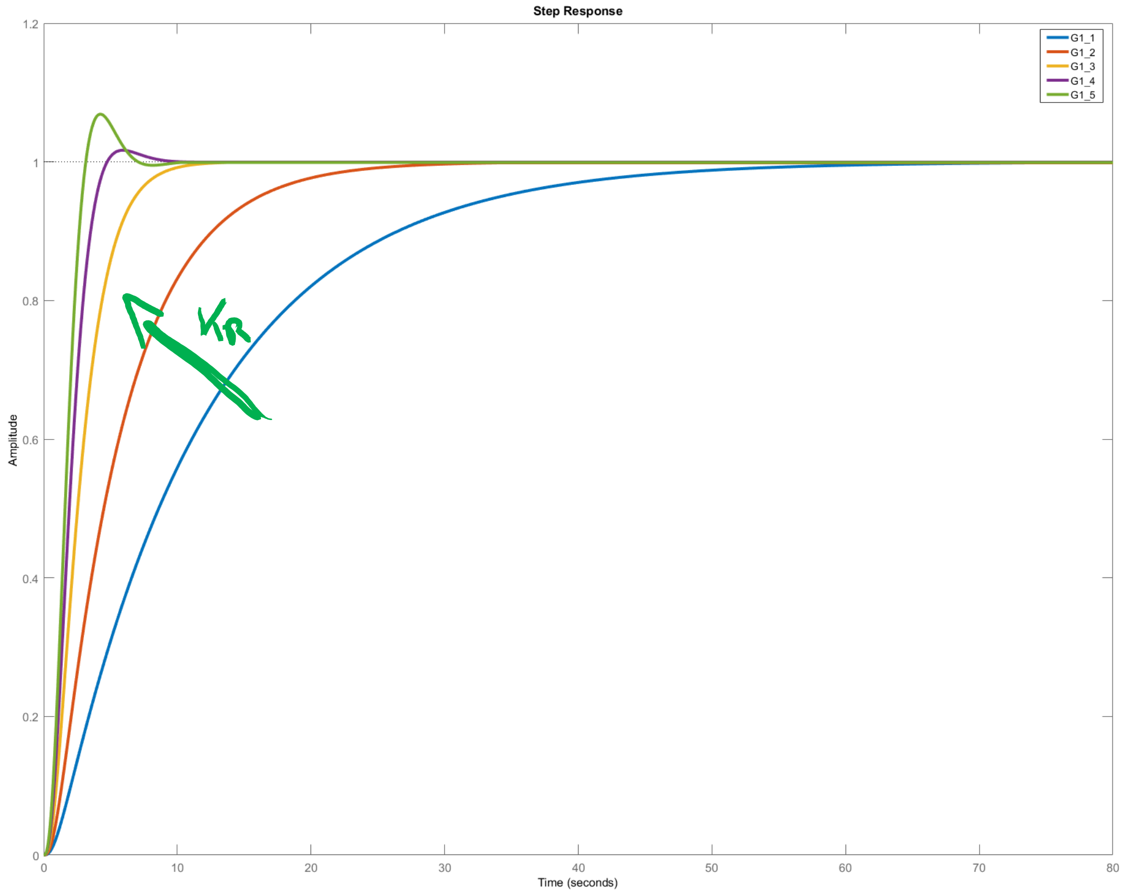
$0.2 \le T_I \le 0.8$



$0.8 \le T_I \le 2$

Aufgabe 2: Reglerstrukturen

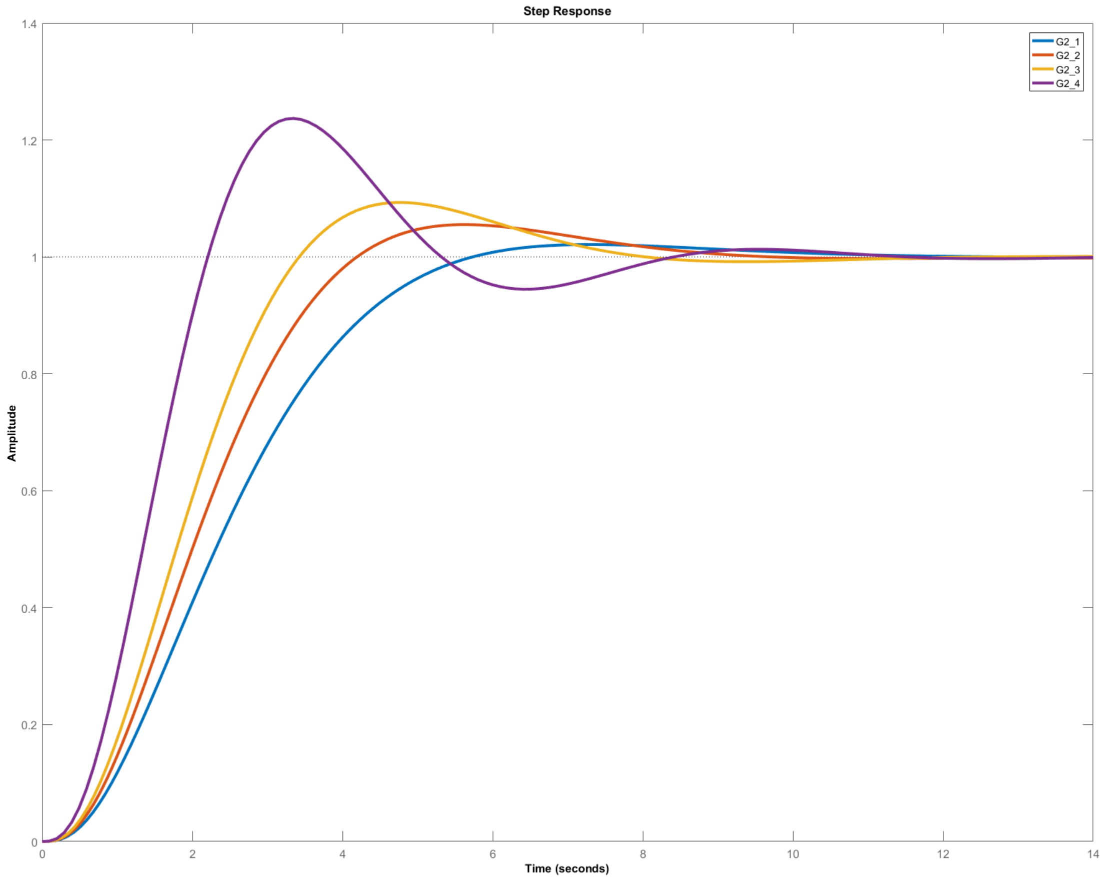
Einfluss der Reglerparameter (hier K_R für $\mathrm{T_I} = 1$)



$$0.25 \leq K_R \leq 2$$

Aufgabe 2: Reglerstrukturen

Einfluss der Reglerparameter (hier K_R für $\mathrm{T_I} = 0.8$)



$1 \leq K_R \leq 2.5$

Aufgabe 2: Reglerstrukturen

Gegeben ist das System aus der vorherigen Übung mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Es wird ein Standardregelkreis mit den beiden folgenden Regler-Strukturen betrachtet

- PID-Regler: $G(s) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_I \cdot s} + T_D \cdot s\right)$

Aufgaben: b) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises mit einem PID-Regler. Wie äußert sich der Einfluss des zusätzlichen Reglerparameters T_D auf das Verhalten der Regelstrecke?

Aufgabe 2: Reglerstrukturen

Aufgaben: b) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises mit einem PID-Regler. Wie äußert sich der Einfluss des zusätzlichen Reglerparameters T_D auf das Verhalten der Regelstrecke?

$$G_R(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right) = K_R + \frac{K_R}{T_I s} + K_R T_D s$$

$$= \frac{T_I s K_R + K_R + K_R T_I T_D s^2}{T_I s} = \frac{K_R T_I T_D s^2 + T_I K_R s + K_R}{T_I s}$$

$$G_0(s) = G_v(s) = \frac{K_R(T_I T_D s^2 + T_I s + 1)}{T_I s} \cdot \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$= \frac{2K_R(T_I T_D s^2 + T_I s + 1)}{T_I s(s^3 + s^2 + 11s + 6)}$$

Aufgabe 2: Reglerstrukturen

Aufgaben: b) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises mit einem PID-Regler. Wie äußert sich der Einfluss des zusätzlichen Reglerparameters T_D auf das Verhalten der Regelstrecke?

$$1 + G_0(s) = \frac{T_I s(s^3 + 6s^2 + 11s + 6) + 2K_R(T_D T_I s^2 + T_I s + 1)}{T_I s(s^3 + 6s^2 + 11s + 6)}$$

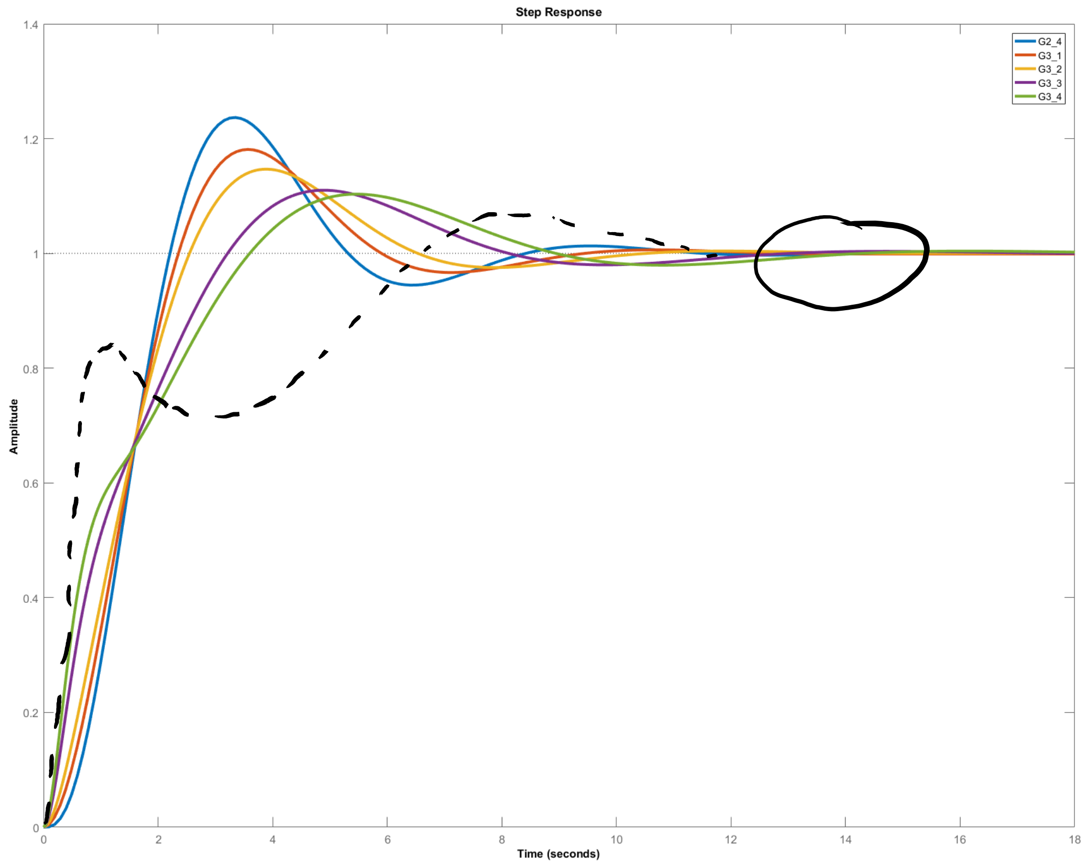
$$G(s) = \frac{G_0}{1 + G_0} = \frac{2K_R(T_D T_I s^2 + T_I s + 1)}{T_I s^4 + 6T_I s^3 + 11T_I s^2 + 6T_I s + 2K_R T_D T_I s^2 + 2K_R T_I s + 2K_R}$$

$$= \frac{2K_R(T_D T_I s^2 + T_I s + 1)}{T_I s^4 + 6T_I s^3 + \underbrace{(11T_I + 2K_R T_D T_I)} s^2 + (6T_I + 2T_I K_R) s + 2K_R}$$

Aufgabe 2: Reglerstrukturen

Einfluss der Reglerparameter (hier $K_R = 2.5$ für $T_I = 0.8$)

$0.5 \leq T_D \leq 3.5$



Aufgabe 2: Reglerstrukturen

Einfluss der Reglerparameter bei einem PID-Regler

P-Anteil: *„Je größer die Regeldifferenz, desto stärker die Reaktion“*
$\longrightarrow$ Gegenwart des Regelfehlers

I-Anteil: *„Je länger die Regeldifferenz ansteht, desto stärker die Reaktion“*
$\longrightarrow$ Vergangenheit des Regelfehlers (Rückblick)

D-Anteil: *„Je schneller die Regeldifferenz sich ändert, desto stärker die Reaktion“*
$\longrightarrow$ Zukunft des Regelfehlers (Vorausschau)

Aufgabe 2: Reglerstrukturen

- Ein P-Anteil sorgt für eine schnelle Reaktion bei auftretenden Regelfehler (sofortige Reaktion)

- Ein I-Anteil fügt dem offenen Regelkreis ein freies I-Glied hinzu und stellt so die stationäre Genauigkeit sicher, neigt zu starkem Überschwingen durch aufaddieren des Regelfehlers

- Ein D-Anteil sorgt für eine schnelle Reaktion auf plötzliche Sollwertänderungen, geringeres Überschwingen als bei P-Anteil

- Gewichtung der Anteile untereinander für Reglereinstellung je nach Anforderung
- Erfolgt durch Reglerparameter K_R, T_I und T_D

Aufgabe 3: Polkompensation → stabilen Polstellen

Gegeben ist das System

$$G(s) = \frac{4}{(s+2)(s+7)(s+8)}$$

Das System $G(s)$ soll im Folgenden mit einem PI-Regler

$$G_R(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I}\right)$$

geregelt werden.

Aufgaben: a) Bestimmen Sie die Nachstellzeit T_I des Reglers so, dass die Polstelle $s = -8$ der Regelstrecke kompensiert wird.
b) Bestimmen Sie den Bereich für K_R für den der geschlossene Regelkreis stabil ist.
c) Wie wirken sich die Polkompensation und die Wahl der Reglerverstärkung K_R auf die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises aus?

Aufgabe 3: Polkompensation

Aufgaben: a) Bestimmen Sie die Nachstellzeit T_I des Reglers so, dass die Polstelle $s = -8$ der Regelstrecke kompensiert wird.

$$G_R(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) = K_R\left(\frac{T_I s + 1}{T_I s}\right) = K_R\left(\frac{s + \frac{1}{T_I}}{s}\right)$$

$$T_I = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

$$G_0(s) = \frac{4}{(s+2)(s+7)(s+8)} \cdot \frac{K_R\left(s + \frac{1}{T_I}\right)}{s} = \frac{4 K_R \cancel{(s+8)}}{s(s+2)(s+7)\cancel{(s+8)}}$$

$$= \frac{4K_R}{s(s+2)(s+7)}$$

Aufgabe 3: Polkompensation

Aufgaben: b) Bestimmen Sie den Bereich für K_R für den der geschlossene Regelkreis stabil ist.

$$1+G_0(s) = 1 + \frac{4K_R}{s(s+2)(s+7)} = \frac{s(s+2)(s+7)+4K_R}{s(s+2)(s+7)}$$

$$G = \frac{G_0}{1+G_0} = \frac{4K_R}{s(s+2)(s+7)+4K_R} = \frac{4K_R}{s^3+9s^2+14s+4K_R}$$

notw. Bed.: $4K_R > 0 \implies K_R > 0$

hin. Bed.: $H_1 = a_2 = 9 > 0$ | $H_2 = \begin{vmatrix} 9 & 4K_R \\ 1 & 14 \end{vmatrix}$

$\det H_2 = 9 \cdot 14 - 1 \cdot 4K_R = 126 - 4K_R > 0$

$126 - 4K_R > 0$

$126 > 4K_R$

$31{,}5 > K_R$

$$\boxed{0 < K_R < 31{,}5}$$

Aufgabe 3: Polkompensation

Aufgaben: c) Wie wirken sich die Polkompensation und die Wahl der Reglerverstärkung K_R auf die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises aus?

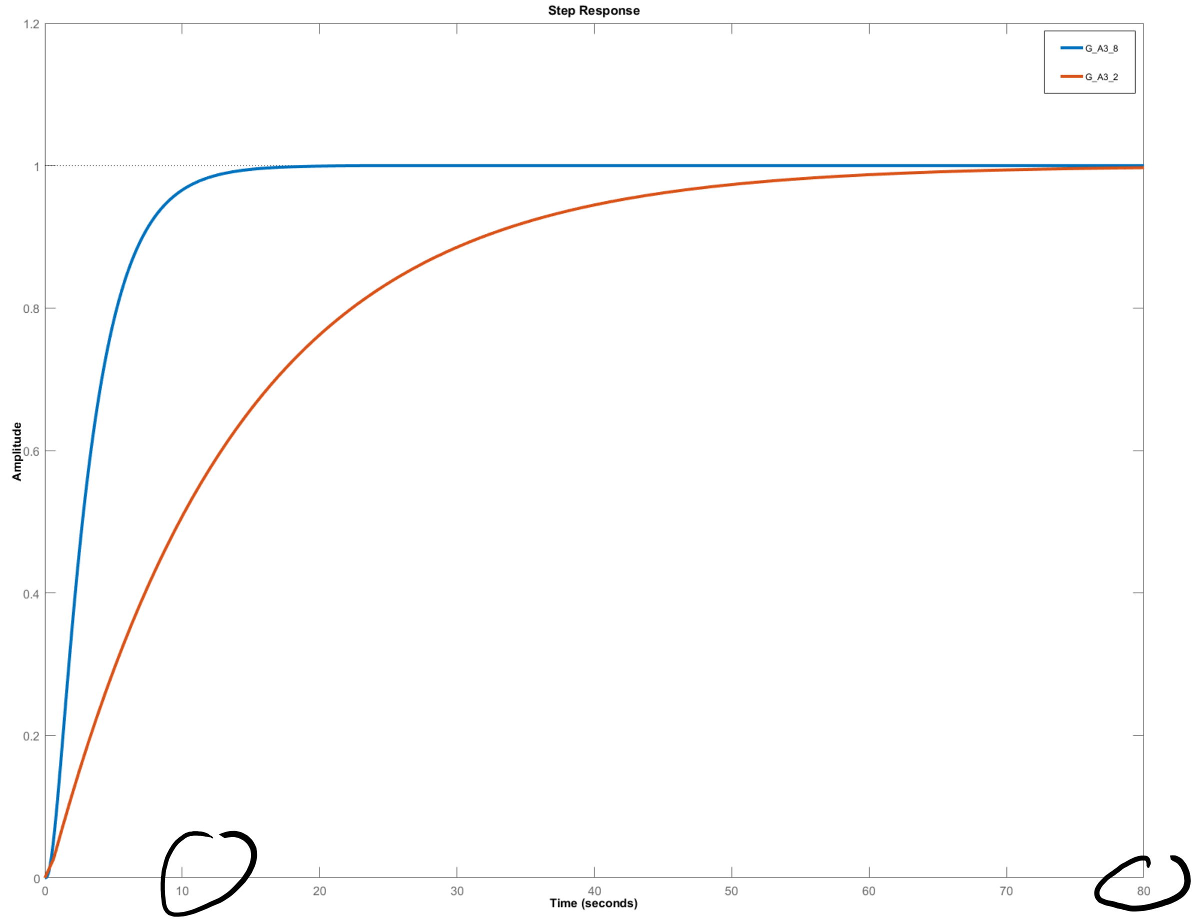
$$H(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$h_\infty = \lim_{s \to 0} s \cdot G(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{4K_R}{s^3 + 9s^2 + 14s + 4K_R} = 1$$

Aufgabe 3: Polkompensation

Einfluss der Polkompensation

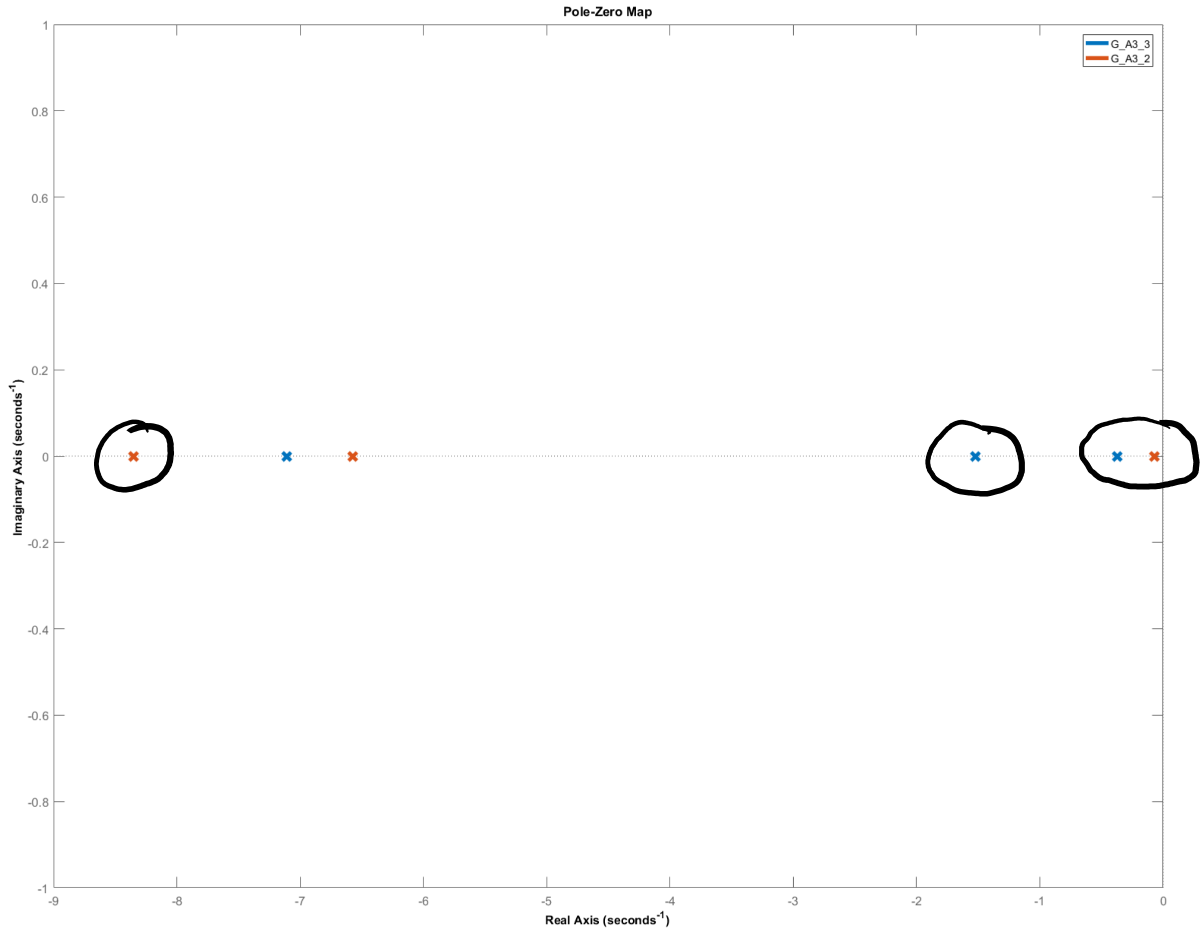
- Vergleich mit Kompensation von $\underline{s = -2}$
- $K_R = 1$ in beiden Fällen



Aufgabe 3: Polkompensation

Einfluss der Polkompensation

- Vergleich mit Kompensation von $s = -2$
- $K_R = 1$ in beiden Fällen
- Wanderung der Polstellen



Aufgabe 3: Polkompensation

Einfluss von K_R

- Kompensation von $s = -8$ in allen Fällen
- $0{,}5 \leq K_R \leq 3$